PENGANTAR

TEORI BILANGAN

PENGANTAR
TEORI BILANGAN

Nurhardiani
Susilahudin Putrawangsa
M. Syawahid

Perpustakaan Nasional RI. Katalog dalam Terbitan (KDT)

Nurhardiani, Susilahudin Putrawangsa, dan M. Syawahid
Pengantar Teori Bilangan
Insan Madani Institute, 2018
viii + 161 hlm.; 16 x 24 cm
ISBN: 978-602-50911-3-1

I. Sains II. Judul

Teori Bilangan

Penulis : Nurhardiani, Susilahudin Putrawangsa, dan M. Syawahid
Layout : Muhammad Amalahanif
Desain Cover : El Kasafany

Cetakan I, 2018

Penerbit:
Insan Madani Institute

PENGANTAR PENULIS

TEORI Bilangan muncul sebagai sebuah bagian dari ilmu matematika yang mengkaji bilangan bulat. Adanya istilah algorima Euclid menunjukkan bahwa perkembangan teori bilangan sudah muncul ratusan bahkan ribuan tahun yang lalu. Bilangan bulat yang terdiri dari bilangan asli positif, bilangan O dan bilangan asli negatif menjadi semesta pembicaraan dalam teori bilangan. Buku Ajar *Pengantar Teori Bilangan* ini diperuntukkan bagi mahasiswa Jurusan Matematika atau Pendidikan Matematika sebagai bahan belajar atau referensi dalam perkuliahan Teori Bilangan.

Buku ini disusun berdasarkan kebutuhan perkuliahan seperti materi perkuliahan, contoh-contoh, rangkuman, dan latihan. Materi yang ada pada buku ajar *Pengantar Teori Bilangan* ini terdiri dari Sistem Bilangan Bulat, Relasi Keterbagian, Faktor Persekutuan Terbesar (FPB), Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK), Fundamental Aritmatika, Persamaan Diophantine, Kekongruenan dan Perkongruenan Linier. Setiap pembahasan materi dalam buku ajar ini memuat definisi, teorema dan pembuktian teorema serta beberapa contoh yang berkaitan dengan pembahasan tersebut. Buku ajar *Pengantar Teori Bilangan* ini diharapkan bisa menjadi sumber bagi pengembangan ilmu matematika pada khususnya dan ilmu pengetahuan pada umumnya.

Daftar Isi

BAB I

SISTEM BILANGAN BULAT

Memahami sistem pada himpunan bilangan bulat adalah sentral dalam kajian teori bilangan karena semesta pembicaraan dalam teori bilangan adalah himpunan bilangan bulat. Bahkan beberapa pembahasan teori bilangan lainnya membatasi semesta pembicaraannya yaitu terbatas pada himpunan bilangan asli.

Operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan dan pembagian bilangan bulat pastinya tidak sulit untuk Anda lakukan. Terlebih lagi, operasi-operasi ini sudah diperkenalkan sejak Anda belajar di sekolah dasar atau bahkan lebih awal lagi. Tapi, apakah Anda pernah bertanya konsep dan sifat-sifat apa saja yang melandasi operasi-operasi tersebut. Adalah mudah untuk mengakatan bahwa (-5) × (-3) adalah 15, tapi apakah kita pernah bertanya mengapa harus positif 15, mengapa bukan negatif 15 atau mungkin 53? Tentu ada sifat dan konsep matematika yang berlaku di dalamnya yang telah menjadi kesepakatan bersama.

Pada kasus yang lain, Anda mungkin sering bertanya mengapa pengurangan suatu bilangan bulat positif dengan suatu bilangan bulat negatif menghasilkan nilai yang sama dengan menjumlahan dua bilangan tersebut asalkan bilangan yang kedua diganti dengan invers penjumlahannya. Misalnya, 7 – (-2) akan memiliki nilai yang sama dengan 7 + 2, dimana 2 adalah invers penjumlahan dari -2. Mengapa demikian?

Tidak hanya itu, Anda juga mungkin kesulitan menerima secara logis mengapa perkalian dua bilangan bulat negatif menghasilkan suatu bilangan bulat positif, misalnya (-7) × (-2) = 14. Mengapa bukan -14? maka pada bagian ini, Anda akan diperkenalan sistem bilangan bulat dan operasi bilangan bulat serta sifat-sifat yang berlaku pada operasi tersebut. Secara lebih rinci, setelah mempelajari bagian ini, Anda diharapkan dapat:

1. Memberikan penjelasan dan makna operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan bulat

2. Membuktikan beberapa sifat yang berlaku pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan bulat.

A. APA ITU BILANGAN BULAT?

Apa yang dimaksud dengan Bilangan Bulat? Apakah bilangan 1,5 termasuk bilangan bulat? Bagaimana dengan $\frac{1}{2}$ atau $\sqrt{2}$? Apakah termasuk bilangan bulat? Apakah bilangan bulat itu adalah semua bilangan asli atau sebaliknya? Dimanakah kedudukan bilangan bulat dalam sistem bilangan?

Pertanyaan-pertanyaan mendasar di atas perlu diklarifikasi terlebih dahulu sebelum lebih lanjut membicarakan sistem, operasi, dan sifat-sifat yang berlaku pada operasi himpunan bilangan bulat.

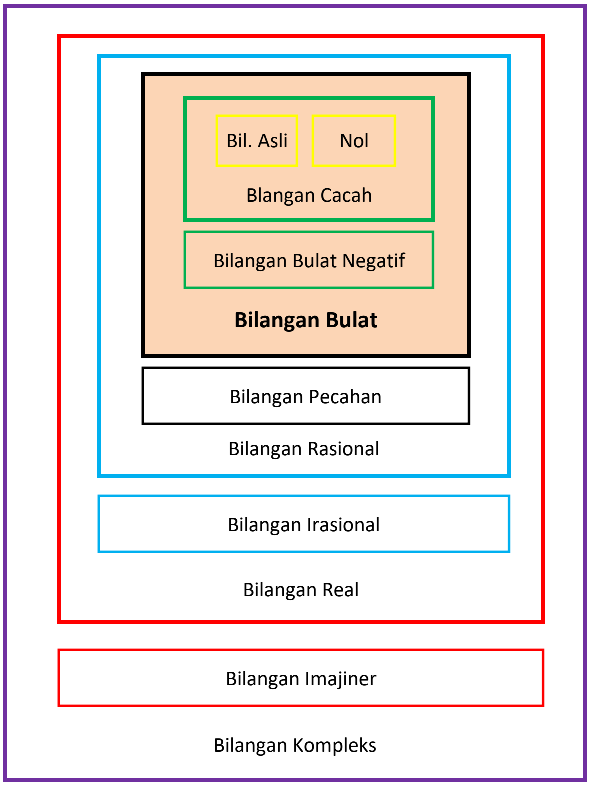
Bilangan bulat adalah bilangan yang utuh yaitu bukan bilangan pecahan. Misalnya, 5, 6, -3, dan seterusnya. 2,5 tidak termasuk bilangan bulat karena jika diselidiki menggunakan satuan bilangan, yaitu 2,5 terdiri dari 1 + 1 + 0,5, maka terdapat satuan pembentuknya yang merupakan bilangan pecahan, yaitu 0.5. Begitu pula dengan $\frac{2}{3}$ atau $\sqrt{3}$ bukan bilangan bulat karena memiliki komponen satuan pembentuknya yang merupakan pecahan.

Selanjutnya, untuk lebih memudahkan dalam memahami bilangan bulat, maka bilangan bulat dapat juga didefinisikan dengan menyebutkan anggota-anggota himpunannya, yaitu bilangan bulat didefinisikan sebagai himpunan bilangan yang terdiri atas himpunan bilangan asli (1, 2, 3, dst.), bilangan nol (0), dan himpunan bilangan yang merupakan invers penjumlahan dari bilangan asli, yaitu -1, -2, -3, dan seterusnya. Dengan notasi bilangan, himpunan bilangan bulat dapat ditulis sebagai berikut: **Z** = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }. Notasi huruf bold **Z** (*Zahlen*) selanjutnya digunakan untuk mereperesentasi bilangan bulat.

Definsi 1.1

Bilangan bulat atau disimbolkan dengan **Z** adalah himpunan bilangan yang terdiri atas himpunan bilangan asli, bilangan nol, dan himpunan bilangan invers penjumlahan dari bilangan asli, yang dinotasikan dengan **Z** = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Ditinjau dari keanggotaanya, anggota himpunan bilangan bulat terbagi dalam tiga kelompok, yaitu himpunan bilangan bulat positif (1, 2, 3, ...), bilangan nol (0), dan himpunan bilangan bulat negatif (-1, -2, -3, ...) yang merupakan invers penjumlahan dari himpunan bilangan bulat positif. Bilangan nol tidak termasuk dalam himpunan bilangan bulat positif ataupun himpunan bilangan bulat negatif. Oleh karena itu, nol disebut sebagai bilangan netral.



Gambar 1. Silsilah Himpunan Bilangan

Dengan demikian bilangan pecahan biasa atau desimal tidak termasuk dalam himpunan bilangan bulat, begitu pula himpunan bilangan dalam bentuk akar, seperti $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, dan sebagainya.

Apakah ${}^{6}/_{3}$ atau $\sqrt{16}$ adalah bilangan bulat? Pada dasarnya ${}^{6}/_{3}$ bukanlah bilangan pecahan karena ${}^{6}/_{3}$ sejatinya adalah bilangan 2. Jadi, ${}^{6}/_{3}$ adalah bentuk lain dari bilangan 2 yang merupakan anggota bilangan bulat. Begitupula dengan $\sqrt{16}$. $\sqrt{16}$ bukanlah bentuk akar, karena sejatinya $\sqrt{16}$ adalah 4 yang merupakan anggota himpunan bilangan bulat.

Dalam semesta bilangan, himpunan bilangan bulat bersama dengan himpunan bilangan pecahan membentuk himpunan bilangan rasional. Sedangkan himpunan bilangan bulat sendiri dibangun dari himpunan bilangan cacah, yaitu gabungan himpunan bilangan asli dan nol, dan himpunan bilangan bulat negatif. Gambar 1 menunjukkan kedudukan himpunan bilangan bulat dalam semesta himpunan bilangan.

B. POSTULAT-POSTULAT DASAR PADA BILANGAN BULAT

Apa yang terjadi jika dua bilangan bulat dijumlahkan, dikali, dikurangi, atau dibagi? Sifat apa saja yang berlaku pada operasi-operasi tersebut?

Sebelum menjawab pertanyaan di atas, ada baiknya ditelusuri kembali sejumlah sifat-sifat dasar pada operasi penjumlahan dan perkalian dua bilangan bulat. Sifat-sifat ini nantinya akan dijadikan sebagai asas dalam membuktikan atau menemukan sifat-sifat operasi bilangan bulat lainnya yang lebih kompleks. Karena sifat-sifat ini merupakan kesepakatan yang bersifat umum, begitu mendasar dan jelas, maka sifat-sifat ini sering digolongkan sebagai postulat, yaitu pernyataan matematika yang disepakati benar tanpa perlu adanya pembuktian.

Postulat pertama adalah tentang empat sifat dasar pada relasi kesamaan, yaitu refleksif, simetris, transitif, dan penjumlahan pada kesamaan yang dijabarkan sebagai berikut:

Postulat 1.1a

Untuk sembarang bilangan bulat a, **b** dan **c,** maka berlaku:

1. Sifat refleksif, yaitu **a = a**
2. Sifat simetris, yaitu jika **a = b**, maka **b = a**
3. Sifat transitif, yaitu jika **a = b** dan **b = c,** maka **a = c**
4. Penjumlahan pada kesamaan, yaitu **a = b** ⇔ **a + c** = **b + c**

Selain sifat-sifat pada relasi kesamaan di atas, diperkenalkan juga sifat-sifat yang berlaku pada operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat, yaitu sebagai berikut:

Postulat 1.1b

Untuk sembarang bilangan bulat **a, b** dan **c,** dalam operasi biner penjumlahan dan perkalian berlaku sifat-sifat berikut ini:

1. Sifat tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian

   a + b = n, dimana **n** adalah bilangan bulaT, yaitu penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat lainnya.

   a × b = n, dimana **n** adalah bilangan bulat, yaitu perkalian dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat lainnya.

2. Sifat komutatif pada operasi penjumlahan dan perkalian

   a + b = b + a

   a × b = b × a

3. Sifat asosiatif pada operasi penjumlahan dan perkalian

   (a + b) + c = a + (b + c)

   (a × b) × c = a × (b × c)

4. Sifat distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan

   a × (b + c) = (a × b) + (a × c)

   (b + c) × a = (b × a) + (c × a)

5. Sifat identitas pada operasi penjumlahan dan perkalian

   Untuk setiap bilangan bulat **a**, ada dengan tunggal elemen identitas di dalam bilangan bulat, yaitu **0,** sehingga **a + 0** = **0 + a = a.** Dengan demikian, bilangan bulat 0 disebut elemen identitas penjumlahan.

   Untuk setiap bilangan bulat a, ada dengan tunggal elemen identitas di dalam bilangan bulat, yaitu 1, sehingga **a** × **1** = **1** × **a** = **a,** Dengan demikian, bilangan bulat 1 disebut elemen identitas perkalian.

Selain sifat-sifat di atas, terdapat sifat-sifat penting lainnya, yaitu sifat yang terkait dengan invers penjumlahan bilangan bulat, yaitu eksistensi suatu bilangan bulat **n** sedemikan sehingga untuk setiap bilangan bulat **a** memenuhi persamaan **a** + **n** = identitas penjumlahan, yaitu **a** + **n** = 0.

Bilangan bulat **n** yang memenuhi persamaan di atas adalah **–a,** yaitu **a** + **(-a)** = 0. Dengan demikian bilangan bulat **–a** disebut sebagai invers penjumlahan dari bilangan bulat a. Postulat ini kemudian dikenal dengan istilah postulat invers penjumlahan yang dinyatakan sebagai berikut:

Postulat 1.2a

Untuk setiap bilangan bulat **a**, maka ada dengan tunggal bilangan bulat **-a** sedemikian sehingga **a + (-a) = (-a) + a = 0**. **-a** disebut sebagai invers penjumlahan dari **a** atau sebalikanya **a** adalah invers penjumlahan dari -**a** dan 0 adalah elemen identitas penjumlahan.

Apakah invers penjumlahan dari setiap bilangan benar-benar tunggal? Untuk menunjukkan hal ini, tinjau argumentasi berikut ini:

Anggap **n** adalah invers penjumlahan dari bilangan bulat **a**, jika tidak tunggal maka **a** memiliki invers penjumlahan lainnya, misalnya **m**. Dengan demikian:

a + n = 0 dan **a + m = 0**

Dengan sifat transitif, diperoleh:

a + n = a + m

Dengan sifat penjumlahan pada kesamaan, diperoleh:

n = m

Dengan demikian n dan **m** adalah bilangan yang sama. Jadi invers penjumlahan lainnya dari **a** adalah **n**. Dengan ini, disimpulkan bahwa **n** tunggal atau invers penjumlahan dari **a** adalah tunggal, yaitu hanya **n**.

Apakah invers penjumlahan dari **-(-a)**? Karena **-(-a) + (-a) = 0**, maka invers penjumlahan dari **-(-a)** adalah **(-a)**.

Diketahui juga bahwa **a + (-a) = 0**, maka dengan sifat transitif:

-(-a) + (-a) = a + (-a)

Dengan menggunakan sifat penjumlahan pada kesamaan, diperoleh:

-(-a) = a

Dengan demikian **-(-a) = a.**

Kesimpulan ini dinyatakan dalam postulat berikut ini:

Postulat 1.2b

Untuk sembarang bilangan bulat **a**, maka **-(-a) = a**

Lalu, apakah invers penjumlahan dari bilangan bulat 0? Coba Anda pikirkan!

C. URUTAN BILANGAN PADA BILANGAN BULAT

Himpunan bilangan bulat adalah himpunan bilangan yang disusun dengan terurut tanpa ada batas atas dan batas bawah. Seperti yang telah disampaikan sebelumnya bahwa himpunan bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan bulat positif ($\mathbf{Z}^+$), bilangan nol (0), dan himpunan bilangan bulat negatif ($\mathbf{Z}^-$). Urutan ketiga elemen tersebut berdasarkan nilai adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{Z^- < 0 < Z^+}$$

Berdasarkan notasi di atas maka nilai bilangan bulat negatif lebih kecil daripada nol dan pada saat yang bersamaan nol lebih kecil daripada bilangan bulat positif. Dengan demikian, untuk setiap anggota himpunan bilangan bulat, urutan-urutan masing-masing bilangan dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots$$

Berdasarkan susunan urutan di atas dan dikarenakan bilangan bulat bersifat diskrit, sehingga jika dikatakan bilangan bulat **a** lebih kecil daripada bilangan bulat **b**, maka ada bilangan bulat lainnya, yaitu **c,** sedemikian sehingga **a** + **c** = **b**. Pernyataan ini dapa ditulis:

Postulat 1.3

Untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b**,

jika **a < b** maka ada bilangan bulat **c** sedemikian sehingga **a + c = b**

D. OPERASI PENJUMLAHAN BILANGAN BULAT

Setelah Anda mengenal sejumlah sifat-sifat dasar pada bilangan bulat, pada bagian ini akan memberi bagaimana memberikan makna sejumlah operasi penjumlahan dua bilangan bulat, misalnya operasi penjumlahan dua bilangan bulat negatif atau penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan buluat negatif.

Apa arti dari **(-a) + (-b)**? Apakah **(-a) + (-b)** dapat dimaknai sebagai **-(a + b)**? Untuk mengetahui arti dari **(-a) + (-b)**, tinjau argumentasi berikut ini:

i. Dengan sifat tertutup diperoleh:
   (-a) + (-b) = c, dengan **c** adalah sembarang bilangan bulat.
ii. Dengan sifat penjumlahan pada kesamaan diperoleh:
   ((-a) + (-b)) + b = c + b
iii. Dengan sifat asosiatif diperoleh:
   (-a) + ((-b) + b) = c + b
iv. Dengan sifat invers penjumlahan diperoleh:
   (-a) + 0 = c + b
v. Dengan sifatt identitas diperoleh:
   (-a) = c + b
vi. Dengan sifat penjumlahan pada kesamaan diperoleh:
   (-a) + a = (c + b) + a
vii. Dengan sifat asosiatif dan kemudian invers penjumlahan diperoleh:
   (-a) + a = c + (b + a)
   0 = c + (b + a)
viii. Dengan sifat penjumlahan pada kesamaan diperoleh:
   0 + (-(b + a)) = (c + (b + a)) + (-(b + a))
ix. Dengan sifat asosiatif dan kemudian invers penjumlahan serta sifat identitas diperoleh:
   -(b + a) = c + ((b + a) + (-(b + a)))
   -(b + a) = c + 0
   -(b + a) = c
x. Dengan sifat komutatif diperolah
   -(a + b) = c

xi. Memperhatikan i dan x, yaitu **(-a) + (-b) = c** dan **-(a + b) = c,** maka **(-a) + (-b) = -(a + b)**.

Jadi **(-a) + (-b)** dapat dimaknai sebagai **-(a + b)**, yaitu untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b** maka berlaku sifat **(-a) + (-b) = -(a + b).**

Argumentasi di atas lebih rincinya dipaparkan pada tabel pembuktian berikut ini:

Tabel 1.1
(-a) + **(-b)** = -(a + b)

Langkah	Notasi	Keterangan	Argumentasi
i	**(-a) + (-b) = c**	**c** adalah bilangan bulat	Sifat tertutup
ii	**((-a) + (-b)) + b = c + b**	Menambahkan **b** pada kedua ruas	Sifat penjumlahan pada kesamaan
iii	**(-a) +((-b) + b) = c + b**	Pengelompokan (**–b)** dengan **b**	Sifat asosiatif
iv	**(-a) + 0 = c + b**	Mengoperasikan **(-b)** + **b**	Sifat invers penjumlahan
v	**(-a) = c + b**	Mengoperasikan **(-a) + 0**	Sifat identitas
vi	**(-a) + a = (c + b) + a**	Menjumlahkan **a** pada kedua ruas	Sifat penjumlahan pada kesamaan
vii	**0 = c + (b + a)**	Mengoperasikan **(-a) + a** dan mengelompokkan **b** dengan **a**	Sifat invers penjumlahan dan sifat asosiatif
viii	**0 + (-(b + a)) = (c + (b + a)) + (-(b + a))**	Menjumlahkan **-(b + a)** pada kedua ruas	
ix	**-(b + a) = c +((b + a) + (-(b + a)))**	Mengoperasikan **0 + (-(b + a))** dan mengelompokkan **(b + a)** dengan **(-(b + a))**	Sifat identitas dan sifat asosiatif
x	**-(b + a) = c + 0**	Mengoperasikan **(b + a) + (-(b + a))**	Sifat invers penjumlahan
xi	**-(a + b) = c**	Membalik **b + a** menjadi **a + b** dan mengoperasikan **c + 0**	Sifat komutatif dan sifat identitas
xii	**-(a + b) = (-a) + (-b)**	Mengganti nilai **c** dengan **(-a) + (-b)** berdasarkan step i.	Sifat transitif
Kesimpulan: Jadi terbukti bahwa **(-a) + (-b) = -(a + b)**			

Jika Anda sudah memiliki mental argumentasi mengenai proses pembuktian di atas, maka langkah pembuktian tersebut dapat Anda sederhanakan penulisannya. Misalnya, dengan menerapkan sifat penjumlahan pada kesamaan, asosiatif, invers, dan sifat identitas serta sifat komutatif secara mental dan simultan, maka 12 langkah tersebut dapat ditulis lebih ringkas menjadi:

(-a) + (-b) = c

(-a) = c + b

0 = c + (b + a)

-(a + b) = c

Karena **(-a) + (-b) = c** dan **-(a + b) = c,** maka **(-a) + (-b) = -(a + b)**

Untuk membangun pemahaman konseptual Anda mengenai proses pembuktian ini, untuk awal-awal ini sangat disarankan agar Anda menyampaikan pembuktian di atas dengan argumentasi yang rinci dan jelas seperti ditunjukkan pada Tabel 1.1 di atas. Tapi jika Anda merasa sudah terlatih, maka Anda dapat menyederhanakan proses tersebut.

Sekarang Anda sudah memahami bahwa penjumlahan dua bilangan bulat negatif setara dengan bilangan bulat negatif lainnya, yaitu **(-a) + (-b) = -(a + b)**. Selanjutnya bagaimanakah cara memaknai penjumlahan dua bilangan bulat yang satunya adalah bositif dan lainnya adalah negatif, misalnya **a + (-b)** atau **(-a) + b**?

Untuk dapat menyelesaikan masalah ini, akan diperkenalkan definisi mengenai operasi pengurangan dua bilangan bulat. Matematikawan mendefinisikan operasi pengurangan sebagai lawan/invers operasi dari operasi penjumlahan dan dijabarkan sebagai berikut:

Definisi 1.2

Untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b,**

dikatakan **a – b = k** jika dan hanya jika **a = b + k**

Pada **Definisi 1.**2 disebutkan bahwa **a = b + k** dimana **a** dan **b** adalah bilangan bulat. Ini hanya mungkin terjadi jika **k** adalah bilangan bulat. Dengan demikian, operasi pengurangan bilangan bulat bersifat tertutup, yaitu **a – b = k** dengan **k** adalah bilangan bulat.

Dengan memperhatikan definisi operasi pengurangan tersebut, akan ditunjukkan membuktikan penjumlahan dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif.

Pada penjumlahan dua bilangan **a + (-b)**, coba Anda pikirkan apa yang terjadi jika **a** lebih kecil dari **b** atau jika **a** lebih besar dari **b**?

Bukankan jika **a** lebih kecil dari **b** maka **a + (-b)** akan bernilai negatif, sedangkan jika **a** lebih besar dari **b** maka **a + (-b)** akan bernilai positif. Memperhatikan dua kemungkinan tersebut, maka pembuktian penjumlahan **a + (-b)** akan ditinjau dari dua kemungkinan di atas, yaitu jika **a < b** dan jika **a > b**.

Mari kita tinjau kemungkinan yang pertama, yaitu jika **a < b**, bagaimana memaknai **a + (-b)** untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b**?

Menurut sifat urutan bilangan bulat (Postulat 1.3), jika **a < b** berarti ada **c** sedemikian sehingga **a + c = b**. Kemudian, kedua ruas dijumlakan dengan **(-b)**, yaitu **(a + c) + (-b) = b + (-b).** Dengan sifat asosiatif, komutatif, dan invers, persamaan **(a + c) + (-b) = b + (-b)** menjadi **c + (a + (-b)) = 0**. Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan **(-c)** dan dengan sifat invers dan identitas, maka **c + (a + (-b)) = 0** menjadi **a + (-b) = -c**.

Tinjau kembali persamaan **a + c = b** di atas! Dengan definisi pengurangan bilangan bulat, persamaan **a + c = b** dijabarkan menjadi **c = b – a**.

Selanjutnya, untuk mendapatkan makna dari **a + (-b)**, substitusi **c = b – a** ke persamaan **a + (-b) = -c**, sehingga menjadi **a + (-b) = -(b-a)**. Dengan demikian penjumlahan bilangan bulat positif **a** dengan bilangan bulat negatif **b** untuk **a < b** dapat dimaknai sebagai berikut **a + (-b) = -(b – a).**

Contoh 1

a. 3 + (-8) = -(8 – 3) = -5 karena 3 < 8
b. Karena 25 < 32, maka 25 + (-32) = -(32 – 25) = 7

Langkah pembuktian di atas lebih jelasnya dipaparkan pada Tabel 1.2 berikut ini.

Tabel 1.2
a + (-b) = -(b – a) untuk **a < b**

Step	Notasi	Keterangan	Argumentasi
i	**a < b => a + c = b**	**c** adalah sembarang bilangan	Sifat urutan

Step	Notasi	Keterangan	Argumentasi
		bulat	bilangan bulat (Postulat 1.3)
ii	**(a + c) + (-b) = b + (-b)**	Menambahkan **(-b)** pada kedua ruas	Sifat penjumlahan pada kesamaan
iii	**c + (a + (-b)) = 0**	Mengelompokkan **a** dengan **(-b)** dan mengoperasikan **b + (-b)**	Sifat asosiatif dan invers penjumlahan
iv	**a + (-b) = -c**	Menambahkan **(-c)** pada kedua ruas dan mengoperasikan **c** dengan **(-c)** dan 0 dengan **(-c)**	Sifat invers penjumlahan dan identitas
v	**a + c = b ⇔ c = b – c**	Memperhatikan kembali persamaa **a + c = b** pada Step 1 dan definisi pengurangan bilangan bulat.	Definisi pengurangan bilangan bulat.
vi	**a + (-b) = -(b – c)**	Karena **c = b – c** (Step v) dan **a + (-b) = -c** (Step iv), maka **a + (-b) = -(b – c)**	Sifat transitif
Jadi terbukti bahwa **a + (-b) = -(b – c)**			

Anda telah mengetahui bahwa **a + (-b)** = **-(b – c)** jika **a < b**. Lalu, bagaimana memaknai **a + (-b)** jika **a > b**? Untuk masalah ini, silahkan Anda selesaikan sebagai latihan.

Jika Anda melakukannya dengan benar, maka Anda akan mendapatkan kesimpulan bahwa jika **a > b** maka **a + (-b) = a – b**.

E. OPERASI PENGURANGAN BILANGAN BULAT

Sebelumnya difinisi pengurangan diperkenalkan sebagai invers dari operasi penjumlahan, yaitu untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b**, **a – b = k** jika dan hanya jika **a = b + k** (lihat kembali **Definisi 1.**2).

Apakah operasi pengurangan bilangan bulat bersifat tertutup, yaitu apakah **k** pada **a – b = k** adalah bilangan bulat? Jika sebelumnya, Anda telah diperkenalkan bahwa operasi pengurangan dua bilangan bulat bersifat tertutup, maka pada kesempatan kali ini akan ditunjukkan kebenara dari pernyataan tersebut.

Untuk menunjukkan bahwa pengurangan bilangan-bilangan bulat bersifat tertutup, maka harus ditunjukan bahwa selalu ada tunggal bilangan bulat **(a – b)** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**. Dalam hal ini, kita diharuskan untuk menunjukkan dua hal. *Pertama*, akan ditunjukan bahwa bilangan bulat **(a – b)** adalah ada (eksis). *Kedua*, **(a – b)** adalah tunggal.

Berikut akan ditunjukkan eksistensi dari bilangan bulat **(a – b)**. Anggap **k** adalah hasil dari pengurangan **a – b** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b,** yaitu **a – b = k**. Dengan definisi pengurangan, **a = b + k**. Dalam hal ini, akan ditunjukkan bahwa **k** adalah bilangan bulat, yaitu sebagai berikut:

Karena **a – b = k,** maka **a = b + k**	definisi pengurangan
a + (-b) = b + k + (-b)	penjumlahan pada kesamaan
a + (-b) = k	asosiatif, invers, dan identitas

Jadi **k** adalah **a + (-b)**.

Karena **a** dan **(-b)** adalah bilangan-bilangan bulat dan operasi penjumlahan bilangan bulat bersifat tertutup, maka **a + (-b),** yaitu **k** adalah bilangan bulat. Dengan demikian, terbuktilah bahwa bilangan bula **(a – b)** adalah ada (eksis) pada sistem bilangan bulat, yiatu **(a – b) = a + (-b)**.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa bilangan bulat **k** atau **(a – b)** adalah tunggal. Untuk menunjukkan hal ini, **k** terlebih dahulu dianggap tidak tunggal, yaitu **a – b = k** dan juga **a – b = n**. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa **k = n**, yaitu sebagai berikut:

Karena **a – b = k** maka **a = k + b**	(i)
Karena **a – b = n** maka **a = n + b**	(ii)

Dari (i) dan (ii), dengan sifat transitif maka **k + b = n + b**

k + b + (-b) = n + b + (-b)	Penjumlahan pada kesamaan
k + 0 = n + 0	Invers penjumlahan
k = n	Identitas penjumlahan

Karena **k = n** pada **a – b = k** dan **a – b = n**, maka ini menyimpulkan bahwa **k** bersifat tunggal.

Berdasarkan dua pembuktian di atas, maka dapat diyakini bahwa pengurangan bilangan-bilangan bulat memiliki sifat tertutup, yaitu **a – b** adalah bilangan bulat **a + (-b)**.

Fakta ini menunjukkan definisi lainnya untuk pengurangan bilangan bulat, yaitu untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b** maka **a – b = a + (-b)**.

Definisi 1.3

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b** maka operasi **a – b** sama dengan **a + (-b)**, yaitu **a – b = a + (-b)**

Definisi 1.3 menunjukkan bahwa pengurangan bilangan bulat **a** oleh **b** diartikan sebagai penjumlahan bilangan bulat **a** dengan invers penjumlahan dari bilangan bulat **b**, yaitu **a – b = a + (-b)**. Bagiamana dengan pengurangan dua bilangan bilat yang pengurangnya adalah bilangan bulat negatif, yaitu **a – (-b)**? Apakah **a – (-b) = a + b**? Mari tinjau argumentasi berikut ini!

Dianggap **a – (-b)** = **k**. Dengan definisi pengurangan bilangan bulat (**Definisi 1.**2), **a – (-b) = k** jika dan hanya jika **a = k + (-b)**. Persamaan **a = k + (-b)** akan digunakan untuk menelusuri nilai **k**.

a = k + (-b)	
a + b = k + (-b) + b	Penjumlahan pada kesamaan
a + b = k + 0	Invers pernjumlahan
a + b = k	Identitas penjumlahan

Jadi **k = a + b**

Karena **k = a + b** sedangkan sebelumnya **a – (-b)** = **k,** dengan demikian **a – (-b)** dapat dimaknai sebagai **a + b**, yaitu **a – (-b) = a + b**.

Persamaan **a – (-b) = a + b** juga dapat dibuktikan dengan menggunakan Definsi 1.3, yaitu **a – (-b)** dapat dimaknai sebagai menjumlahkan **a** dengan invers penjumlahan dari **(-b)**, yaitu **b**. Sehingga, **a – (-b) = a + b**.

Karena operasi pengurangan dua bilangan bulat tidak bersifat komutatif, yaitu **a – b ≠ b – a**, maka **a – (-b) ≠ (-b) – a**. Akan tetapi dengan strategi yang serupa seperti di atas, Anda juga dapat memberikan makna untuk **(-a) – b** yaitu sebagai berikut:

Dengan menggunakan **Definisi 1.**3, maka **(-a) – b = (-a) + (-b)**. Telah dibuktikan sebelumnya bahwa **(-a) + (-b) = -(a + b)**. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa **(-a) – b = -(a + b)**. Untuk lebih jelasnya, perhatikan langkah pembuktikan berikut ini:

(-a) – b = (-a) + (-b)	**Definisi 1.**3
(-a) – b = -(a + b)	Sifat penjumlahan

Jadi, **(-a) – b = -(a + b)**

____

Pada pembuktikan di atas, sifat yang sebelumnya telah dibuktikan digunakan kembali dalam pembuktian sifat lainnya. Ini menunjukkan bahwa fakta yang telah dibuktikan sebelumnya dapat dijadikan sebagai argumentasi dalam proses pembuktian lainnya. Sehingga, sangat disaran agar Anda tetap mempertimbangkan hasil pada pembuktian-pembuktian sebelumnya sebagai dasar dalam kegiatan pembuktian pernyataan matematika lainnya.

Pada bagian di atas telah ditunjukkan makna dari operasi pengurangan dua bilangan bulat yang kedua-duanya adalah bilangan bulat positif, yaitu **a – b**, atau yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif, yaitu **a – (-b)** atau **(-a) – b**. Lalu, bagaimana dengan pengurangan dua bilangan bulat yang kedua-duanya adalah bilangan bulat negatif? Yaitu bagaimana memberi makna operasi **(-a) – (-b)**?

Dua pendekatan sengaja digunakan untuk menunjukkan makna dari operasi **(-a) – (-b)** agar **Anda** dapat melihat hubungan satu konsep dengan konsep lainnya.

Pertama, operasi **(-a) – (-b)** akan ditelusuri maknanya dengan menggunakan **Definisi 1.**2 dan **Definisi 1.**3, yaitu sebagai berikut:

Dimisalkan **(-a) – (-b) = k** maka **k** adalah bilangan bulat (sifat tertutup pada pengurangan bilangan bulat). Selanjutnya, akan ditunjukkan makna bilangan **k** pada **(-a) – (-b)**. Berdasarkan **Definisi 1.**2, **(-a) – (-b) = k** jika dan hanya jika **(-a) = k + (-b)**. Dengan menjumlahakan kedua ruas dengan bilangan bulat **b**, yaitu **(-a) + b = k + (-b) + b**, kemudian dengan sifat invers penjumlahan dan elemen identitas diperoleh **(-a) + b = k**. Selanjutnya, dengan sifat komutatif **k = b + (-a)**. Dari **Definisi 1.**3 diperoleh **b – a = b + (-a)**. Karena **k = b + (-a)** dan **b – a = b + (-a)**, maka **k = b – a**. Karena sebelumnya **(-a) – (-b) = k** dan **k = b – a**, maka **(-a) – (-b) = b – a**. Jadi, dapat disimpulkan bahwa **(-a) – (-b) = b – a.**

Argumentasi di atas lebih jelasnya dijabarkan sebagai berikut:

Misalkan **(-a) – (-b) = k**	(i)
(-a) – (-b) = k $\Leftrightarrow$ **(-a) = k + (-b)**	**Definisi 1.**2
(-a) + b = k + (-b) + b	Penambahan **b** pada kedua ruas
(-a) + b = k + 0	Sifat invers penjumlahan

(-a) + b = k Sifat identitas

k = b + (-a) Sifat komutatif (ii)

b – a = b + (-a) **Definisi 1.**3 (iii)

Dari (ii) dan (iii), diperoleh **k = b – a** (iv)

Dari (i) dan (iv), diperoleh **(-a) – (-b) = b – a**

Jadi, **(-a) – (-b)** dapat dimaknai sebagai **b – a** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**.

____

Untuk meningkatkan pemahaman Anda mengenai teknik pembuktian sifat-sifat pada operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan memperhatikan aksioma (definisi, postulat, dan sifat) yang telah dipahami sebelumnya, Anda akan ditunjukkan contoh pengembangan argumentasi matematis, yaitu pada masalah menentukan makna operasi **a** – (**(-b)** – c) untuk sembarang bilangan bulat a, b, dan c.

Misalkan **a – ((-b) – c) = k**

Berdasarkan definsi pengurangan, yaitu **Definisi 1.**2, **a – ((-b) – c) = k** jika dan jika hanya **a = k + ((-b) – c)**.

Berdasarkan definisi pengurangan, yaitu **Definisi 1.**3, maka **a = k + ((-b) – c)** dapat ditulis **a = k + ((-b) + (-c))**.

Berdasarkan sifat **(-a) + (-b) = -(a + b)**, maka **a = k + ((-b) + (-c))** dapat ditulis **a = k + (-(b + c))**.

Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan invers penjumlahan dari bilangan **(-(b + c)),** yaitu **(b + c)**, maka **a = k + (-(b + c))** menjadi **a + (b + c) = k + (-(b + c)) + (b + c).**

Karena sifat invers dan sifat identitas pada penjumlahan, maka **a + (b + c) = k + (-(b + c)) + (b + c)** menjadi **a + (b + c) = k**.

Karena sebelumnya **k** adalah **a – ((-b) – c)** dan ditemukan bahwa **k** setara dengan **a + (b + c)**, maka operasi pengurangan **a – ((-b) – c)** dapat dimaknai sebagai operasi penjumlahan **a + (b + c)**, yaitu **a – ((-b) – c) = a + (b + c)**.

Bagaimana jika situasinya sebaliknya, yaitu Anda diminta untuk menunjukkan bahwa **a** – (**(-b)** – c) = **a** + (b + c). Bagaimanakah Anda akan membuktikan kebenaran persamaan tersebut? Untuk itu perhatikan proses pengembangan argumentasi berikut ini:

Diketahui sebelumnya bahwa **a – ((-b) – c) = a + (b + c)**.

Dengan definisi pengurangan (**Definisi 1.**2) $\mathbf{a - ((-b) - c) = a + (b + c)}$ jika dan hanya jika $\mathbf{a = a + (b + c) + ((-b) - c)}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan kebenaran dari persamaan yang terakhir ini, yaitu apakah $\mathbf{a + (b + c) + ((-b) - c) = a}$?

Dengan menggunakan definisi pengurangan (**Definisi 1.**3) maka bilangan $\mathbf{((-b) - c)}$ dapat ditulis menjadi $\mathbf{((-b) + (-c))}$. Sehingga persamaan $\mathbf{a + (b + c) + ((-b) - c)} = \mathbf{a}$ dapat ditulis menjadi $\mathbf{a + (b + c) + ((-b) + (-c)) = a}$.

Dari persamaan yang terakhir ini, kita perhatikan bahwa bilangan **b** saling invers dengan bilangan **(-b)** dan bilangan **c** saling invers dengan bilangan **(-c)**, sehingga berdasarkan sifat invers maka persamaan $\mathbf{a + (b + c) + ((-b) + (-c)) = a}$ menjadi $\mathbf{a + 0 + 0 = a}$. Kemudian dengan sifat identitas penjumlahan, $\mathbf{a + 0 + 0 = a}$ menjadi $\mathbf{a = a}$.

Karena persamaan $\mathbf{a = a}$ adalah pernyataan yang benar, maka terbuktilah kebenaran dari persamaan $\mathbf{a + (b + c) + ((-b) - c) = a}$ yang konsekuensinya menunjuukan bahwa persamaan $\mathbf{a - ((-b) - c) = a + (b + c)}$ adalah benar.

F. OPERASI PERKALIAN BILANGAN BULAT

Pada bagian sebelumnya telah dibicarakan mengenai sifat-sifat yang berlaku pada operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat. Selanjutnya pada bagian ini, kita akan mengeksplorasi mengenai operasi perkalian pada bilangan bulat yang meliputi pemberian makna perkalian dua bilangan bulat negatif, seperti $\mathbf{(-a) \times (-b)}$, dan perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif, seperti $\mathbf{a \times (-b)}$ atau $\mathbf{(-a) \times b}$.

Untuk lebih menyederhanakan proses argumentasi pada pembuktian, berikut diperkenalkan satu sifat yang merupakan penggabungan dari sifat invers penjumlahan dan sifat identitas penjumlahan yang kemudian dikenal dengan istilah kenselasi dari penjumlahan, yaitu sebagai berikut:

Sifat 1.1 Sifat Kenselasi dari Penjumlahan

Jika $\mathbf{a + c = b + c}$ maka $\mathbf{a = b}$ untuk **a**, **b**, dan **c** adalah bilangan bulat

Berikut adalah pembuktian dari kebenaran pernyataan pada Sifat 1.1 di atas.

Diketahui bahwa **a**, **b**, dan **c** adalah bilangan-bilangan bulat, maka sifat-sifat yang berlaku pada bilangan bulat dapat digunakan. Deketahui juga bahwa **a + c = b + c.** Dengan sifat penjumlahan pada kesamaan, kedua ruas dapat ditambahkan dengan bilangan bulat **(-c)**, sehingga persamaan **a + c = b + c** menjadi **a + c + (-c) = b + c + (-c)**.

Karena **c** dan **(-c)** saling invers, maka dengan sifat invers penjumlahan persamaan **a + c + (-c) = b + c + (-c)** menjadi **a + 0 = b + 0**.

Dengan sifat identitas penjumlahan, maka persamaan **a + 0 = b + 0** menjadi **a = b**. Dengan demikian terbukti bahwa **a = b**, jika diketahui bahwa **a + c = b + c**.

Proses pembuktian di atas secara garis besar ditunjukkan sebagai berikut:

a + c = b + c

a + c + (-c) = b + c + (-c)

a + 0 = b + 0

a = b

Jadi, **a = b** jika **a + c = b + c**.

Setelah kita memahami sifat kenselasi dari penjumlahan di atas, selanjutnya kita akan menunjukkan bagaimana memaknai perkalian dua bilangan bulat. Kita terlebih dahulu akan memaknai perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif. Kemudian, kita akan mengkaji makna perkalian dua bilangan bulat yang kedua-duanya adalah bilangan bulat negatif.

Adalah lumrah bagi siswa dan mahasiswa bahwa perkalian dua bilangan yang salah satunya adalah bilangan negatif akan menghasilkan bilangan negatif juga. Akan tetapi ketika mereka diminta untuk memberikan argumentasi mengapa hal ini bisa terjadi, jawaban mereka justru kurang relevan dan tidak memiliki landasan konseptual yang jelas. Misalnya mereka melandaskan argumentasinya pada ketentuan “negatif × positif = negatif” atau “positif × negatif = negatif” seperti yang dipelajari ketika di sekolah.

Pada kesempatan ini, kita akan menelusuri secara konseptual mengapa perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif menghasilkan bilangan bulat negatif. Untuk memulai penelusuran ini, perhatikan pengembangan argumentasi berikut ini!

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**, diketahui bahwa **a × 0 = 0**. Dengan sifat identitas penjumlahan, persamaan **a × 0 = 0** dapat ditulis menjadi **a × (b + (-b)) = 0**.

Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, persamaan **a × (b + (-b)) = 0** dapat ditulis menjadi **(a × b) + (a × (-b)) = 0**.

Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan bilangan **(-(a × b))** pada persamaan **(a × b) + (a × (-b)) = 0** didapatkan **(a × b) + (a × (-b)) + (-(a × b)) = 0 + (-(a × b))**.

Pada persamaan **(a × b) + (a × (-b)) + (-(a × b)) = 0 + (-(a × b)),** terlihat bahwa **(a × b)** dan **(-(a × b))** saling invers. Dengan sifat invers penjumlahan maka persamaan terakhir dapat ditulis menjadi **a × (-b) = 0 + (-(a × b))**.

Selanjutnya dengan sifat identitas penjumlahan, **a × (-b) = 0 + (-(a × b))** dapat ditulis menjadi **a × (-b) = -(a × b)**.

Karena perkalian bilangan bulat bersifat komutatif, maka **a × (-b) = (-b) × a = -(a × b).**

Persamaan yang terakhir ini menunjukkan bahwa perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif menghasilkan bilangan bulat negatif lainnya yaitu **a × (-b) = (-b) × a = -(a × b)** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**.

Argumentasi di atas lebih jelasnya dipaparkan sebagai berikut:

a × 0 = 0	sifat perkalian dengan nol
a × (b + (-b)) = 0	sifat invers penjumlahan
(a × b) + (a × (-b)) = 0	sifat distributif
(a × b) + (a × (-b)) + (-(a × b)) = 0 + (-(a × b))	penjumlahan kesamaan
(a × (-b)) = 0 + (-(a × b))	sifat invers penjumlahan
a × (-b) = -(a × b)	sifat identitas penjumlahan
a × (-b) = (-b) × a = -(a × b)	sifat komutatif perkalian

Persamaan yang terakhir ini menunjukkan bahwa **a × (-b) = (-b) × a = -(a × b)** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b** yaitu perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif menghasilkan bilangan bulat negatif lainnya.

Selain argumentasi di atas pembuktian **a × (-b) = -(a × b)** juga dapat dilakukan dengan memanfaatkan sifat kenselasi, yaitu sebagai berikut:

Dengan sifat perkalian dengan bilangan nol, invers penjumlahan dan distributif perkalian terhadap penjumlahan diperoleh:

0 = a × 0 = a × (b + (-b)) = (a × b) + (a × (-b)) (i)

Berdasarkan sifat invers penjumlahan diperoleh:

0 = (a × b) + (-(a × b)) (ii)

Dari (i) dan (ii) dengan sifat transitif diperoleh:

(a × b) + (a × (-b)) = (a × b) + (-(a × b))

Dengan sifat kenselasi, bilangan **(a × b)** pada kedua ruas dari persamaan **(a × b) + (a × (-b)) = (a × b) + (-(a × b))** dapat dihapus sehingga diperoleh: **(a × (-b)) = (-(a × b))**

Persamaan yang terakhir ini menunjukkan bahwa perkalian bilangan bulat **a** dan -**b**, yaitu **a × (-b) = -(a × b)**.

Jika **a × (-b) = -(a × b)**, bagaimanakah dengan **(-a) × b**? Pada dasarnya baik **a × (-b)** ataupun **(-a) × b** akan menghasilkan **-(a × b)** karena perkalian dua bilangan bulat bersifat komutatif.

Untuk menguatkan pemahaman Anda mengenai pembahasan ini, sebagai latihan disarankan untuk menunjukkan makna dari **(-a) × b**.

Telah ditunjukkan bahwa perkalian dua bilangan bulat yang salah satunya adalah bilangan bulat negatif dengan kesimpulan **a × (-b) = (-a) × b = -(a × b)**. Lalu bagaimana dengan perkalian dua bilangan bulat yang kedua-duanya adalah bilangan bulat negatif? Untuk masalah ini, langkah yang digunakan tidak jauh berbeda dengan langkah sebelumnya. Untuk itu perhatikan pengembangan argumentasi berikut ini!

Kita ketahui bahwa **(-a) × 0 = 0** untuk sembarang bilangan bulat **a**. Dengan sifat invers, persamaan **(-a) × 0 = 0** dapat ditulis menjadi **(-a) × (b + (-b)) = 0** untuk sembarang bilangan bulat **b**.

Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, **(-a) × (b + (-b)) = 0** dapat ditulis menjadi **((-a) × b) + ((-a) × (-b)) = 0**.

Karena diketahui sebelumnya bahwa **(-a) × b) = -(a × b)**, maka persamaan **((-a) × b) + ((-a) × (-b)) = 0** dapat ditulis menjadi **(-(a × b)) + ((-a) × (-b)) = 0**.

Dengan menjumlahkan kedua ruas dengan **(a × b)**, maka persamaan terakhir menjadi **(-(a × b)) + ((-a) × (-b)) + (a × b) = 0 + (a × b)**. Karena **(a ×**

b) dan **(-(a × b))** saling invers maka berdasarkan sifat invers penjumlahan persamaan menjadi **(-a) × (-b) = 0 + (a × b)**.

Kemudian dengan sifat identitas pada penjumlahan, persamaan **(-a) × (-b) = 0 + (a × b)** dapat ditulis menjadi **(-a) × (-b) = a × b**.

Pada persamaan terakhir ini**,** terlihat bahwa perkalian dua bilanan bulat negatif menghasilkan bilangan bulat positif, yaitu **(-a) × (-b) = a × b**.

Argumentasi di atas langkah demi langkah ditunjukkan pada pembuktian berikut ini:

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**, maka:

(-a) × 0 = 0	Sifat perkalian dengan nol
(-a) × (b + (-b)) = 0	Sifat invers penjumlahan
((-a) × b) + ((-a) × (-b)) = 0	Sifat distributif
(-(a × b)) + ((-a) × (-b)) = 0	Sifat **(-a) × b = -(a × b)**
(-(a × b)) + ((-a) × (-b)) + (a × b) = 0 + (a × b)	Menjumlahkan **(a × b)**
(-a) × (-b) = 0 + (a × b)	Sifat invers penjumlahan
(-a) × (-b) = a × b	Sifat identitas

Persamaan yang terakhir ini, yaitu **(-a) × (-b) = a × b**, menunjukkan bahwa perkalian dua bilangan bulat negatif menghasilkan bilangan bulat positif.

Sebagai latihan coba tunjukkan pembuktian bahwa **(-a) × (-b) = a × b** dengan menggunakan sifat kenselasi!

____

Hingga bagian ini, Anda telah ditunjukkan bahwa perkalian dua bilangan bulat dengan kesimpulan bahwa **a × (-b) = (-a) × b = -(a × b)** dan **(-a) × (-b) = a × b**.

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya hasil perkalian dari dua bilangan bulat dapat ditulis tanpa menuliskan kembali tanda operasi perkalian, misalnya bilangan bulat **a × b** dapat ditulis dengan **ab**. Misalnya, **a × (-b) = (-a) × b = -ab** dan **(-a) × (-b) = ab**

Untuk menguatkan pemahaman Anda dalam mengembangkan argumentasi terkait dengan operasi perkalian dua bilangan bulat, akan ditunjukkan makna dari **(-a)(b – c)**. Apakah **(-a)(b – c) = ac – ab**?

Pada proses pembuktian selanjutnya, Anda tidak diberikan keterangan argumentasi yang digunakan. Ini sengaja dilakukan agar Anda memiliki kesempatan untuk memikrikan argumentasi yang digunakan di setiap langkah pembukitan.

Apakah **(-a)(b – c) = ac – ab**? Perhatikan langkah pembuktian berikut ini!

$$\begin{aligned}(-a)(b - c) &= (-a)(b + (-c)) \\ &= (-a)(b) + (-a)(-c) \\ &= -ab + ac \\ &= ac + (-ab) \\ &= ac - ab\end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa **(-a)(b – c) = ac – ab**

G. OPERASI PEMBAGIAN BILANGAN BULAT

Pada bagian ini kita akan membahasa operasi pembagian dua bilangan bulat. Matematikawan mendefinisikan pembagian sebagai lawan operasi/invers dari operasi perkalian, yaitu dikatakan **a : b = c** jika dan hanya jika **a = b × c**. Definisi pembagian ini kemudian dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 1.4: Pembagian Bilangan Bulat

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**, dikatakan **a : b = c** jika dan hanya jika **a = c × b** dengan **b ≠ 0**.

Apakah pembagian suatu bilangan bulat dengan bilangan bulat lainnya akan selalu menghasilkan bilangan bulat? Apakah pada **a : b = c, c** adalah selalu bilangan bulat? Dalam kasus bilangan bulat 5 dibagi oleh bilangan bulat 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan demikian, pembagian dua bilangan bulat tidak bersifat tertutup.

Dalam kasus seperti apa operasi pembagian bilangan bulat bersifat tertutup, yaitu pembagian dua bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat?

Kita tinjau 6 : 3 atau 21 : 7. Kedua operasi pembagian tersebut menghasilkan bilangan bulat, yaitu masing-masing 2 dan 3. Bilangan bulat 6 dibagi oleh bilangan bulat 3 adalah 2 karena 6 = 2 × 3. Ini menunjukkan bahwa 6 adalah kelipatan dari 3 sebanyak 2 kali. Dikatakan bilangan bulat

21 dibagi oleh bilangan bulat 7 adalah 3 karena 21 = 3 × 7. Ini menunjukkan bahwa 21 adalah kelipatan dari 7 sebanyak 3 kali. Hal ini dapat diperumum menjadi **a : b** adalah bilangan bulat **c** jika dan hanya jika **a = c × b**, yaitu jika **a** adalah kelipatan dari **b** sebanyak **c** kali.

Eksplorasi di atas merujuk pada pernyataan bahwa hasil bagi dua bilangan bulat adalah bilangan bulat jika dan hanya jika bilangan bulat yang terbagi adalah kelipatan dari bilangan bulat pembagi. Pernyataan ini dinotasikan sebagai berikut:

Sifat 1.2.

Untuk bilangan bulat **a** dan **b**, dikatakan **a : b** adalah bilangan bulat jika dan hanya jika **a** adalah kelipatan dari **b**.

Operasi pembagian bilangan bulat yang memenuhi Sifat 1.2 dibahas secara khusus dan tersendiri pada materi tentang keterbagian yaitu pada bab berikutnya.

H. RANGKUMAN

Definsi 1.1

Bilangan Bulat atau disimbolkan dengan **Z** adalah himpunan bilangan yang terdiri atas himpunan bilangan asli, bilangan nol, dan himpunan bilangan invers penjumlahan dari bilangan asli, yang dinotasikan sebagai berikut: **Z** = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Postulat 1.1a

Untuk sembarang bilangan bulat a, **b** dan **c,** maka berlaku:

1. Sifat refleksif, yaitu **a = a**
2. Sifat simetris, yaitu jika **a = b**, maka **b = a**
3. Sifat transitif, yaitu jika **a = b** dan **b = c,** maka **a = c**
4. Penjumlahan pada kesamaan, yaitu **a = b** ⇔ **a + c = b + c**

Postulat 1.1b

Untuk sembarang bilangan bulat **a**, **b** dan **c,** dalam operasi biner penjumlahan dan perkalian berlaku sifat-sifat berikut ini:

1. Sifat tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian
   a + b = n, dimana **n** adalah bilangan bulat, yaitu penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat lainnya
   a × b = m, dimana **m** adalah bilangan bulat, yaitu perkalian dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat lainnya
2. Sifat komutatif penjumlahan pada operasi penjumlahan dan perkalian
   a + b = b + a, yaitu **a + b** senilai dengan **b + a**
   a × b = b × a, yaitu **a × b** senilai dengan **b × a**
3. Sifat asosiatif pada operasi penjumlahan dan perkalian
   (a + b) + c = a + (b + c), yaitu menjumlahkan **a** dan **b** terlebih dahulu baru kemudian dengan **c** akan senilai dengan menjumlahkan **b** dan **c** terlebih dahulu baru kemudian dengan a.
   (a × b) × c = a × (b × c), yaitu mengalikan **a** dan **b** terlebih dahulu baru kemudian dengan **c** akan senilai dengan mengalikan **b** dan **c** terlebih dahulu baru kemudian dengan a.
4. Sifat distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan
   a × (b + c) = (a × b) + (a × c)
   (b + c) × a = (b × a) + (c × a)
5. Sifat identitas operasi penjumlahan dan perkalian
   Karena **a + 0 = 0 + a = a**, bilangan 0 adalah elemen identitas penjumlahan, yaitu untuk setiap bilangan bulat **a**, ada dengan tunggal elemen identitas di dalam bilangan bulat, yaitu 0, yang memenuhi **a** + 0 = 0 + **a** = **a**.
   Karena **a** × 1 = 1 × **a** = a, bilangan 1 adalah elemen identitas perkalian, yaitu untuk setiap bilangan bulat **a**, ada dengan tunggal elemen identitas di dalam bilangan bulat, yaitu 1, yang memenuhi **a** × 1 = 1 × **a** adalah **a**

Postulat 1.2

Untuk setiap bilangan bulat a, maka ada dengan tunggal bilangan bulat **(-a)** sedemikian sehingga **a + (-a) = (-a) + a = 0. –a** disebut sebagai invers penjumlahan dari **a** atau sebalikanya dan 0 adalah elemen identitas penjumlahan.

Postulat 1.3

Untuk setiap bilangan bulat **a** dan b, jika **a < b** berarti ada bilangan bulat **c** sedemikan sehingga **a + c = b**

Definisi 1.2

Untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b**, dikatakan **a – b = k** jika dan hanya jika **a = b + k**

Sifat-sifat pada penjumlahan bilangan bulat

Untuk setiap bilangan bulat **a** dan **b**, maka berlaku

(i) **(-a) + (-b) = -(a + b)**
(ii) **a + (-b) = -(b-a)** jika **a < b**
(iii) **a + (-b) = a – b** jika **a > b**

Definisi 1.3

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b** maka **a – b** sama dengan **a** + invers penjumlahan dari b, yaitu **a – b = a + (-b)**

Sifat-sifat pengurangan bilangan bulat

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan b, maka berlaku:

(i) **a – (-b) = a + b**
(ii) **(-a) – b = -(a + b)**
(iii) **(-a) – (-b) = b – a**

Sifat 1.1: Sifat Kenselasi dari Penjumlahan

Untuk **a, b**, dan **c** adalah bilangan-bilangan bulat, jika **a + c = b + c,** maka **a = b**

Sifat-sifat pada operasi perkalian bilangan bulat

Untuk sembarang bilangan bulat **a** dan b, maka berlaku:

(i) **a × (-b) = (-a) × b = -ab**

(ii) **(-a) × (-b) = ab**

Definisi 1.4: Pembagian Bilangan Bulat

Untuk sembarang bilangan bulat a, **b** dan **c,** dikatakan **a : b = c** jika dan hanya jika **a = c × b** dengan syarat **b ≠ 0**.

Sifat 1.2

Untuk bilangan bulat **a** dan **b**, dikatakan **a : b** adalah bilangan bulat jika dan hanya jika **a** adalah kelipatan dari **b**.

I. SOAL LATIHAN

Untuk sembarang bilangan bulat **a, b, c, p, q, r,** dan **s**, buktikan bahwa:

1. $a - (b + a) = -b$
2. $a - (-b) + (-c) = a + b - c$
3. $(-p) - (q + r) = -(p + q + r)$
4. $(p - c) - (b - c) = p - b$
5. $s - (a - b) + (a - s) = b$
6. $(-p) \times (b + c) = -(pb + pc)$
7. $(-a) \times (b - c) = ac - ab$
8. $(p - q) \times r + q \times r = pr$
9. $a \times (b - c) - (a + c) \times b = c(-(a + b))$
10. $a \times (b - c) - b \times (a + c) = (-c)(a + b)$

BAB II

RELASI KETERBAGIAN

Pada bab sebelumnya Anda sudah diperkenalkan sifat-sifat yang berlaku pada himpunan bilangan bulat yang membentuk sistem bilangan bulat pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Anda mungkin sudah mengenal sifat-sifat tersebut sebelumnya, seperti perkalian dua bilangan bulat negatif akan menghasilkan bilangan bulat positif lainnya. Meskipun demikian, sebagai seorang matematikawan Anda dituntut untuk mampu memahami konsep dan prinsip yang mendasari sifat-sifat tersebut dan juga mampu membuktikannya dengan harapan Anda dapat memahami struktur matematika dalam hal ini struktur matematika pada himpunan bilangan bulat. Selain itu, melalui kegiatan pembuktian pada bab sebelumnya Anda diharapkan terlatih dalam mengembangkan argumentasi pembuktian formal dengan menggunakan definisi dan sifat-sifat yang sudah diketahui sebelumnya.

Dengan teknik pembuktian dan pemahaman yang Anda miliki mengenai sistem bilangan bulat sebelumnya, diharapkan dapat Anda gunakan dalam bab ini yaitu mengenai konsep keterbagian. Konsep keterbagian adalah fondasi utama dari ilmu teori bilangan. Setelah mempelajari bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. Mendefinisikan relasi keterbagian,
2. Membuktikan beberapa sifat dan teorema penting yang berkenaan dengan relasi keterbagian, dan
3. Menerapkan konsep, sifat, dan teorema tentang relasi keterbagian dalam penyelesaian masalah.

Konsep tentang keterbagian adalah dasar dari ilmu teori bilangan karena akan memberi dasar untuk pengembangan konsep lainnya dalam ilmu teori bilangan, seperti FPB dan KPK, Modulo, Kekongruenan, Perkongruenan dan sebagainya. Oleh karena itu, sangat disarankan agar Anda bersungguh-sungguh dalam mempelajari materi ini.

Semesta pembicaraan dalam teori bilangan adalah himpunan semua bilangan bulat. Meskipun demikian, ditemuka juga pada pembahasan teori bilangan lainnya yang membatasi semesta pembicaraannya pada himpunan bilangan asli. Untuk mempermudah penulisan, pada pembahasan selanjutnya di buku ini bilangan bulat kita notasikan cukup dengan huruf latin *bold*, seperti **a**, **b**, **c, p, q, r, s**, **k,** dan sebagainya.

A. PENGERTIAN KETERBAGIAN

Sebelumnya Anda telah diperkenalkan mengenai definisi pembagian,yaitu pembagian dedifiniskan sebagai invers dari operasi perkalian, yaitu bilangan bulat **a** dikatakan membagi bilangan bulat **b** dan menghasilkan bilangan **c** jika dan hanya jika **a** merupakan hasil perkalian **b** oleh **c**. Pernyataan ini dapat dinotasikan menjadi $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{b}$.

Lalu, yang menjadi pertanyaanya adalah apakah **c** selalu bilangan bulat? Meski dalam banyak kasus, seperti 8 : 4 = 2 atau 21 : 7 = 3, menunjukkan bahwa **c** adalah bilangan bulat, akan tetapi banyak ditemukan kasus lainnya yang menunjukkan bahwa pembagian bilangan bulat dengan bilangan bulat lainnya tidak menghasilkan bilangan bulat, seperti 10 **:** 3 atau 21 : 4. Ini menunjukkan bahwa **c** pada $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c}$ tidak selalu bilangan bulat. Situasi ini memunculkan pertanyaan lainnya, yaitu dalam situasi seperti apakah **c** adalah bilangan bulat?

Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, terlebih dahulu kita tinjau kembali definisi operasi pembagian bilangan, yaitu $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{b}$ untuk **a** dan **b** adalah sembarang bilangan bulat. Jika **c** adalah bilangan bulat maka **b** harus membagi habis **a**, yaitu **b** membagi **a** tanpa ada sisa pembagian, misalnya 4 membagi habis 12, yaitu 3, dan tidak ada sisa pembagian. Dalam hal ini **c,** yaitu bilangan 3, adalah bilangan bulat. Lain halnya jika **b** tidak habis membagi **a** maka **c** bukanlah bilangan bulat, misalnya 5 tidak habis membagi 12 karena akan ada sisa pembagian, yaitu 2, oleh karena itu 12 : 5 tidak menghasilkan bilangan bulat lainnya.

Dalam teori bilangan, konsep habis membagi ini kemudian dikenal dengan istilah **Relasi Keterbagian**. Relasi ini didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 : Relasi Keterbagian

Dikatakan bilangan bulat **a** dengan **a** ≠ 0 membagi habis bilangan bulat **b**, dinotasikan dengan **a|b**, jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikan sehingga **ka = b**, yaitu:

a|b ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **b** dan **a** ≠ 0.

Berdasarkan definisi di atas, notasi **a|b** menunjukkan bahwa bilangan bulat **a** membagi habis bilangan bulat **b**. Tapi, jika bilangan bulat **a** tidak habis membagi bilangan bulat **b**, maka pernyataan ini dapat dinotasikan dengan **a∤b**.

Perhatikan beberapa contoh pernyataan matematika berikut ini!

2|14 karena ada bilangan bulat 7 sedemikian sehingga 7 × 2 = 14.

6|78 karena ada bilangan bulat 13 sedemikian sehingga 6 × 13 = 78.

Apakah 17|493 ? Karena 17 × 29 = 493 maka benar bahwa 17|493.

Apa yang dapat Anda simpulkan hubungannya dengan konsep keterbagian ketika menemukan fakta bahwa 23 × 12 = 276? 12 × 23 = 276 menunjukkan bahwa 12|276 karena ada bilangan bulat 23 sehingga 23 × 12 = 276. Selain itu dapat disimpulkan juga bahwa 23|276 karena ada bilangan built 12 sedemikian sehingga 12 × 23 = 276.

4 ∤ 26 karena tidak ada bilangan bulat **k** yang memenuhi sedemikian sehingga **k** × 4 = 26.

Apakah 8|138 ? Karena tidak ada bilangan bulat **k** yang memenuhi persamaan **k** × 8 = 138. Maka, 8 ∤ 138.

Pernyataan-pernyataan di atas menunjukkan kepada Anda sejumlah contoh pernyataan matematika yang menunjukkan relasi keterbagian yaitu menjelaskan bilangan-bilangan bulat yang habis membagi dan bilangan bulat yang tidak habis membagi bilangan bulat lainnya.

Mari kita tinjua kembali kembali definisi relasi keterbagian, yaitu bilangan bulat **a** membagi habis bilangan bulat **b**, dinotasikan dengan **a|b**, jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikan sehingga **ka = b**. Kita tinjau persamaan **ka = b**. Persamaan ini memberikan makna bahwa bilangan bulat **b** didapatkan dengan cara mengalikan (melipatgandakan) bilangan bulat **a** sebesar **k** kali. Ini menunjukkan bahwa **b** adalah kelipatan dari **a** sebesar **k** kali. Jadi, jika **a|b** maka **b** adalah kelipatan dari **a**, misalnya jika 3|21 maka 21 adalah kelipatan dari 3, yaitu 7 × 3 = 21. Pernyataan ini kemudian dinyatakan dalam sifat relasi keterbagian berikut ini:

Sifat 2.1 : **Sifat Relasi Keterbagian**

Jik **a|b**, maka **b** adalah kelipatan dari **a**.

Kita tinjau kembali definisi dari relasi keterbagian, yaitu **a|b** ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **B.** Apakah bilangan bulat **k** adalah tunggal? yaitu apakah bilangan bulat **k** adalah satu-satunya bilangan bulat yang memenuhi relasi keterbagian **a|b** ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **b** ? Ini adalah pertanyaan yang krusial karena jika **k** tidak tunggal maka kita diharuskan untuk menganalisis relasi keterbagian dari berbagai nilai **k** yang memenuhi. Sebelum kita dapat menunjukkan apakah **k** tunggal atau tidak, kita tinjau terlebih dahulu sifat perkalian pada kesamaan dan sifat kenselasi pada operasi perkalian:

Sifat 2.2 : Sifat perkalian pada kesamaan (i) dan sifat kenselasi (ii)

(i) Jika **a = b**, maka **am = bm** untuk sembarang bilangan real **m**

(ii) Jika **am = bm,** maka **a = b** dengan **m ≠ 0.**

Bukti:

(i) Dengan sifat refleksif, **am** = **am.** Substitusi **a = b** pada salah satu ruas dari persamaan **am** = **am** sehingga menjadi **am = bm**.

(ii) Misalkan **n** adalah invers perkalian dari **m**, maka dengan sifat (i) persamaan **am = bm** dapat dinyatakan menjadi **amn = bmn**. Karena **n** adalah invers perkalian dari **m** dan **m ≠ 0**, maka persamaan **amn = bmn** menjadi **a × 1 = b × 1.** Dengan sifat identits perkalian, persamaan **a.1 = b.1** menjadi **a = b**.

Dengan menggunakan sifat-sifat di atas, akan ditinjau ketunggalan dari **k** pada **a|b** ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **B.** Tetapi sebelumnya mari kita tinjau eksistensi dari **k** pada **a|b** ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **b** jika memperhatikan nilai **a** dan **b**!

Kasus yang pertama adalah jika **a = 0** dan **b** ≠ 0, apakah **k** eksis, yaitu apakah ada nilai **k** yang memenuhi? Untuk menjawab pertanyaan ini kita perlu menunjukkan apakah ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga 0|**b** untuk **b** ≠ 0. Kita selidiki bahwa jika 0|**b** maka **k**.0 = **b**. Persamaan **k**.0 = **b** dengan **b** ≠ 0 tidak memiliki nilai **k** yang memenuhi. Dengan demikian, **k** tidak terdefinisi pada relasi keterbagian **a|b** ⇔ **ka = b** jika **a** = 0 dan **b** ≠ 0.

Kasus kedua adalah jika **a** = 0 dan **b** = 0, apakah **k** pada relasi keterbagian **a|b** ⇔ **ka = b** eksis? Ini berarti kita akan selidiki apakah **0|0** ? Berdasarkan definisi relasi keterbagian **0|0** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian **k.0 = 0.** Ada tak hingga bilangan bulat **k** yang memenuhi persamaan **k.0 = 0.** Dengan demikian, jika **a** = 0 dan **b** = 0, maka terdapat tak hingga bilangan bulat **k** yang memenuhi relasi keterbagian **a|b** ⇔ **ka = b**. Ini menunjukkan bahwa **k** dalam kasus ini tidak tunggal, akan tetapi ada tak hingga **k** yang memenuhi relasi keterbagian tersebut.

Dua kasus di atas menunjukkan eksistensi dari **k,** yaitu tak terdefinisi atau tak hingga. Meskipun demikian dua kasus di atas bukanlah pembicaraan kita pada konsep keterbagian ini karena kedua kasus tersebut bertentangan dengan definisi relasi keterbagian pada definsi 2.1 di atas, yaitu **a** ≠ 0. Oleh karena itu, kita tertarik pada pembuktian ketunggalan **k** yang memenuhi pengertian relasi ketebagian yang sesuai dengan **Definisi 2.**1.

Akan dibuktikan bahwa **k** pada **a|b** ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **b** dan **a ≠ 0** adalah tunggal. Untuk membuktikan ketunggalan **k** ini, kita terlebih dahulu mengandaikan bahwa **k** tidak tunggal dan kemudian akan dibuktikan bahwa pengandaian itu tidak benar. Dengan demikian **k** berarti tunggal. Mari kita mulai! Andaikan **k** tidak tunggal, yaitu terdapat $\mathbf{k_1}$ dan $\mathbf{k_2}$ yang memenuhi **ka = b** dimana $\mathbf{k_1} \neq \mathbf{k_2}$ maka $\mathbf{k_1 a = b}$ dan $\mathbf{k_2 a = b}$. Karena $\mathbf{k_1 a = b}$ dan $\mathbf{k_2 a = b}$, maka dengan sifat transitif $\mathbf{k_1 a = b}$ dan $\mathbf{k_2 a = b}$ menjadi $\mathbf{k_1 a = k_2 a}$. Dengan sifat kenselasi pada perkalian terhadap **a** dan **a ≠ 0,** maka $\mathbf{k_1 a = k_2 a}$ menjadi $\mathbf{k_1 = k_2}$. Ini bertentangan dengan pengandaian bahwa $\mathbf{k_1} \neq \mathbf{k_2}$, yaitu **k** tidak tunggal. Dengan demikian **k** tunggal.

Argumentasi di atas lebih singkatnya dipaparkan sebagai berikut:

$k_1a = b$ dan $k_2a = b$ memenuhi $a|b$

$k_1a = b$ (i)

$k_2a = b$ (ii)

Dari (i) dan (ii),

$k_1a = k_2a$ (sifat transitif)

$k_1 = k_2$ (sifat kenselasi)

Jadi, nilai k pada a|b ⇔ ka = b untuk k ∈ b dan a ≠ 0 adalah tunggal.

Untuk mempermudah kita dalam penyebutan elemen-elemen pada konsep relasi keterbagian ini, kita akan perkenalkan sejumlah istilah-istilah penting. Pertama, istilah ‘membagi habis’ cukup kita katakan dengan istilah ‘membagi’, misalnya pernyataan a|b cukup dibaca dengan ‘a membagi b’. Istilah-istilah lainnya yang memiliki arti yang serupa dengan a|b antara lain: a adalah faktor dari b, a adalah pembagi b, atau a kelipatan b.

Kedua, pada relasi keterbagian a|b ⇔ ka = b, maka k disebut hasil bagi *(kosien)* b oleh a atau dapat juga dinyatakan dengan k adalah faktor b komplemen a. Misalnya pada relasi keterbagian 2|10, maka 5 adalah hasil bagi *(kosien)* 10 oleh 2 atau 2 adalah komplemen dari 5 dan 5 adalah faktor dari 10 pada 2|10

B. TEOREMA-TEOREMA TENTANG RELASI KETERBAGIAN

Pada bagian ini kita akan menganalisis kebenaran dari teorema-teorema dasar dalam relasi keterbagian sebagai dasar untuk memahami teori bilangan lebih jauh lagi.

Pertama, mari kita tinjau fakta bahwa **p|q**. Menurut **Definisi 2.**1, **p|q** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sehingga **kp = q.** Dengan sifat perkalian pada kesamaan, kita dapat mengalikan kedua ruas dengan sembarang bilangan bulat **m**, sehingga **kp = q** menjadi **kpm = qm**. Dengan sifat komutatif dan asosiatif, persamaan yang terakhir dapat disusun menjadi **(km) p = qm.** Karena **k** dan **m** adalah bilangan bulat maka **km** adalah bilangan bulat. Dengan demikian, persamaan **(km) p = qm** berdasarkan **Definisi 2.**1 menunjukkan bahwa **p** membagi **qm**, yaitu **p|qm**. Jadi, kita dapat menyimpulkan bahwa jika **p|q** maka **p|qm** untuk **p, q, m** sembarang bilangan bulat. Kesimpulan ini dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 2.1 :

Jika **p|q** maka **p|qm**

Kedua, mari kita tinjau fakta bahwa **p|q** dan **p|r**. Jika demikian apakah **p|(q + r)** ? Dengan **Definisi 2.**1, karena **p|q** maka ada **k** sehingga kp = **q** dan karena **p|**r maka ada j sehingga jp = **r.** Selanjutnya kita jumlahkan **q** dengan **r,** sehingga **q** + **r** = kp + jp. Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, maka **q + r = kp + jp** dapat dinyatakan menjadi **q + r = (k + j) p**. Karena **k + j** adalah bilangan bulat, maka persamaan **q + r = (k + j) p** ini menunjukkan bahwa **p** membagi **q + r** atau dinotasikan dengan **p|q + r.** Dengan ini dapat disimpulkan bahwa jika **p|q** dan **p|r** maka **p|(q + r).**

Jika **q** dikurangi dengan **r,** maka diperoleh **q – r = kp – jp** atau dapat ditulis **q – r = kp + (-jp)** (definisi pengurangan bilangan bulat). Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, persamaa **q – r = kp + (-jp)** dapat ditulis menjadi **q – r =** (**k + (-j)) p** atau **q – r =** (**k – j) p**. Karena (**k – j)** adalah bilangan bulat, maka persamaan **q – r =** (**k – j) p** menunjukkan bahwa **p|(q – r).** Pernyataan bahwa **p|(q + r)** dan **p|(q – r)** jika **p|q** dan **p|r** dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 2.2 :

Jika **p|q** dan **p|r** maka **p|(q + r)** dan **p|(q – r)**

Selanjutnya, mari kita tinjau **Teorema 2.**1 dan 2.2 secara bersamaan. Jika $\mathbf{p|q_1}$ dan $\mathbf{p|q_2}$, berdasarkan **Teorema 2.**1 maka $\mathbf{p|q_1m_1}$ dan $\mathbf{p|q_2m_2}$ untuk sembarang bilangan bulat $\mathbf{m_1}$ dan $\mathbf{m_2}$. Karena $\mathbf{p|q_1m_1}$ dan $\mathbf{p|q_2m_2}$, maka berdasarkan **Teorema 2.**2 $\mathbf{p|(q_1m_1 + q_2m_2)}$. Fakta ini dinyatakan dengan teorema berikut ini:

Teorema 2.3 : Sifat Linearitas

Jika $\mathbf{p|q_1}$ dan $\mathbf{p|q_2}$ maka $\mathbf{p|(q_1m_1 + q_2m_2)}$

Sifat linearitas pada **Teorema 2.**3 dapat diperluas untuk kasus yang lebih umum, yaitu jika $\mathbf{p|q_1}$, $\mathbf{p|q_2, p|q3, \ldots\ p|qn}$ dengan **Teorema 2.**3 maka $\mathbf{p|(q_1m_1 + q_2m_2 + q_3m_3 + \ldots + q_nm_n)}$ untuk sembarang bilangan bulat $\mathbf{m_1}$**,** $\mathbf{m_2}$**,** $\mathbf{m_3}$**, …** $\mathbf{m_n}$**.** Perluasan dari **Teorema 2.**3 ini dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 2.4 :

Jika $\mathbf{p|q_1}$, $\mathbf{p|q_{2,}\ p|q3, \ldots\ p|qn}$ maka $\mathbf{p|(q_1m_1 + q_2m_2 + q_3m_3 + \ldots + q_nm_n)}$ untuk

---

sembarang bilangan bulat $\mathbf{m_1, m_2, m_3, \ldots m_n}$.

Contoh penggunaan dari **Teorema 2.**4 adalah pada kasus berikut ini: diketahui bahwa $2|x$. Apakah $2|\ x^2 + 3x + 18$? Karena $2|x$ berdasarkan **Teorema 2.**1 maka $2|x.x$, yaitu $2|x^2$, dan $2|3x$. Sudah jelas bahwa $2|18$ karena ada bilangan bulat 9 sedemikian sehingga $2.9 = 18$. Dengan demikian, karena $2|x^2$, $2|3x$, dan $2|18$ berdasarkan **Teorema 2.**4 maka $2|x^2 + 3x + 18$.

Contoh lainnya misalnya diketahui persamaan berikut ini $21x - 12y + 99 = 2z$. Apakah $3|2z$?

Karena $3|21$ maka $3|21x$. Selain itu $3|12$ maka $3|12y$. Di samping itu, sudah jelas bahwa $3|99$. Dengan demikian, karena $3|21x$, $3|12y$, dan $3|99$ maka $3|21x - 12y + 99$. Karena $21x - 12y + 99 = 2z$, maka $3|2z$.

Untuk menguatkan pemahaman Anda mengenai konsep relasi keterbagian ini, sebagai latihan coba Anda tunjukan bahwa $5|4w$ jika $10x^2 + 45y - 5z = w$!

Teorema lainnya yang memegang peranan penting dalam konsep relasi keterbagian adalah teorema yang mendeskripsikan sifat transitif pada relasi keterbagian yang dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 2.5 : Sifat Transitif

Jika $\mathbf{p|q}$ dan $\mathbf{q|r}$ maka $\mathbf{p|r}$

Bukti dari teorema ini dipaparkan sebagai berikut: Berdasarkan **Definisi 2.**1, karena $\mathbf{p|q}$ maka ada bilangan bulat **m** sehingga pm = **q** dan karena **q|**r maka ada bilangan bulat n sehingga qn = **r.** Selanjutnya, kita substitusikan **q** = pm ke qn = **r,** sehingga menjadi pmn = **r** atau **p** (mn) = **r.** Karena mn adalah bilangan bulat, maka persamaan **p** (mn) = **r** menunjukkan bahwa **p|**r.

Jika $\mathbf{a|b}$ dan **b|**a, apakah dapat kita simpulkan bahwa **a** = **b** ?

a|**b** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **m** sehingga **am = b**

b|**a** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **n** sehingga **bn = a**

Kita substitusikan **b** = **am** pada **a** = **bn**, maka kita dapatkan **a** = **amn** atau dapat ditulis **a** = **a** (**mn**). Karena berdasarkan definisi relasi keterbagian (**Definisi 2.**1) yaitu **a** ≠ 0, maka nilai **mn** yang memenuhi persamaan **a** = **a** (**mn**) adalah **mn** = 1. Jika **mn** = 1, maka akan ada dua kemungkinan, yaitu pertama **m** = **n** = 1, atau kemungkinan kedua **m** = **n** = (-1). Untuk kemungkinan pertama, yaitu **m** = **n** = 1, maka **am** = **b** menjadi a.1 = **b** sehingga **a** = **b**. Untuk kemungkinan kedua, yaitu **m** = **n** = (-1), maka **a** = **bn** menjadi **a** = **b**.(-1) sehingga **a** = -**b**. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jika **a|b** dan **b|a** maka akan ada dua kemungkinan **a** = **b** atau **a** = -**b**.

Teorema 2.6

Jika **p|q** dan **q|p**, maka **p = q** atau **p = -q**

Jika pada **p|q** kita batasi **p** dan **q** pada bilangan bulat positif saja, maka mudah dimengerti bahwa **p = q** atau **p < q.** Untuk memahami hal ini, mari kita tinjau pernyataan **p|q,** yaitu jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **pk** = **q.** Maka **k** ≥ 1 untuk memastikan **p** adalah bilangan bulat positif. Jika **k** = 1, maka p.1 = **q** yang berarti **p** = **q.** Akan tetapi, jika **k** > 1 maka **q** merupakan kelipatan dari **p** sebesar **k** kali yang berarti **p** < **q.** Kejadian menunjukkan bahwa jika **p|q** dengan **p** dan **q** adalah bilangan bulat positif maka **p** = **q** atau **p** < **q.**

Teorema 2.7

Jika **p|q** dengan **p** dan **q** adalah bilangan bulat positif maka **p** = **q** atau **p** < **q**

Untuk setiap bilangan bulat m, apakah m**p|m**q jika diketahui bahwa **p|q**? Untuk menyelidiki dan menemukan jawaban atas pertanyaan di atas, kita tinjau kembali definisi dari relasi keterbagian, yaitu jika **p|q** maka ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **kp** = **q.** Dengan sifat perkalian pada kesamaan, kita kalikan kedua ruas dengan bilangan bulat **m** sehingga menjadi **kpm = qm**. Persamaan yang terakhir ini menunjukkan bahwa **pm|qm**. Dengan demikian, jika **p|q**, maka **pm|qm** untuk sembarang bilangan bulat **m**.

Teorema 2.8

Jika **p|q**, maka **pm|qm** untuk sembarang bilangan bulat **m**

Jika **Teorema 2.**8 menunjukkan bahwa jika **p|q**, maka **pm|qm** untuk sembarang bilangan bulat **m**. Bagaimana dengan sebaliknya, yaitu jika **pm|qm**, apakah **p|q** ?

Mari kita selidiki! Jika dikatakan **pm|qm** maka berdasarkan definisi relasi keterbagian akan ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **pmk = qm**. Dengan sifat kenselasi pada perkalian, **pmk = qm** dapat ditulis menjadi **pk** = **q** (kenselasi **m** dari kedua ruas). Persamaan yang terakhir, yaitu **pk = q,** menunjukkan bahwa **p|q**. Tapi bagaimana jika **m = 0** pada **pm|qm**, maka **pm|qm** menjadi **p.0|q.0**, yaitu **0|0**. Pada invesitagasi sebelumnya, relasi keterbagian yang dinyatakan dengan **0|0** memiliki tak hingga bilangan bulat **k** yang memenuhi 0.**k =** 0. Selain itu, situasi ini bertentangan dengan definisi relasi keterbagian yang membatasi nilai komplemen dari **k,** yaitu adalah bilangan bulat yang tidak sama dengan 0, yaitu pada relasi keterbagian **p|q** maka **p** ≠ 0. Jadi dapat kita simpulkan bahwa jika p**m|q**m, maka **p|q** dengan **m** ≠ 0.

Teorema 2.9

Jika **pm|qm** dengan **m** ≠ 0, maka **p|q**

Selanjutnya mari kita selidiki apakah **a|**a, 1|a, dan **a|**0. Apakah **a|a** ? Jika benar bahwa **a|**a, maka akan ada bilangan bulat **k** yang memenuhi ak = a. Bilangan bulat yang memenuhi persamaan ak = **a** adalah **k** = 1 karena a.1 = a. Dengan demikian **a|**a.

Apakah 1|**a** ? Dengan pendekatan yang sama, kita akan menyelidiki apakah ada bilangan bulat **k** yang memenuhi 1.k = **a** jika 1|a. Bilangan bulat **k** = **a** memenuhi persamaan 1.k = a. Dengan demikian 1|a.

Masalah yang ketiga adalah apakah **a|**0. Berdasarkan definisi, **a|**0 jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga a.k = 0. Bilangan bulat **k** yang memenuhi persamaan tersebut adalah **k** = 0. Dengan demikian, **a|**0.

Ketiga fakta di atas selanjutnya kita himpun dalam **Teorema 2.**10 sebagai berikut:

Teorema 2.10

Untuk sembarang bilangan bulat a, maka:

(i) $\mathbf{a}|\mathbf{a}$ untuk $\mathbf{a} \neq 0$

(ii) $\mathbf{a}|0$ untuk $\mathbf{a} \neq 0$

(iii) $1|\mathbf{a}$

Pada bagian sebelumnya kita sudah menyelidiki kebenaran dari teorema-teorema yang berlaku pada relasi keterbagian. Untuk menguatkan pemahaman Anda mengenai teorema-teorema pada konsep relasi keterbagian tersebut, kita akan mencoba membuktikan sejumlah permasalahan relasi keterbagian berikut ini:

1. Jika $\mathbf{a|b}$, apakah $\mathbf{a|(-b)}$?
2. Jika $\mathbf{a}|2\mathbf{m}$, apakah $\mathbf{a}|4(\mathbf{m}^2 - 3\mathbf{m} + 2\mathbf{a})$?
3. Apakah hasil kali dua bilangan bulat berurutan selalu terbagi oleh 2?

Masalah pada nomor 1 ingin menunjukkan bahwa jika **a** habis membagi **b** maka **a** juga akan habis membagi invers penjumlahan dari **b**, yaitu **(-b)**. Untuk menyelesaikan masalah ini, pertama-tama kita tinjau fakta yang sudah ada yaitu $\mathbf{a|b}$. Kemudian dengan **Teorema 2.**1, maka $\mathbf{a}|b.(-1)$, yaitu $\mathbf{a|(-b)}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\mathbf{a|(-b)}$ jika $\mathbf{a|b}$.

Sedangkan masalah pada nomor 2 lebih kompleks dari masalah sebelumnya. Fakta yang sudah diketahui adalah **a** membagi 2**m**. Kemudian akan ditunjukkan apakah **a** akan membagi $4(\mathbf{m}^2 - 3\mathbf{m} + 2\mathbf{a})$. Untuk menyelesaikan masalah ini, ada baiknya jika kita tinjau terlebih dahulu bentuk aljabar $4(\mathbf{m}^2 - 3\mathbf{m} + 2a)$. Bentuk aljabar ini dapat dijabarkan menjadi $4m^2 - 12m + 8a$. Jika kita berhasil menunjukkan bahwa **a** dapat membagi habis masing-masing suku pada bentuk aljabar $4m^2 - 12m + 8a$, maka menurut **Teorema 2.**3 atau 2.4, **a** akan habis membagi $4m^2 - 12m + 8a$, yaitu $\mathbf{a}|4m^2 - 12m + 8a$. Dengan demikian terbuktilah bahwa $\mathbf{a}|4(m^2 - 3m + 2a)$. Mari kita mulai penyelidikan ini! Informasi yang sudah kita miliki adalah $\mathbf{a}|2m$. Dengan **Teorema 2.**1 maka $\mathbf{a}|2m \times 2m$, yaitu $\mathbf{a}|4m^2$ (i). Dengan fakta bahwa $\mathbf{a}|4m^2$, maka salah satu suku pada $4m^2 - 12m + 8a$, yaitu $4m^2$ terbagi oleh a. Selanjutnya kita akan tunjukan bahwa **a** juga membagi 12m. Karena **a|**2m, dengan **Teorema 2.**1 maka **a|**2m × 6, yaitu **a|**12m (ii). Selanjutnya kita akan tunjukan bahwa **a** juga membagi 8a. Menurut **Teorema 2.**10, sudah jelas bahwa **a**|**a**. Dengan ini **a**|**a** × 8, yaitu **a|**8a (iii). Dari relasi keterbagian (i), (ii), dan (iii) dan menurut **Teorema 2.**2, 2.3, dan 2.4 maka **a|**$4m^2 - 12m + 8a$ karena **a|**$4m^2$, **a**|12m, dan **a**|8a. Dengan demikian karena **a|**$4m^2 - 12m + 8a$ maka terbukti bahwa **a|**$4(m^2 - 3m + 2a)$. Argumentasi di atas lebih jelasnya dijabarkan sebagai berikut:

Dengan **Teorema 2.**1 dan 2.10, dapat dijabarkan bahwa:

a|2m => **a|**2m × 2m => $2|4m^2$ (i)

a|2m => **a|**2m × 6 => $2|12m^2$ (ii)

a|**a** => **a|a** × 8 => 2|8a (iii)

Karena (i), (ii), dan (iii) dan dengan **Teorema 2.**2, 2.3, dan 2.4, maka:

$a|4m^2 - 12m + 8a$ (iv)

Karena $4m^2 - 12m + 8a = 4(m^2 - 3m + 2a)$ dank arena (iv) maka:

$a|4(m^2 - 3m + 2a)$

Selanjutnya, kita akan selidiki masalah nomor 3, yaitu apakah hasil kali dua bilangan bulat berurutan selalu terbagi oleh 2. Bukti yang paling sederhana untuk masalah ini didasarkan pada fakta bahwa hasil kali dua bilangan bulat berurutan akan selalu menghasilkan bilangan genap dan kita ketahui bahwa bilangan genap (yaitu 2n untuk sembarang bilangan asli n) selalu habis dibagi oleh 2, yaitu 2|2n untuk sembarang bilangan asli n. Meski argumentasi ini sederhana dan benar, tetapi argumentasi ini tidak mudah ditunjukkan kebenarannya dengan menggunakan notasi. Oleh karena itu, matematikawan mengembangkan berbagai cara untuk membuktikan pernyataan ini, dan salah satunya ditunjukkan pada argumentasi berikut ini:

Kita akan selidiki kasus ini terlebih dahulu pada himpunan bilangan asli. Pada himpunan bilangan asli, dua bilangan yang berurutan salah satunya pasti adalah bilangan ganjil (2n – 1 untuk bilangan asli n) dan yang satunya lagi adalah bilangan genap (2n untuk bilangan asli n). Dengan demikian perkalian dua bilangan asli yang berurutan akan selalu melibatkan perkalian antara bilangan genap dengan bilangan ganjil, yaitu 2n × (2n – 1). Jika dijabarkan lebih lanjut maka $2n \times (2n - 1) = 4n^2 - 2n = 2(n^2 - n)$.

Menurut **Teorema 2.**1, karena $2|2$, maka $2|2(n^2 - n)$. Dengan demikian, $2|2(n^2 - n)$ menunjukkan bahwa perkalian dua bilangan asli yang berurutan akan selalu habis dibagi oleh 2. Jika kita perlaus ke himpunan bilangan bulat, apakah kejadian ini juga akan berlaku? Kita ketahui bahwa invers penjumlahan dari himpunan bilangan asli adalah himpunan bilangan bulat negatif dan sebelumnya pada soal nomor 1 kita sudah membuktikan bahwa jika **a|b** maka **a|(-b)** yaitu jika **a** membagi **b** maka **a** membagi invers penjumlahan dari **b**. Dengan argumentasi yang sama, jika sebelumnya kita sudah membuktikan bahwa 2 habis membagi perkalian dua bilangan asli berurutan sedangkan kita ketahui bahwa invers penjumlahan dari himpunan bilangan asli adalah himpunan bilangan bulat negatif, maka 2 habis membagi dua bilangan bulat negatif yang berurutan, yaitu jika $2|2(n^2 - n)$ maka $2|-2(n^2 - n)$. Pernyataan $2|2(n^2 - n)$ menunjukkan bahwa 2 habis membagi himpunan bilangan bulat positip yang berurutan (i), sedangkan $2|-2(n^2 - n)$ menunjukkan bahwa 2 habis membagi himpunan bilangan bulat negatif yang berurutan (ii). Kita belum menunjukkan untuk perkalian dua bilangan bulat yang berurutan yang melibatkan bilangan 0, yaitu $(-1) \times 0$ dan 0×1, yang kedua-duanya sama dengan 0 karena $(-1) \times 0 = 0 \times 1 = 0$. Jadi kita cukup menunjukkan apakah $2|0$. Berdasarkan **Teorema 2.**10, maka $2|0$ (iii). Dengan demikian, berdasarkan pernyataan (i), (ii), dan (iii), dapat disimpulkan bahwa 2 habis membagi perkalian dua bilangan bulat yang berurutan.

Anda mungkin memiliki cara pembuktian yang lebih sederhana untuk menunjukkan kebenaran pertanyaan bahwa 2 akan selalu habis membagi hasil kali dari dua bilangan bulat yang berurutan. Disarankan agar Anda mencoba mengembangkan argumentasi yang sedikit berbeda sebagai media untuk meningkatkan pemahaman Anda mengenai materi relasi keterbagian ini.

C. RANGKUMAN

Definisi 2.1 : Relasi Keterbagian

Dikatakan bilangan bulat **a** dengan **a** $\neq 0$ membagi habis bilangan bulat

b, dinotasikan dengan **a|b**, jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikan sehingga **ka = b**, yaitu:
a|b ⇔ **ka = b** untuk **k** ∈ **b** dan **a** ≠ 0.

Sifat 2.1 : Sifat Relasi Keterbagian
Jik **a|b**, maka **b** adalah kelipatan dari **a**.

Sifat 2.2 : Sifat perkalian pada kesamaan (i) dan sifat kenselasi (ii)
(i) Jika **a = b**, maka **am = bm** untuk sembarang bilangan real **m**
(ii) Jika **am = bm,** maka **a = b** dengan **m ≠ 0.**

Istilah Penting:
Pada relasi keterbagian **a|b** ⇔ **ka = b**, maka **k** disebut hasil bagi *(kosien)* **b** oleh **a** atau dapat juga dinyatakan dengan **k** adalah faktor **b** komplemen **a**.

Teorema 2.1 :
Jika **p|q** maka **p|qm**

Teorema 2.2 :
Jika **p|q** dan **p|r** maka **p|(q + r)** dan **p|(q – r)**

Teorema 2.3 : Sifat Linearitas
Jika $p|q_1$ dan $p|q_2$ maka $p|(q_1m_1 + q_2m_2)$

Teorema 2.4 :
Jika $p|q_1$, $p|q_{2,\ p|q3,\ \ldots\ p|qn}$ maka $p|(q_1m_1 + q_2m_2 + q_3m_3 + \ldots + q_nm_n)$ untuk sembarang bilangan bulat $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$.

Teorema 2.5 : Sifat Transitif
Jika **p|q** dan **q|r** maka **p|r**

Teorema 2.6
Jika **p|q** dan **q|p**, maka **p = q** atau **p = -q**

Teorema 2.7

Jika **p|q** dengan **p** dan **q** adalah bilangan bulat positif maka **p** = **q** atau **p** < q

Teorema 2.8

Jika **p|q**, maka **pm|qm** untuk sembarang bilangan bulat **m**

Teorema 2.9

Jika **pm|qm** dengan **m** ≠ 0, maka **p|q**

Teorema 2.10

Untuk sembarang bilangan bulat **a**, maka:

(i) **a**|**a** untuk **a** ≠ 0

(ii) **a**|0 untuk **a** ≠ 0

(iii) 1|**a**

D. SOAL LATIHAN

Tunjukkan dengan argumentasi yang jelas, tentukan apakah pernyataan-pertanyaan berikut ini benar atau salah!

1. Jika **p|m**, maka **p|**(**m** – **p**)
2. Jika **p|mn**, maka **p|m**
3. Jika **p|**(**m** – **n**)^2, maka **p|m**^{3} – **m**^{2}**n** – **mn**^{2} + **n**^{3}
4. Jika **p|m** + **n**, maka **p|n**
5. Jika **p|**(**m** – 1), maka **p|**(**m**^{4} – 1)

Berikan argumentasi yang jelas dan mendasar untuk pertanyaan-pertanyaan berikut ini:

1. Buktikan bahwa jika **k|p** dan **m|n**, maka **km|pn** !
2. Apakah jika **f|g** dan **g|(m + n)** maka **f|(m + n)** ?
3. Tunjukkan bahwa **2|(m^2 – m)** !
4. Buktikan bahwa hasil kali 3 buah bilangan bulat yang berurutan habis dibagi oleh 3 !
5. Tunjukkan bahwa 2 tidak habis membagi selisih pangkat tiga dari dua bilangan bulat yang berurutan.

BAB III

FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

A. PENGERTIAN FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR

Pembicaraan mengenai faktor persekutuan terbesar dalam pembahasan kali ini merujuk faktor persekutuan terbesar pada bilangan bulat. Faktor Persekutuan Terbesar kemudian disingkat dengan FPB dalam literatur asing dikenal dengan istilah *The Greatest Common Divisor (GCD)*, yaitu merujuk pada bilangan pembagi bersama yang terbesar.

Untuk dapat memahami pengertian dari faktor persekutuan terbesar, maka paling tidak Anda harus memahami minimal dua konsep yang mendasarinya, yaitu faktor bilangan dan faktor persekutuan.

1. Faktor Bilangan

Apakah yang dimaksud dengan faktor? Anda mungkin sering mendengar istilah faktor. Faktor secara harfiah dapat diartikan sebagai unsur. Makna serupa dapat digunakan dalam pembicaraan pada sistem bilangan bulat, yaitu faktor dimaknai sebagai unsur pembentuk dari suatu bilangan bulat. Misalnya, faktor dari bilangan bulat 30 adalah bilangan bulat 5. Hal ini dikarenakan bilangan bulat 5 dapat dijadikan sebagai unsur pembentuk dari bilangan bulat 30, yaitu 6 × 5.Begitu pula dengan bilangan bulat 4 adalah faktor dari 12 karena 3 × 4 adalah 12. Faktor bilangan pada umumnya didefinisikan sebagai berikut *"Fector of a number or an expression is a number or quantity that when multiplied with another produces a given number or expression"*[1] Definisi ini menyatakan bahwa faktor dari suatu bilangan adalah suatu bilangan atau kuanititas yang jika dikalikan dengan bilangan/kuantitas lainnya maka akan menghasilkan bilangan tersebut. Faktor dalam hal ini sangat erat kaitannya dengan

[1] Google translator for factor in mathematics

operasi perkalian, dimana bilangan bulat **p** dikatakan adalah faktor dari bilangan bulat **q** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian **k × p = q.** Dengan definisi ini, bilangan bulat **k** di saat yang bersamaan adalah faktor dari **q** karena **p × k = q.** Berdasarkan uraian di atas, maka faktor dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1a Faktor Bilangan Bulat

Bilangan bulat **p** dikatakan faktor bilangan bulat **q** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **k × p = q.**

Apakah ada hubungan antaran faktor bilangan dengan relasi keterbagian? **Definisi 3.**1 juga menunjukkan bahwa jika **p** adalah faktor dari **q** maka **p** akan habis membagi **q** karena ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **k × p = q.** Jika ditinjau kembali **Definisi 2.**1, yaitu mengenai relasi keterbagian, maka **Definisi 3.**1 dan **Definisi 2.**1 mengimplikasikan makna yang tidak jauh berbeda, yaitu **p** akan habis membagi **q** karena ada bilangan bulat sedemikian sehingga **k × p = q.**

Memperhatikan definisi dari faktor bilangan bulat, maka jika **p** adalah faktor dari **q,** maka dapat disimpulkan bahwa:

a) **k × p = q** untuk sembarang bilangan bulat **k**
b) **p** akan habis membagi **q**
c) **q** adalah kelipatan dari **p**
d) **p** adalah pembagi habis dari **q**

Jika dihubungkan dengan relasi keterbagian, maka bilangan bulat p adalah faktor dari bilangan bulat **q** jika dan hanya jika **p | q.**

Definisi 3.1b Faktor Bilangan Bulat

Bilangan bulat p dikatakan faktor dari bilangan bulat q jika dan hanya jika p | **q.**

Sampai saat ini, apakah Anda sudah memahami apa itu faktor bilangan? Untuk menguatkan pemahaman mengenai faktor bilangan, mari selidiki faktor dari bilangan bulat 15! Faktor dari bilangan 15 antara lain 1, 3, 5, 15, -1, -3, -5, dan -10 karena 1|15, 3|15, 5|15, 15|15,-1|15, -3|15, -5|15, dan -15|15.

Pada pembahasan kali ini, akan diabaikan faktor bulat negatif dari suatu bilangan bulat. Mengapa? Alasannya akan dijelaskan pada waktunya nanti. Jadi, faktor bulat positif dari bilangan bulat 15 adalah 1, 3, 5, dan 15. Untuk menghemat penulisan, pada pembahasan selanjutnya istilah fakor bilangan merujuk pada faktor bulat positif dari suatu bilangan bulat. Misalnya, faktor dari 12 adalah 1, 3, 4, 6, dan 12; atau faktor dari -10 adalah 1, 2, dan 10.

2. Faktor Persekutuan

Sebelumnya sudah dibahas mengenai faktor, selanjutnya akan dikaji apa yang dimaksud dengan faktor persekutuan. Istilah ‘persekutuan’ berarti bersama-sama. Dengan demikian, bersekutu melibatkan lebih dari dua objek/bilangan yang memiliki kepentingan bersama atau karakteristik yang sama. Oleh karena itu, faktor persekutuan akan melibatkan dua bilangan yang memiliki kepentingan bersama. Untuk memahami apa yang dimaksud dengan faktor persekutuan, perhatikan contoh ilustrasi berikut ini:

Faktor dari bilangan 16 adalah 1, 2, 4, 8, dan 16
Faktor dari bilangan 20 adalah 1, 2, 4, 5, 10, 20

Bilangan 1, 2 dan 4 adalah faktor baik untuk bilangan 16 maupun 20 atau dapat dikatakan bahwa 1, 2 dan 4 adalah faktor bersama dari 16 dan 20. Dalam hal ini 16 dan 20 memiliki kepentingan bersama terhadap 1, 2 dan 4 yaitu faktor-faktor bersama. Oleh karena itu, 1, 2 dan 4 dikatakan sebagai faktor-faktor persekutuan dari 16 dan 20.

Apakah faktor persekutuan dari 12 dan 15? Faktor dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12, sedangkan faktor dari 15 adalah 1, 3, 5, dan 15. Dengan demikian faktor-faktor persekutuan dari 12 dan 15 adalah 1 dan 3. Dalam bahasa relasi keterbagian, dikatakan 1 dan 3 adalah faktor-faktor persekutuan dari 12 dan 15 jika dan hanya jika $1|12$ dan $1|15$, selain itu $3|12$ dan $3|15$.

Jadi, secara umum, pengertian faktor persekutuan dari dua bilangan bulat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.2a Faktor Persekutuan

Untuk bilangan bulat **m** dan **n**, dikatakan **f** adalah faktor persekutuan

---

dari **m** dan **n** jika dan hanya jika **f | m** dan **f | n**.

Definisi 3.2a juga dapat diperluas untuk **k** buah bilangan bulat, yaitu:

Definisi 3.2b Faktor Persekutuan

Untuk bilangan bulat $\mathbf{m_1, m_2, m_3, \ldots}$ dan $\mathbf{m_k}$, dikatakan **f** adalah faktor persekutuan dari $\mathbf{m_1, m_2, m_3, \ldots}$ dan $\mathbf{m_k}$ jika dan hanya jika $\mathbf{f \mid m_1, f \mid m_2, f \mid m_3, \ldots}$ dan $\mathbf{f \mid m_k}$,

Misalnya, tentukan faktor persekutuan dari bilangan bulat 6, (-9), (-12) dan 15!

Faktor dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6.
Faktor dari (-9) adalah 1, 3, dan 9.
Faktor dari (-12) adalah 1, 2, 3, 4, 6 dan 12.
Faktor dari 15 adalah 1, 3, 5 dan 15.

Dengan demikian, faktor persekutuan dari 6, 9, (-12) dan 15 adalah 1 dan 3.

Apakah ada dari sepasang bilangan bulat yang tidak memiliki faktor persekutuan? Yaitu, untuk sepasang bilangan bulat **m** dan **n**, apakah mungkin untuk tidak memiliki faktor persekutuan? Pertanyaan lainnya adalah apakah ada sepasang bilangan bulat yang memiliki faktor persekutuan yang tak hingga? Mari selidiki dua jenis pertanyaan ini.

Pertanyaan pertama, apakah ada dari sepasang bilangan bulat yang tidak memiliki faktor persekutuan? Karena bilangan 1 adalah faktor dari sembarang bilangan bulat, maka bilangan 1 akan selalu menjadi faktor persekutuan dari sepasang bilangan bulat. Dengan demikian, faktor persekutuan dari dua bilangan bulat akan selalu ada, paling tidak bilangan 1. Ini artinya bahwa faktor persekutuan dari dua bilangan bulat adalah tidak pernah kosong. Fakta ini mengantarkan kita pada **Teorema 3.**1 berikut ini:

Teorema 3.1 Eksistensi Faktor Persekutuan

Karena **1|p** untuk sembarang bilangan bulat **p,** maka 1 akan selalu menjadi fakor untuk setiap bilangan bulat. Dengan demikian, 1 akan selalu menjadi faktor persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat.

Pertanyaan kedua, apakah ada sepasang bilangan bulat yang memiliki faktor persekutuan yang tak hingga? Karena bilangan 0 adalah bilangan bulat yang selalu dapat dibagi oleh sembarang bilangan bulat, maka untuk sembarang bilangan bulat **m** dan **n** dengan **m = n = 0** maka jumlah bilangan yang merupakan faktor persekutuan dari **m** dan **n** adalah tak hingga karena semua himpunan bilangan bulat dapat menjadi faktor persekutuan dari **m** dan **n**.

Lalu, dalam situasi seperti apakah faktor persekutuan dari dua bilangan bulat memiliki faktor persekutuan berhingga? Coba selidiki apakah faktor persekutuan dari **m** dan **n** berhingga jika salah satunya bukan bilangan 0? Karena setiap bilangan selain 0 akan memiliki faktor berhingga, maka faktor persekutuan dari dua bilangan bulat yang salah satunya bukan bilangan 0 akan memiliki faktor persekutuan yang berhingga.

3. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Kita sudah bahas sebelumnya bahwa faktor persekutuan dari sejumlah bilangan bulat akan selalu ada. Selain itu, diketahui bahwa faktor persekutuan dari sejumlah bilangan bulat yang salah satunya bukan bilangan 0 maka akan memiliki faktor persekutuan yang berhingga. Jika berhingga, maka faktor persekutuan yang manakah yang merupakan bilangan yang nilainya terbesar? Pertanyaan inilah yang mendasari kajian tentang faktor persekutuan terbesar yang kemudian disingkat dengan FPB (Faktor Persekutuan Terbesar).

FPB adalah bilangan bulat terbesar yang merupakan faktor persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat. Misalnya, berapakah FPB dari 20 dan 24? Faktor dari 20 adalah 1, 2, 4, 5, 10, dan 20, sedangkan faktor dari 24 adalah 1, 2, 4, 6, 12, dan 24. Jadi, faktor persekutuan dari 20 dan 24 adalah 1, 2, dan 4. Bilangan yang terbesar di antara 1, 2 dan 4 adalah 4, maka faktor persekutuan yang terbesar atau FPB dari 20 dan 24 adalah 4. Berapakah faktor persekutuan dari (-9) dan 15?

Berdasarkan ilustrasi di atas, dapat disimpulkan secara umum bahwa jika diketahui **d** dan **f** adalah faktor persekutuan dari bilangan bulat **p** dan

q, dimana berdasarkan **Definisi 3.**2 akibatnya **d|p** dan **d|q** dan juga **f|p** dan **f|q**, maka **d** dikatakan FPB dari **p** dan **q** jika **d ≥ f**. Jadi, ada dua syarat **d** dikatakan FPB dari **p** dan **q,** yaitu: *pertama,* **d** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **q**; *kedua*, jika ada faktor persekutuan lainnya dari **p** dan **q,** sebut saja **f**, maka **f ≤ d**. Dua syarat bilangan yang dapat menjadi FPB ini kemudian menjadi definisi untuk FPB.

Definisi 3.3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Untuk bilangan bulat **p** dan **q** yang salah satunya bukan bilangan nol, **d** dikatakan FPB dari **p** dan **q** jika **d** memenuhi:

(i) **d|p** dan **d|q** (syarat faktor persekutuan), dan
(ii) Jika ada **f** yang memenuhi **f|p** dan **f|q**, maka **f ≤ d** (syarat bilangan yang terbesar).

Misalnya, faktor persekutuan dari bilangan 4 dan (-6) adalah 1 dan 2 karena 1|4 dan 1|6 serta 2|4 dan 2|6.Karena 1 ≤ 2, maka 2 adalah FPB dari 4 dan 6.

FPB dari dua bilangan bulat **p** dan **q** dapat ditulis dengan notasi **(p, q)**. Misalnya (4, (-6)) = 2 berarti FPB dari 4 dan (-6) adalah 2. Contoh lainnya, FPB dari 20 dan 24 adalah 4 dapat ditulis menjadi (20, 24) = 4.

Jika dua bilangan bulat **p** dan **q** memiliki FPB sama dengan 1, yaitu **(p, q) = 1**, maka dengan ini **p** dan **q** dikatakan saling prima atau **p** prima relatif terhadap **q.** Misalnya, bilangan 4 dan 7 saling prima karena (4, 7) = 1.

Definisi 3.4 Saling Prima

Jika **(p, q) = 1**, maka **p** dan **q** dikatakan saling prima atau **p** prima relatif terhadap **q.**

B. SIFAT-SIFAT PADA FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Diketahui bahwa (20, 24) = 4. Berdasarkan **Definisi 3.**3, 4|20 dan 4|24, yaitu 20 : 4 = 5 dan 24 : 4 = 6. Selidiki bahwa (5, 6) = 1. Kejadian di atas menunjukkan bahwa jika FPB dari 20 dan 24, yaitu 4, membagi masing-masing 20 dan 24 akan menghasilkan bilangan 5 dan 6. Maka, FPB dari 5 dan 6 adalah 1. Apakah ini kebetulan saja? Coba kita selidiki pada kasus lainnya, misalnya ((-9), 15) = 3 maka ((-9) : 3, 15 : 3), yaitu ((-3), 5) = 1. Contoh lainnya adalah (12, 40) = 4, maka (12 : 4, 40 : 4) = (3, 10) = 1. Jika demikian, apakah jika **(p, q) = d** maka **(p:d, q:d) = 1**?

Pada kasus di atas, jika **(p, q) = d** maka kita misalkan **(p:d, q:d) = c**. Akan kita tunjukkan apakah **c = 1** atau tidak. Dari **(p:d, q:d) = c,** berdasarkan **Teorema 3.**1 (eksistensi faktor persekutuan) maka **c = 1** atau **c > 1**, yaitu **c ≥ 1~(i)**. Selain itu, dari **(p:d, q:d) = c** berdasarkan definisi faktor persekutuan terbesarmaka **c|p:d** dan **c|q:d**. Selanjutnya, berdasarkan definisi keterbagian, **c|p:d** menjadi **mc = p:d**; dan **c|q:d** menjadi **nc = q:d** untuk sembarang bilangan bulat **m** dan **n**. Berdasarkan definisi pembagian, maka **mc = p:d** menjadi **mcd = p,** dan **nc = q:d** menjadi **ncd = q.** Dari **mcd = p** dan **ncd = q,** berdasarkan definisi faktor persekutuan maka **cd** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **q.** Karena sebelumnya kita ketahui bahwa **d** adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari **p** dan **q** serta pada saat yang bersamaan **cd** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **q,** dengan demikian **cd ≤ d**. Karena **d** adalah suatu bilangan bulat positifi, **cd ≤ d** mengakibatkan **c ≤ 1 ~(ii)**. Dari (i) dan (ii), yaitu karena **c ≥ 1** dan juga **c ≤ 1**, maka **c = 1**. Dengan demikian, terbukti bahwa **(p:d, q:d)** = 1 jika **(p, q) = d**.

Teorema 3.2

Untuk sembarang bilangan bulat **p** dan **q,** jika **(p, q) = d** maka **(p:d, q:d) = 1.**

Pada contoh masalah penghitungan FPB di atas, Anda dihadapkan dengan pencarian FPB dari bilangan-bilangan yang relatif kecil, misalnya FPB dari 20 dan 24, 4 dan (-6), (-9) dan 15 dan sebagainya. Bagaimana jika dihadapkan dengan pencarian FPB untuk pasangan bilangan-bilangan yang relatif besar, misalnya FPB dari bilangan 13.456.280 8.890.246? Apakah Anda akan pertama-tama menjabarkan faktor-faktor dari kedua bilangan tersebut, kemudian menentukan faktor-faktor yang bersekutu dan mencari faktor persekutuan yang terbesar? Meski cara tersebut benar dan mungkin untuk dilakukan. Akan tetapi cenderung tidak efisien dan kurang valid karena sering terjadi kekeliruan dalam proses penjabarannya.

Lalu, apakah ada cara yang lebih efisien dan valid dalam menentukan FPB dari pasangan bilangan yang relatif besar? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, marilah kita tinjau penjelasan berikut ini:

Diperkenalkan suatu teorema yang kemudian dikenal dengan istilah *Algoritma Keterbagian*. Teorema ini menyatakan bahwa untuk setiap dua buah bilangan bulat positif, maka kedua bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam suatu persamaan linear yang terdiri atas kedua bilangan tersebut, bilangan hasil bagi salah satu bilangan tersebut terhadap bilangan lainnya, dan bilangan yang merupakan sisa pembagian tersebut. Teorema ini dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 3.3 Algoritma Keterbagian

Untuk **p** dan **q** adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat **k** dan **r** yang memenuhi **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p**.

Misalnya, untuk sepasang bilangan bulat 12 dan 38, maka dengan Torema 3.3 ada bilangan bulat 3 dan 2 sedemikian sehingga memenuhi persamaan 38 = 3×12 + 2 dimana bilangan bulat 2 memenuhi pertidaksamaan 0 ≤ 2 < 12. Dalam hal ini, bilangan 3 disebut hasil bagi dan 2 adalah sisa pembagian 38 oleh 12. Dengan demikian, bilangan bulat **k** dan **r** pada **Teorema 3.**3 di atas masing-masing disebut sebagai *hasil bagi* dan *sisa pembagian* **q** oleh **p**.

Untuk lebih memahami **Teorema 3.**3, coba tentukan bentuk Algoritma Keterbagian untuk setiap pasangan bilangan bulat positif dari: 21 dan 52; 76 dan 18; dan 28 dan 4!

Untuk pasangan bilangan 21 dan 52, ada bilangan bulat 2 dan 10 sedemikian sehingga 52 = 2×21 + 10 dengan 10 memenuhi pertidaksamaan 0 ≤ 10 < 21.

Untuk pasangan bilangan 76 dan 18, ada bilangan bulat 4 dan 4 sedemikian sehingga 76 = 4×18 + 4 dengan 0 ≤ 4 < 18.

Untuk pasangan bilangan 28 dan 4, ada bilangan bulat 7 dan 0 sedemikian sehingga 28 = 7×4 + 0 dengan 0 ≤ 0 < 18.

Bukti kebenaran untuk **Teorema 3.**3 di atas dijabarkan berikut ini:

Untuk bilangang bulat positif **p** dan **q,** maka disusunlah himpunan bilangan **S**, yaitu **S = {q – kp | k** $\in$**B}**. Maka, **S** dapat dijabarkan sebagai berikut:

S = ..., (q – (-3p)), (q –(-2p)), (q –(-1p)), q, (q – 1p), (q – 2p), (q – 3p), ...

Dipilih bilangan tak negatif terkecil dari **S** dan diberi nama **r.** Jadi, **r ≥ 0**. Karena **r** merupakan anggota dari **S**, maka memenuhi bentuk **q – kp** untuk sembarang bilangan bulat **k**. Jadi, **r = q – kp** dengan **r ≥ 0**. Karena **r = q – kp**, maka **q = kp + r** dengan **r ≥ 0** atau **0 ≤ r.**

Persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r** telah menunjukan sebagian dari **Teorema 3.**3. Satu hal yang belum ditunjukkan adalah bahwa **r < p**. Untuk menunjukkan bahwa **r < p,** kita akan menggunakan pembuktian kontradiksi, yaitu sebagai berikut:

Andaikan **r** $\nless$ **p**. Akibatnya **r** akan sama dengan atau lebih besar dari **p,** yang dapat dinotasikan dengan persamaan **r = p + m** dengan **m ≥ 0**. Dari **r = p + m**, kita dapatkan **m = r – p**. Karena sebelumnya kita ketahui bahwa **r = q – kp**, maka **m = (q – kp) – p**. Dengan manipulasi operasi pada bilangan bulat didapatkan **m = q – (kp + p) = q – (k + 1)p**. Jadi **m = q – (k + 1)p**. Dengan demikian **m** adalah anggota dari himpunan bilangan **S**. Menimbang **m** adalah anggota dari **S** dan **m ≥ 0**, yaitu **0 ≤ m**, maka hal ini menunjukkan bahwa **m** adalah bilangan tak negatif terkecil pada himpunan **S**. Hal ini bertentangan dengan fakta sebelumnya bahwa **r** adalah bilangan tak negatif terkecil pada **S**. Dengan demikian, pengandaian **r** $\nless$ **p** adalah tidak benar. Akibatnya **r < p**.

Dari persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r** dan dari pembuktian bahwa **r < p,** maka benar bahwa **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p**.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa **k** dan **r** adalah pasangan bilangan bulat yang tunggal yang memenuhi persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r< p**. Perhatikan proses pembuktian berikut ini:

Anggap **k** dan **r** tidak tunggal, yaitu ada dua pasang bilangan atau lebih yang memenuhi persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r< p**. Misalkan, pasangan bilangan k_1 dan r_1 dan pasangan bilangan k_2 dan r_2 memenuhi persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r< p**.Maka:

$q = k_1p + r_1$ dengan $0 \leq r_1 < p$ (i)

$q = k_2p + r_2$ dengan $0 \leq r_2 < p$ (ii)

Karena kedua persamaan tersebut sama dengan **q,** maka:

$\mathbf{k_1p + r_1 = k_2p + r_2}$

atau dapat ditulis menjadi:

$\mathbf{0 = (k_2p + r_2) - (k_1p + r_1)}$

$\mathbf{0 = (k_2 - k_1)p + (r_2 - r_1)}$

$\mathbf{(r_2 - r_1) = -(k_2 - k_1)p}$ (iii)

Perhatikan persamaan (iii), karena $\mathbf{p \mid -(k_2 - k_1)p}$ maka $\mathbf{p \mid (r_2 - r_1)}$. Selain itu, Karena $\mathbf{0 \le r_1 < p}$ dan $\mathbf{0 \le r_2 < p}$, maka $\mathbf{-p < (r_2 - r_1) < p}$.

Menimbang fakta bahwa $\mathbf{p \mid (r_2 - r_1)}$ sedangkan $\mathbf{-p < (r_2 - r_1) < p}$, yaitu $\mathbf{(r_2 - r_1)}$ adalah kelipatan dari **p** dan $\mathbf{(r_2 - r_1)}$ pada saat yang bersamaan berada di antara **–p** dan **p,** maka ini hanya mungkin terjadi jika $\mathbf{(r_2 - r_1) = 0}$. Karena $\mathbf{(r_2 - r_1) = 0}$, maka akibatnya $\mathbf{r_2 = r_1}$.

Selanjutnya, karena $\mathbf{(r_2 - r_1) = 0}$, maka pada persamaan (iii) $\mathbf{-(k_2 - k_1)p = 0}$ atau $\mathbf{(k_2 - k_1)(-p) = 0}$. Karena $\mathbf{(-p) \neq 0}$, maka akibatnya $\mathbf{(k_2 - k_1)}$ pasti sama dengan **0**, yaitu $\mathbf{(k_2 - k_1) = 0}$. Dengan demikian, karena $\mathbf{(k_2 - k_1) = 0}$ maka $\mathbf{k_2 = k_1}$.

Menimbang $\mathbf{r_2 = r_1}$ dan $\mathbf{k_2 = k_1}$, terbukti bahwa **k** dan **r** adalah sepasang bilangan yang tunggal yang memenuhi persamaan $\mathbf{q = kp + r}$ dengan $\mathbf{0 \le r < p}$.

Teorema 3.3 membatasi nilai **p** dan **q** hanya bilangan-bilangan bulat positif. Akan tetapi teorema tersebut juga akan tetap benar jika **p** dan **q** adalah sembarang bilangan bulat asal saja nilai **r** memenuhi pertidaksamaan $\mathbf{0 \le r < |p|}$. Sehingga **Teorema 3.**3 dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

Teorema 3.4 Implikasi 1dari**Teorema 3.**3

Untuk **p** dan **q** adalah sembarang bilangan-bilangan bulat, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat **k** dan **r** yang memenuhi $\mathbf{q = kp + r}$ dengan $\mathbf{0 \le r < |p|}$.

Pembuktian **Teorema 3.**4 tidak jauh berbeda dengan pembuktian pada **Teorema 3.**3. Untuk hal ini, kami persilahkan kepada Anda untuk menunjukkannya sebagai latihan.

Setelah kita buktikan kebenaran dari **Teorema 3.**3 dan juga **Teorema 3.**4, kita akan menggunakan torema ini sebagai dasar untuk menunjukkan

FPB dari bilangan-bilangan bulat yang relatif besar, misalnya FPB dari 123.445.212 dan 33.248.890. Sebelum itu, tinjau invesigasi berikut ini:

Contoh 3.1

Untuk p = 6 dan q = 27, maka ada bilangan bulat k = 4 dan **r** = 3 yang memenuhi persamaan pada **Teorema 3.**3, **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p,** yaitu 27 = 4×6 + 3 dengan 0 ≤ 3 < 6. Diketahui bahwa FPB dari 6 dan 27, yaitu (6, 27) = 3. Sedangkan, FPB dari 6 dan 3, yaitu (6, 3) = 3. Dari contoh ini, nampak bahwa (6, 27) = (6, 3) = 3. Apakah ini suatu kebetulan?

Contoh 3.2

Pada kasus lainnya, yaitu untuk p = 24 dan q = 52, maka ada bilangan bulat k = 2 dan **r** = 4 yang memenuhi persamaan 52 = 2×24 + 4 dengan 0 ≤ 4 < 24. Maka, FPB dari 24 dan 52, yaitu (24, 52) = 4, sedangkan FPB dari 24 dan 4, yaitu (24, 4) = 4. Lagi ditemukan bahwa (24, 52) = (24, 4) = 4. Apakah ini suatu kebetulan juga? Coba anda selidiki pada pasangan-pasangan bilangan bulat lainnya!

Untuk sembarang pasangan bilangan bulat lainnya, Anda akan selalu menemukan kejadian yang serupa, yaitu pada sembarang bilangan bulat **p** dan **q** yang memenuhi persamaan pada algortima keterbagian, yaitu **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p,** maka **(p, q) = (p, r),** yaitu FPB dari bilangan bulat **p** dan **q** akan sama dengan FPB dari bilangan bulat **p** dan **r.** Pernyataan ini dinyatakan pada **Teorema 3.**5 berikut ini:

Teorema 3.5 Implikasi 2 dari**Teorema 3.**3

Pada Algoritma Keterbagian, jika bilangan bulat positif **p** dan **q** memenuhi persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p** maka **(p, q) = (p, r).**

Untuk membuktikan teorema di atas, perhatikan argumentasi berikut ini:

Misalkan **(p, q) = d dan (p, r) = c**. Akan ditunjukkan bahwa **d = c**. Karena **(p, q) = d** maka **d|p** dan **d|q**. Sedangkan diketahui bahwa **q = kp + r** yang akibatnya **q – kp = r.** Karena **d|p** dan **d|q**, berdasarkan **Teorema 2.**2 maka **d|r**. Kemudian, karena **d|p** dan **d|r** maka berdasarkan definisi faktor persekutuan, **d** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **r.** Karena **(p, r) = c** dan **d** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **r,** maka berdasarkan definisi FPB berarti **c ≥ d**.

Karena **(p, r) = c** maka **c|p** dan **c|r**. Dengan demikian **c** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **r.** Tinjau kembali persamaan **q = kp + r.** Karena **c|p** dan **c|r** maka **c|q**. Karena **c|q** dan **c|p** maka **c** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **q.** Kita ketahui sebelumnya bahwa **(p, q) = d**. Berdasarkan definisi FPB, maka **c ≤ d**.

Karena **c ≥ d** dan **c ≤ d,** berarti **c = d**. Dengan demikian, karena **d = c** maka **(p, q) = (p, r).** Maka terbukti bahwa FPB dari **p** dan **q** sama dengan FPB dari **p** dan **r.**

Jika ditinjau kembali persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p** maka pasangan bilangan **p** dan **q** akan lebih kecil dari pasangan bilangan **p** dan **r.** Ini berimplikasi kepada pencarian FPB dari pasangan bilangan **p** dan **r** akan lebih mudah daripada pencarian FPB dari pasangan bilangan **p** dan **q.** Misalnya, perhatikan kembali Contoh 3.1, pencarian FPB 6 dan 3 relatif lebih gampang daripada mencari FPB dari 6 dan 27. Dengan demikian pencarian FPB dari 6 dan 27 dapat ditemukan dengan pencarian FPB dari bilangan yang lebih sederhana yaitu 6 dan 3 karena berdasarkan **Teorema 3.**5 kedua pasanga bilangan tersebut memiliki FPB yang sama.

Contoh 3.3

Mari tinjau contoh berikut ini untuk memahami kemudahan yang ditawarkan oleh algoritma keterbagian dalam mencari FPB dari dua bilangan bulat. Coba tentukan FPB dari 216 dan 188 !

Dengan menggunakan algoritma keterbagian, maka 216 = 1×188 + 28. Menurut **Teorema 3.**5, maka (216, 188) = (188, 28). Lalu berapakah (188, 28)? (188, 28) ditentukan dengan melakukan algoritma keterbagian sekali lagi, yaitu 188 = 6×28 + 20. Dengan demikian, (188, 28) = (28, 20). Apakah Anda sudah mengetahui (28, 20)? Jika belum, Anda dapat mengulangi algortima keterbagian sekali lagi pada bilangan 28 dan 20, yaitu 28 = 1 × 20 + 8. Akibatnya (28, 20) = (20, 8). Apakah Anda mengetahui (20, 8)? Jika Anda belum yakin, maka Anda dapat melanjutkan menggunakan algoritma keterbagian lagi pada bilangan 20 dan 8, yaitu 20 = 2×8 + 4, maka (20, 8) = (8, 4). Jelas bahwa (8, 4) = 4. Dengan demikian, karena (20, 8) = (8, 4) dan (8, 4) = 4, maka (20, 8) = 4. Selanjutnya, karena (28, 20) = (20, 8), (188, 28) = (28, 20), (216, 188) = (188, 28) dan (20, 8) = 4, maka (216, 188) = 4. Dari argumentasi di atas maka FPB dari 216 dan 188 adalah 4. Untuk lebih memudahkan dalam memahami argumentasi di atas, perhatikan paparan berikut ini:

Dengan algoritma keterbagian dan **Teorema 3.**5, maka:

$216 = 1 \times 188 + 28$	akibatnya	$(216, 188) = (188, 28)$
$188 = 6 \times 28 + 20$	akibatnya	$(188, 28) = (28, 20)$
$28 = 1 \times 20 + 8$	akibatnya	$(28, 20) = (20, 8)$
$20 = 2 \times 8 + 4$	akibatnya	$(20, 8) = (8, 4) = 4$.

Menimbang $(216, 188) = (188, 28) = (28, 20) = (20, 8) = (8, 4)$

Maka $(216, 188) = 4$.

Perlu diperhatikan bahwa jika algoritma keterbagian diteruskan untuk pasangan bilangan 8 dan 4, maka Anda akan memperoleh sisa pembagian sama dengan 0, yaitu: $8 = 2 \times 4 + 0$. Jika demikian, kita dapat yakin bahwa FPB dari 8 dan 4 adalah 4 karena 4 habis membagi 8. Hal ini juga terjadi untuk sembarang bilangan bulat lainya, misalnya 13 dan 39, yaitu memiliki FPB=13 karena $39 = 3 \times 13 + 0$. Contoh lainnya, misalnya bilangan 15 dan 75. Karena $75 = 5 \times 15 + 0$ maka FPB dari 15 dan 75 adalah 15. Hal ini dinyatakan pada **Teorema 3.**6 berikut ini:

Teorema 3.6

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q** yang memenuhi persamaan **q = kp + 0** untuk sembarang bilangan bulat **k,** maka **(p, q) = p**

Bukti untuk teorema di atas dipaparkan sebagai berikut:

Untuk bilangan bulat **p** dan **q** yang memenuhi persamaan **q = kp + 0** untuk sembarang bilangan bulat **k,** maka berdasarkan **Teorema 3.**5 didapatkan bahwa **(p, q) = (p, 0)**. Karena **p|p** dan **p|0**, maka **p** adalah faktor persekutuan dari **p** dan **0**. Karena **p** adalah fakor terbesar dari **p** dan **p** merupakan faktor dari **0**, maka **p** adalah faktor persekutuan terbesar dari **p** dan **0**, yaitu **(p, 0) = p**.

Memperhatikan Contoh 3.3 di atas, terlihat bahwa penerapan algoritma pembagian dan **Teorema 3.**5 berkali-berkali kali akan memberikan alternatif cara menentukan FPB dari dua bilangan bulat.

Secara umum, langkah pada Contoh 3.3 di atas dijabarkan sebagai berikut:

$q = k_1p + r_1$ dengan $0 \le r_1 < p$

$p = k_2r_1 + r_2$ dengan $0 \le r_2 < r_1$

$r_1 = k_3r_2 + r_3$ dengan $0 \le r_3 < r_2$

$r_2 = k_4r_3 + r_4$ dengan $0 \le r_4 < r_3$

.

.

.

$r_n = k_{n+2}\, r_{n+1} + r_{n+2}$ dengan $0 \le r_{n+2} < r_{n+1}$

$r_{n+1} = k_{n+3}\, r_{n+2} + 0$

Maka berdasarkan **Teorema 3.**6, **(p, q)** = r_{n+2}

Proses di atas, yaitu melakukan algoritma keterbagian berkali-kali guna menentukan FPB dari dua bilangan bulat positif, dinyatakan sebagai **Algoritma Euclides** yaitu sebagai berikut:

Teorema 3.7

Untuk sembarang bilangan bulat positif **p** dan **q,** dengan menerapkan algoritma keterbagian berkali-kali yaitu dijabarkan sebagai berikut:

$q = k_1p + r_1$ dengan $0 \le r_1 < p$

$p = k_2r_1 + r_2$ dengan $0 \le r_2 < r_1$

$r_1 = k_3r_2 + r_3$ dengan $0 \le r_3 < r_2$

$r_2 = k_4r_3 + r_4$ dengan $0 \le r_4 < r_3$

.

.

.

$r_n = k_{n+2}\, r_{n+1} + r_{n+2}$ dengan $0 \le r_{n+2} < r_{n+1}$

$r_{n+1} = k_{n+3}\, r_{n+2} + 0$

Maka

(p, q) = r_{n+2}

Contoh 3.4

Untuk menguatkan pemahaman Anda mengenai algoritma ini, perhatikan penerapan algoritma Euclides dalam menentukan FPB dari 112.346 dan 256.142 berikut ini:

256.142 = 2 $\times$ 112.346 + 29.450

112.346 = 3 $\times$ 29.450 + 23.996

$29.450 = 1 \times 23.996 + 5.454$

$23.996 = 4 \times 5.454 + 2.180$

$5.454 = 2 \times 2.180 + 1.094$

$2.180 = 1 \times 1.094 + 1.086$

$1.094 = 1 \times 1.086 + 8$

$1.086 = 135 \times 8 + 6$

$8 = 1 \times 6 + 2$

$6 = 3 \times 2 + 0$

Dengan demikian,

(112.346, 256.142) = 2.

Untuk sembarang bilangan bulat negatif, yaitu **–p**, apakah **p** akan selalu habis membagi **–p**? Ya, karena ada bilangan bula (-1) sedemikan sehingga **(-p) = (-1) × p**.

Jika faktor-faktor dari **–p** adalah **–m** dan **–n**, apakah **m** dan **n** adalah faktor dari **–p**? Karena **–m** dan **–n** adalah faktor dari **–p** maka **–m|-p** dan **–n|-p**. Karena **m|-m** dan **–m|-p** maka **m|-p**. Begitu pula untuk **n**, karena **n|-n** dan **–n|-p** maka **n|-p**. Karena **m|-p** dan **n|-p** maka **m** dan **n** adalah faktor-faktor dari **–p**.

Dengan demikian, jika faktor-faktor dari **–p** adalah $-m_1, -m_2, -m_3, \ldots, -m_n$, apakah $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ adalah faktor-faktor dari **–p**? Dengan argumentasi yang sama seperti di atas, maka $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ adalah faktor-faktor dari **–p**.

Apakah faktor-faktor dari bilangan bulat **p** dan **–p** adalah sama, yaitu jika **m** adalah faktor dari **p** maka apakah **m** juga adalah faktor dari (-p)? Perhatikan uraian berikut ini: Jika **m** adalah faktor dari **p** maka **m|p**. Karena **-p = (-1) × (p)** maka **p|(-p).** Karena **m|p** dan **p|(-p)** maka **m|p**. Dengan demikian **m** adalah faktor dari **-p**.Jadi, jika **m** adalah faktor dari **p** maka **m** adalah faktor dari **-p**. Hal ini dinyatakan pada teorema berikut ini:

Teorema 3.8

Jika **m** adalah faktor dari **p** maka **m** adalah faktor dari **-p** untuk sembarang bilangan bulat **p**.

Teorema 3.8 menegaskan bahwa **p** dan **–p** memiliki faktor yang sama. Dengan demikian faktor persektuan dari **p** dan **–p** adalah seluruh faktor dari **p** atau **–p**.

Karena **p** dan **–p** memiliki faktor-faktor yang sama, maka dengan **Teorema 3.**8 mudah untuk bahwa FPB dari bilangan bulat positif **p** dan **q** akan sama dengan FPB dari pasangan bilangan **–p** dan **q,** yaitu **(p, q) = (-p, q)**, karena **p** dan **–p** merujuk pada faktor yang sama. Dengan argumentasi yang sama, dapat disiimpulkan bahwa **(p, q) = (p, –q)** karena faktor dari **q** dan **–q** adalah sama. Dengan argumentasi yang sama pula dapat diyakini bahwa **(p, q) = (-p, -q).** Hal ini kemudian dinyatakan dengan **Teorema 3.**9 berikut ini:

Teorema 3.9

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** maka:

(p, q) = (-p, q) = (p, -q) = (-p, -q)

Teorema 3.9 dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah FPB dari pasangan bilangan yang melibatkan bilangan-bilangan bulat negatif, seperti Contoh 3.5 berikut ini:

Contoh 3.5

Tentukan FPB dari (-2.680) dan 1.230 !

Dengan **Teorema 3.**9 maka ((-2.680), 1.230) = (2.680, 1.230). Kemudian, dengan algoritma Euclides FPB dari 2.680 dan 1.230 dijabarkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
2.680 &= 2 \times 1.230 + 220 \\
1.230 &= 5 \times 220 + 130 \\
220 &= 1 \times 130 + 90 \\
130 &= 1 \times 90 + 40 \\
90 &= 2 \times 40 + 10 \\
40 &= 4 \times 10 + 0
\end{aligned}
$$

Dengan demikian ((-2.680), 1.230) = 10

____

Mari meninjau kembali algoritma Euclides pada **Teorema 3.**7, yaitu untuk sembarang bilangan bulat positif **p** dan **q,** dengan menerapkan algoritma keterbagian berkali-kali yaitu dijabarkan sebagai berikut:

$q = k_1p + r_1$	dengan	$0 \leq r_1 < p$	(i)
$p = k_2r_1 + r_2$	dengan	$0 \leq r_2 < r_1$	(ii)
$r_1 = k_3r_2 + r_3$	dengan	$0 \leq r_3 < r_2$	(iii)
$r_2 = k_4r_3 + r_4$	dengan	$0 \leq r_4 < r_3$	(iv)
.			
.			
$r_{n-2} = k_n r_{n-1} + r_n$	dengan	$0 \leq r_n < r_{n-1}$	(v)
$r_{n-1} = k_{n+1} r_n + r_{n+1}$	dengan	$0 \leq r_{n+1} < r_n$	(vi)
$r_n = k_{n+2} r_{n+1} + r_{n+2}$	dengan	$0 \leq r_{n+2} < r_{n+1}$	(vii)
$r_{n+1} = k_{n+3} r_{n+2} + 0$			(viii)

Maka **(p, q)** = r_{n+2}

Kita tinjau persamaa (vii), yaitu $\mathbf{r_n = k_{n+2} r_{n+1} + r_{n+2}}$**,** Persamaan ini juga dapat ditulis $\mathbf{r_{n+2} = r_n - k_{n+2} r_{n+1}}$. Jika nilai $\mathbf{r_{n+1}}$ pada persamaan tersebut disubstitusi dengan nilai $\mathbf{r_{n+1}}$ pada persamaan persamaan (vi), maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= r_n - k_{n+2} (r_{n-1} - k_{n+1} r_n) \\ &= r_n - k_{n+2} r_{n-1} + k_{n+2} k_{n+1} r_n \\ &= (1 - k_{n+2}k_{n+1} r_n) r_n - k_{n+2} r_{n-1} \end{aligned}$$

Jika $\mathbf{r_n}$ pada persamaan (v) disubstitusi pada persamaan di atas maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= (1 - k_{n+2} k_{n+1} r_n) (r_{n-2} - k_n r_{n-1}) - k_{n+2} r_{n-1} \\ &= r_{n-2} - k_n r_{n-1} - k_{n+2} k_{n+1} r_n r_{n-2} + k_{n+2} k_{n+1} r_n k_n r_{n-1} - k_{n+2} r_{n-1} \\ &= (k_{n+2} k_{n+1} r_n k_n - k_n - k_{n+2}) r_{n-1} - k_{n+2} k_{n+1} r_n r_{n-2} + r_{n-2} \end{aligned}$$

Jika langkah serupa dilanjutkan terus menerus hingga mensubstitusi nilai $\mathbf{r_2}$ pada persamaan (ii) kemudian dilanjutkan dengan sibstitusi $\mathbf{r_1}$ pada persamaan (i), maka kita akan menemukan bahwa $\mathbf{r_{n+2}}$ adalah suatu kombinasi linear dari **p** dan **q,** yaitu:

$$\mathbf{r_{n+2} = xp + yq}$$

dengan **x** dan **y** adalah bilangan-bilangan bulat hasil operasi penjumlahan, perkalian, atau pengurangan dari berbagai tingkatan **r** dan **k**.

Karena $\mathbf{r_{n+2} = (p, q)}$ maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$\mathbf{(p, q) = px + qy}$

Hal ini kemudian dinyatakan dalam **Teorema 3.**10 berikut ini:

Teorema 3.10

Jika $\mathbf{(p, q) = d}$, maka ada bilangan bulat $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ yang memenuhi $\mathbf{px + qy = d}$

Untuk lebih memudahkan Anda memahami alur-alur argumentasi pembuktian **Teorema 3.**10 yang telah dipaparkan di atas, mari kita tinjau pada jabaran algoritma Euclides yang telah disederhanakan, misalnya hingga 4 persamaan berikut ini:

$q = k_1p + r_1$	dengan	$0 \leq r_1 < p$	(i)
$p = k_2r_1 + r_2$	dengan	$0 \leq r_2 < r_1$	(ii)
$r_1 = k_3r_2 + r_3$	dengan	$0 \leq r_3 < r_2$	(iii)
$r_2 = k_4r_3 + 0$			

Jadi $(p, q) = r_3$

Dari persamaan (iii) kita dapatkan bahwa $r_1 - k_3r_2 = r_3$ (iv). Dari persamaan (ii) kita peroleh $p - k_2r_1 = r_2$ (v). Substitusi r_2 pada (v) ke persamaan (iv) maka diperoleh:

$$r_3 = r_1 - k_3(p - k_2r_1)$$

$$r_3 = r_1 - k_3p + k_3k_2r_1 \qquad \text{(vi)}$$

Dari persamaan (i) diperoleh $\mathbf{q - k_1p = r_1}$ (vii). Kemudian, substitusi $\mathbf{r_1}$ pada persamaan (vii) ke persamaan (vi), maka diperoleh:

$$r_3 = (q - k_1p) - k_3p + k_3k_2(q - k_1p)$$

$$r_3 = q - k_1p - k_3p + k_3k_2q - k_3k_2k_1p$$

$$r_3 = (- k_1 - k_3 - k_3k_2k_1)p + (1 + k_3k_2)q \qquad \text{(viii)}$$

Misalkan, $\mathbf{x = (- k_1 - k_3 - k_3k_2k_1)}$ dan $\mathbf{y = (1 + k_3k_2)}$, maka persamaa (viii) dapat ditulis menjadi:

$$r_3 = xp + yq \qquad \text{(ix)}$$

Karena $\mathbf{(p, q) = r_3}$ maka persamaan (ix) dapat ditulis menjadi:

$\mathbf{(p, q) = px + qy}$

Untuk lebih memahami proses ini, perhatikan contoh-contoh berikut ini:

Contoh 3.6

Tentukan kombinasi linear FPB dari bilangan 18 dan 74!

Dengan algoritma Euclides diperoleh:

$74 = 4 \times 18 + 2$

$18 = 9 \times 2 + 0$

Jadi $(18, 74) = 2$

Dari persamaan $74 = 4 \times 18 + 2$ diperoleh bahwa:

$2 = 74 - 4 \times 18$

$2 = 74 \times 1 + 18 \times (-4)$

$2 = 18 \times (-4) + 74 \times 1$

Jadi kombinasi linear FPB dari bilangan 18 dan 74 yang dimaksud adalah **$2 = 18x + 74y$** dengan **$x = (-4)$** dan **$y = 1$**.

Contoh 3.7

Tentukan kombinasi linear FPB dari bilangan 123 dan 345!

Dengan algoritma Euclides diperoleh:

$345 = 2 \times 123 + 99$

$123 = 1 \times 99 + 24$

$99 = 4 \times 24 + 3$

$24 = 8 \times 3 + 0$

Jadi $(123, 345) = 3$

Dari persamaan $99 = 4 \times 24 + 3$ diperoleh bahwa:

$99 - 4 \times 24 = 3 \qquad \text{(i)}$

Dari persamaan $123 = 1 \times 99 + 24$ diperoleh bahwa:

$123 - 1 \times 99 = 24$

Substitusi 24 ke persamaan (i), maka diperoleh:

$99 - 4 \times (123 - 1 \times 99) = 3$

$99 - 4(123 - 99) = 3 \qquad \text{(ii)}$

Dari persamaan $345 = 2 \times 123 + 99$ diperoleh bahwa:

$345 - 2 \times 123 = 99$

Substitusi 99 ke persamaan (ii), maka diperoleh:

$(345 - 2 \times 123) - 4(123 - (345 - 2 \times 123)) = 3$

$(345 - 2 \times 123) - 4(123 - 345 + (2 \times 123)) = 3$

$345 - (2 \times 123) - (4 \times 123) + (4 \times 345) - (8 \times 123) = 3$

$345 + (4 \times 345) - (2 \times 123) - (4 \times 123) - (8 \times 123) = 3$

$(1 + 4)345 + ((-2) - 4 - 8)123 = 3$

$5 \times 345 + (-14) \times 123 = 3$

Jadi kombinasi linear FPB dari bilangan 123 dan 345 yang dimaksud adalah **3 = 123x + 345y** dengan **x = (-14)** dan **y = 5.**

Kesalahan perhitungan sering terjadi dalam pencarian kombinasi linear ini terutama masalah tanda bilangan. Oleh karena itu, untuk mempermudahkan Anda, akan lebih baik jika pasangan bilangan yang akan ditentukan kombinasi linearnya dimisalkan dalam suatu variabel. Misalnya, pada Contoh 3.7 dianggap bahwa **123 = p** dan **345 = q,**

Maka dari persamaan $99 = 4 \times 24 + 3$ diperoleh:

$99 - 4 \times 24 = 3$ (i)

Karena **p = 123**, maka dari persamaan $123 = 1 \times 99 + 24$ diperoleh bahwa:

$\mathbf{p - 1 \times 99 = 24}$

Substitusi 24 ke persamaan (i), maka diperoleh:

$99 - 4 \times (p - 1 \times 99) = 3$

$99 - 4(p - 99) = 3$ (ii)

Karena **q = 345** dan **p = 123**, maka dari persamaan $345 = 2 \times 123 + 99$ diperoleh:

$q - 2p = 99$

Substitusi 99 ke persamaan (ii), maka diperoleh:

$(q - 2p) - 4(p - (q - 2p)) = 3$

$q - 2p - 4(p - q + 2p) = 3$

$q - 2p - 4p + 4q - 8p = 3$

$(1 + 4)p + ((-2) - 4 - 8)p = 3$

$5q + (-14)p = 3$

$(-14)p + 5q = 3$ (iii)

Dari persamaan (iii), dapat disimpulkan bahwa nilai **x** dan memenuhi kombinasi linear linear FPB dari bilangan 123 dan 345 adalah **x = (-14)** dan **y = 5**, sehingga kombinasi linear yang dimaksud adalah 3 = 123x + 345y.

______

Jika **p|d** dan **q|d** dengan **(p, q) = 1**, apakah **pq|d**?

Karena **(p, q) = 1** berdasarkan **Teorema 3.**11 maka ada bilangan bulat **x** dan **y** sedemikian sehingga **px + qy = 1**. Dari **px + qy = 1**, dapat dijabarkan menjadi **dpx + dqy = d**.

Karena **p|d** dan **q|d** maka ada bilangan bulat **m** dan **n** yang memenuhi **pm = d** dan **qn = d**. Kita dapat substitusikan silang **pm = d** dan **qn = d** ke persamaan **dpx + dqy = d,** sehingga kita dapatkan:

qnpx + pmqy = d

pqnx + **pq**my = d

pq (nx + my) = d

Karena **m, n, x**, dan **y** adalah bilangan bulat, maka **(nx + my)** adalah bilangan bulat. Dengan demikian, dari persamaan **pq (nx + my) = d** maka **pq|d**.

Berdasarkan uraian di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa jika **p|d** dan **q|d** dengan **(p, q) = 1**, maka **pq|d**.

Teorema 3.12

Jika **p|**d dan **q|**d dengan **(p, q)** = 1, maka **pq|**d.

RANGKUMAN

Definisi 3.1a Faktor Bilangan Bulat

Bilangan bulat **p** dikatakan faktor bilangan bulat **q** jika dan hanya jika ada bilangan bulat **k** sedemikian sehingga **k × p = q.**

Definisi 3.1b Faktor Bilangan Bulat

Bilangan bulat **p** dikatakan faktor dari bilangan bulat **q** jika dan hanya jika **p | q.**

Definisi 3.2a Faktor Persekutuan

Untuk bilangan bulat **m** dan **n**, dikatakan **f** adalah faktor persekutuan dari **m** dan **n** jika dan hanya jika **f | m** dan **f | n**.

Definisi 3.2b Faktor Persekutuan

Untuk bilangan bulat m_1, m_2, m_3, … dan m_k, dikatakan **f** adalah faktor persekutuan dari m_1, m_2, m_3, … dan m_k jika dan hanya jika $f \mid m_1$, $f \mid m_2$, $f \mid m_3$, … dan $f \mid m_k$,

Teorema 3.1 Eksistensi Faktor Persekutuan

Karena **1|p** untuk sembarang bilangan bulat **p,** maka **1** akan selalu menjadi fakor untuk setiap bilangan bulat. Dengan demikian, **1** akan selalu menjadi faktor persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat.

Definisi 3.3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Untuk bilangan bulat **p** dan **q** yang salah satunya bukan bilangan nol, **d** dikatakan FPB dari **p** dan **q** jika **d** memenuhi:

(i) **d|p** dan **d|q** (syarat faktor persekutuan), dan
(ii) Jika ada **f** yang memenuhi **f|p** dan **f|q**, maka $f \leq d$ (syarat bilangan yang terbesar).

Definisi 3.4 Saling Prima

Jika **(p, q) = 1**, maka **p** dan **q** dikatakan saling prima atau **p** prima relatif terhadap **q.**

Teorema 3.2

Untuk sembarang bilangan bulat **p** dan **q,** jika **(p, q) = d** maka **(p:d, q:d) = 1**.

Teorema 3.3 Algoritma Keterbagian

Untuk **p** dan **q** adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat **k** dan **r** yang memenuhi $q = kp + r$ dengan $0 \leq r < p$.

Teorema 3.4 Implikasi 1dari**Teorema 3.**3

Untuk **p** dan **q** adalah sembarang bilangan-bilangan bulat, maka ada dengan tunggal pasangan bilangan-bilangan bulat **k** dan **r** yang memenuhi **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < |p|.**

Teorema 3.5 Implikasi 2 dari**Teorema 3.**3

Pada Algoritma Keterbagian, jika bilangan bulat positif **p** dan **q** memenuhi persamaan **q = kp + r** dengan **0 ≤ r < p** maka **(p, q) = (p, r).**

Teorema 3.6

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q** yang memenuhi persamaan **q = kp + 0** untuk sembarang bilangan bulat **k,** maka **(p, q) = p**

Teorema 3.7

Untuk sembarang bilangan bulat positif **p** dan **q,** dengan menerapkan algoritma keterbagian berkali-kali yaitu dijabarkan sebagai berikut:

$q = k_1p + r_1$ dengan $0 \le r_1 < p$
$p = k_2r_1 + r_2$ dengan $0 \le r_2 < r_1$
$r_1 = k_3r_2 + r_3$ dengan $0 \le r_3 < r_2$
$r_2 = k_4r_3 + r_4$ dengan $0 \le r_4 < r_3$
.
.
.
$r_n = k_{n+2}\, r_{n+1} + r_{n+2}$dengan $0 \le r_{n+2} < r_{n+1}$
$r_{n+1} = k_{n+3}\, r_{n+2} + 0$
Maka
(p, q) = r_{n+2}

Teorema 3.8

Jika **m** adalah faktor dari **p** maka **m** adalah faktor dari **-p** untuk sembarang bilangan bulat **p**.

Teorema 3.9

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** maka **(p, q) = (-p, q) = (p, -q) = (-p, -q)**

Teorema 3.10 Kombinasi Linear

Jika **(p, q) = d,** maka ada bilangan bulat **x** dan **y** yang memenuhi **px + qy = d**

Teorema 3.11

Jika **p|d** dan **q|d** dengan **(p, q) = 1**, maka **pq|d**.

C. SOAL LATIHAN

1. **Tentukan apakah pernyataan-pernyataan berikut ini benar (B) atau salah (S)! Berikan contoh jika salah atau buktikan jika benar!**
   a. Apabila **a|d** dan **b|d,** maka **d** adalah faktor persekutuan dari **a** dan **b**.
   b. Dari persamaan **ax = c – by**, diketahui bahwa **c|a**, maka **c|by**.
   c. Jika **(p, q) = c,** maka **c|(pa – pb)** untuk sembarang bilangan bulat **a** dan **b**.
   d. (921, 654) = 3
   e. Jika **d|ab** dan **(d, a)** = 1 maka **d|b**.
   f. FPB dari **p** dan **q** akan selalu habis dibagi oleh faktor setiap persekutuan dari **p** dan **q.**

2. **Uraikan jawaban untuk soal-soal berikut ini:**
   a. Tentukan
      1) (127, 81)
      2) (208, (-186))
      3) ((-245), 880)
      4) ((-2156), (-4328))
   b. Buktikan bahwa **((a, b), b) = (a, b)**
   c. Tentukan **x** dan **y** sehingga **314x + 159y = (314, 159)**
   d. Buktikan bahwa jika **k|p** dan **k|q** dan diketehaui **(p, q) = d,** maka **k|d**.
   e. Buktikan bahwa **(a, b+a) = 1** jika dan hanya jika **(a, b) = 1**

BAB IV

KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

A. PENGERTIAN KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL

Jika bahasan sebelumnya adalah mengenai Faktor Persekutuan Terbesar (FPB), maka dalam bagian fokus pembahasannya adalah mengenai Kelipatan Persekutuan Terkecil atau disingkat dengan KPK. KPK dalam literatur asing dikenal dengan istilah *The Least Common Multiplication* atau disingkat LCM, yaitu merujuk pada bilangan terkecil yang merupakan kelipatan dari dua atau lebih bilangan bulat.

Untuk mengurangi distruksi bahasa, selanjutnya ketika disebutkan istilah bilangan, maka yang dimaksud adalah bilangan bulat karena semesta pembicaraan dalam konsep KPK adalah himpunan bilangan bulat.

Untuk dapat memahami konsep KPK dengan baik, paling tidak ada dua konsep utama yang mendasari konsepnya, yaitu konsep mengenai kelipatan bilangan dan kelipatan persekutuan dari dua bilangan atau lebih.

1. Kelipatan Bilangan

Kita sering mendengar bahwa kelipatan bulat dari bilangan 2 adalah 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Sedangkan kelipatan bulat dari bilangan 3 adalah 3, 6, 9, 12, dan seterusnya. Dikatakan *kelipatan bulat* karena terdiri dari himpunan bilangan bulat yang merupakan kelipatan dari bilangan bulat 2 atau 3. Selanjutnya *kelipatan bulat* dari bilangan bulat cukup disebut dengan istilah *kelipatan*.

Dari kedua contoh di atas, jika dianalisis didapatkan bahwa seri bilangan tersebut dibentuk dari penambahan dari kelipatan bilangan yang dimaksud, misalnya 6 disebut sebagai kelipatan dari 3, maka bilangan kelipatan yang selanjutnya adalah 6 + 3, yaitu 9, dan bilangan kelipatan 3 yang selanjutnya setelah 9 adalah 12 yang didapatkan dari 9 + 3, dan begitu seterusnya untuk bilangan-bilangan selanjutnya. Dengan demikian, susunan bilangan keliptan 3 dapat ditulis menjadi 3, 3+3, 3+3+3, 3+3+3+3 dan seterusnya, yaitu 3, 6, 9, 12, … seperti ditunjukkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.1: Susunan Bilangan Kelipatan 3

3	6	9	12	15	dst.
3	3+3	3+3+3	3+3+3+3	3+3+3+3+3	…
1×3	2×3	3×3	4×3	5×3	…

Dari baris ketiga pada tabel 4.1 di atas, terlihat bahwa belingan-bilangan yang merupakan kelipatan 3 dapat ditentukan dengan notasi n3 atau 3n untuk sembarang bilangan bulat n.

Dengan pendekatan relasi keterbagian, ini terlihat jelas bahwa 3n, yaitu bilangan kelipatan 3, akan selalu habis dibagi oleh 3 karena $3|3$ maka $3|3n$. Jadi bilangan-bilangan keliptan dari 3 akan selalu habis dibagi oleh 3. Hal ini dapat dinyatakan secara umum bahwa bilangan kelipatan **p** dapat dinyatakan dengan **pn** untuk sembarang bilangan bulat **n**.

Berdasarkan uraian di atas, dengan menggunakan perspektif relasi keterbagian maka kelipatan bilangan dapat didefinisikan sebagai berikut: bilangan bulat **m** adalah kelipatan dari bilangan bulat **p** jika dan hanya jika **p|m**.

Apakah bilangan nol memiliki kelipatan? Karena himpunan bilangan kelipatan dari nol adalah **0n = 0** untuk sembarang bilangan bulat **n**, maka dengan ini, jelas bahwa bilangan bulat nol tidak dapat dijabarkan himpunan bilangan kelipatannya. Oleh karena itu kita batasi bilangan-bilangan yang dapat dijabarkan kelipatannya, yaitu bilangan bulat selain nol.

Definisi 4.1 Kelipatan Bilangan

bilangan bulat **m** dikatakan kelipatan dari bilangan bulat **p** jika dan hanya jika **p|m** dengan **p** ≠ 0

Apakah 14.940 adalah bilangan keliptan dari 12? Ya, 14.940 adalah keliptan dari 12 karena 12|14.940 yaitu ada bilangan bulat 1.245 sedemikian sehingga 1.245 × 12 = 14.940.

Apakah (-135.795) adalah bilangan keliptan dari 11? Kita selidiki bahwa adalah bilangan bulat (-12.345) yang memenuhi (-12.345) $\times$ 11 = (-135.795). Jadi, 11|(-135.795). Dengan demikian, berdasarkan **Definisi 4.**1 maka (-135.795) adalah keliptan dari 11.

Apakah 16.329 adalah keliptan dari (-13)? Kita selidiki bahwa (-13)∤ 16.329 karena tidak ada bilangan bulat **k** yang memenuhi **k** $\times$ (-13) = 16.329. Dengan demikian 16.329 bukanlah bilangan kelipatan dari (-13).

Jabarkan kelipatan dari bilangan bulat bilangan bulat 4 ! Kelipatan dari bilangan bulat 4 adalah himpunan bilangan 4n untuk sembarang bilangan bulat n, yaitu:

…, 4(-3), 4(-2), 4(-1), 4.0, 4.1, 4.2, 4.3, …

atau

…, (-12), (-8), (-4), 0, 4, 8, 12, … (i)

Jabarkan kelipatan dari bilangan bulat -4 ! Kelipatan dari -4 adalah himpunan bilangan (-4)n untuk sembarang bilangan bulat n, yaitu:

…, (-4)(-3), (-4)(-2), (-4)(-1), (-4)0, (-4)1, (-4)2, (-4)3, …

atau

…, 12, 8, 4, 0, (-4), (-8), (-12), … (ii)

Dari himpunan bilangan pada himpunan (i) dan (ii), terlihat bahwa kelipatan dari bilangan 4 dan (-4) adalah himpunan yang sama. Jika dipermumum, maka himpunan bilangan bulat **p** dan (-p) adalah himpunan bilangan yang sama karena pn = (-pn) untuk sembarang bilangan bulat n.

Himpunan (i) terdiri atas tiga kelompok himpunan bilangan kelipatan dari 4, yaitu kelipatan bulat positif, kelipatan bulat negatif, dan kelipatan bulat nol dari bilangan 4. Begitu pula dengan himpunan bilangan pada (ii). Pada pembahasan selanjutnya, kita hanya tertarik kepada bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan bulat positif saja dan mengabaikan kelipatan bulat negatif dan kelipatan bulat nol. Mengapa demikian? Kami akan jelaskan pada waktunya nanti. Sehingga, kelipatan positif dari bilangan 4 adalah 4, 8, 12, …. Begitu juga kelipatan positif dari bilangan (-4) adalah 4, 8, 12, …..

Pada pembahasan selanjutnya istilah *kelipatan positif* cukup disingkat dengan *kelipatan* saja. Sehingga *kelipatan bilangan* yang dimaksud dalam pembahasan selanjutnya adalah *kelipatan bulat positif* dari suatu bilangan bulat.

2. Kelipatan Persekutuan

Sebelumnya Anda telah diperkenalkan dengan istilah kelipatan bilangan, yaitu bilangan bulat **m** dikatakan kelipatan dari bilangan bulat **p** jika dan hanya jika **p|m** untuk **p** tidak sama dengan nol. Selanjutnya kita akan membicarakan mengenai kelipatan persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat. Untuk memulai, perhatikan uraian berikut ini:

Kita ketahui bahwa kelipatan dari **p** adalah himpunan bilangan pn untuk sembarang bilangan bulat n. Sedangkan kelipatan dari **q** adalah himpunan bilangan qn untuk sembarang bilangan bulat n. Dikatakan **k** adalah kelipatan persekutuan dari **p** dan **q** jika **k** merupakan anggota dari baik himpunan pn maupun qn. Karena **k** adalah anggota dari himpunan pn dan qn maka **k** adalah kelipatan baik untuk **p** maupun **q.** Dengan demikian berdasarkan definisi keliptan bilangan, maka **p|k** da **q|k**. Jadi, **k** dikatakan kelipatan persekutuan dari **p** dan **q** jika dan hanya jika **p|k** dan **q|k**. Pernyataan ini dapat diperumum dengan argumentasi yang serupa, yaitu **k** dikatakan kelipatan dari himpunan bilangan p_1, p_2, p_3, …, p_n jika p_i**|k** dengan p_i adalah setiap bilangan p_1, p_2, p_3, …, p_n.

Definisi 4.2a Kelipatan Persekutuan

Bilangan **k** dikatakan kelipatan persekutuan dari bilangan bulat **p** dan **q** jika **p|k** dan **q|k** dengan **p** dan **q** tidak sama dengan nol.

Definisi kelipatan persekutuan di atas dapat diperumum untuk n buah bilangan bulat, yaitu:

Definisi 4.2b Kelipatan Persekutuan

Bilangan **k** dikatakan kelipatan persekutuan dari bilangan p_1, p_2, p_3, …, p_n jika p_i**|k** dengan p_i adalah setiap bilangan p_1, p_2, p_3, …, p_n dan p_i tidak sama dengan nol.

Dari kedua definisi di atas, mengapa **p, q** atau p_i tidak boleh sama dengan nol? Coba Anda pikirkan!

Contoh 4.1

Kelipatan dari 2 adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24…

Kelipatan dari 3 adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, …

Kelipatan dari 4 adalah 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48 …

Berdasarkan himpunan bilangan kelipatan 2, 3 dan 4 di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

Bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah 6, 12, 18, 24, … karena setiap dari bilangan tersebut habis dibagi oleh 2 dan juga 3, misalnya 2|6 dan 3|6, 2|12 dan 3|12, begitu pula dengan 18, 24 dan seterusnya.

Dengan argumentasi yang sama, maka bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 3 dan 4 adalah 12, 24, 36, dan seterusnya. Sedangkan bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari bilangan 2 dan 4 adalah 4, 8, 12, 16, dan seterusnya.

Dapatkah Anda menentukan bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari bilangan 2, 3, dan 4? Ini pasti tidak sulit bagi anda. Karena 2|12, 3|12, dan 4|12 maka berdasarkan definisi kelipatan persekutuan 12 adalah kelipatan persekutuan dari 2, 3 dan 4. Ternyata tidak hanya bilangan 12 yang memenuhi kriteria tersebut. Bilangan 24 juga memenuhi definisi bilangan kelipatan persekutuan dari 2, 3 dan 4 karena 2|24, 3|24, dan 4|24. Apakah ada bilangan lainnya yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3 dan 4? Coba Anda pikirkan!

Contoh 4.1

Ingat kembali bahwa kelipatan bilangan yang kita maksud dalam pembahasan ini adalah kelipatan bulat positif dari suatu bilangan bulat. Dengan demikian, maka:

Bilangan-bilangan kelipatan dari (-5) adalah 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, …. Sedangkan, bilangan-bilangan kelipatan dari 6 adalah 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, …

Berdasarkan data di atas, bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari (-5) dan 6 adalah 30 dan 60 karena (-5)|30 dan 6|30 dan juga (-5)|60 dan 6|60. Apakah ada bilangan selain 30 dan 60 yang merupakan bilangan kelipatan (-5) dan 6? Coba Anda pikirkan!

3. Kelipatan Persekutuan Terkecil

Sebelumnya kami telah perkenalkan kepada Anda mengenai konsep kelipatan bilangan dan kelipatan persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat. Kedua konsep ini selanjutnya akan memainkan peranan penting dalam membangun konsep mengenai Kelipatan Persekutuan Terkecil atau kita singkat dengan istilah KPK.

Untuk dapat memahami apa itu KPK, mari kita tinjau kembali contoh 4.1, yaitu sebagai berikut:

Kelipatan dari 2 adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24…

Kelipatan dari 3 adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, …

Kelipatan dari 4 adalah 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48 …

Kita ketahui bahwa bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah 6, 12, 18, dan seterusnya. Sedangkan, bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3 dan 4 adalah 12, 24 dan seterusnya.

Bilangan 6 pada kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah bilangan kelipatan persekutuan terkecil dari 2 dan 3 karena dari sejumlah bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 yang terkecil adalah 12. Dengan ini, KPK dari 2 dan 3 adalah 6.

Dengan argumentasi yang serupa, maka bilangan 12 merupakan KPK dari bilangan 2, 3, dan 4 karena dari bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari 2, 3 dan 4 bilangan 12 adalah yang terkecil.

Berdasarkan uraian di atas, bilangan yang dapat dijadikan sebagai KPK dari bilangan-bilangan bulat memiliki dua karakteristik, yaitu: *Pertama*, bilangan tersebut adalah bagian dari bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat yang akan ditentukan KPKnya. *Kedua,* bilangan tersebut adalah bilangan yang nilainya terkecil dari himpunan bilangan-bilangan kelipatan persekutuan tersebut.

Berdasarkan dua karakteristik ini, definisi bilangan kelipatan persekutuan terkecil dirumuskan, yaitu sebagai berikut:

Definisi 4.3a Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Bilangan kelipatan persekutuan terkecil atau disingkat KPK dari bilangan bulat bukan nol **p** dan **q** adalah suatu bilangan bulat positif **k** yang memenuhi:

(i) **p|k** dan **q|k**

(ii) jika ada **c** yang memenuhi **p|c** dan **q|c**, maka **k** ≤ c.

Definisi 4.3a di atas dapat diperluas untuk kelipatan persekutuan dari lebih dari dua bilangan bulat, yaitu dijabarkan sebagai berikut:

Definisi 4.3b Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Bilangan kelipatan persekutuan terkecil atau disingkat KPK dari bilangan bulat bukan nol p_1, p_2, p_3, …, p_n adalah suatu bilangan bulat positif **k** yang memenuhi:

(i) p_i**|k** dengan p_i adalah setiap bilangan p_1, p_2, p_3, …, p_n

(ii) jika ada **c** yang memenuhi p_i**|k**, maka **k** ≤ c.

Definisi KPK di atas menegaskan bahwa syarat bilangan untuk menjadi KPK adalah *pertama* bilangan tersebut merupakan kelipatan persekutuan dan *kedua* bilangan tersebut merupakan kelipatan persekutuan yang terkecil dari bilangan-bilangan kelipatan persekutuan lainnya.

Untuk lebih memudahkan kita dalam menulis KPK dari dua atau lebih bilangan bulat, maka dalam pembahasa selanjutnya istilah KPK dinotasikan dengan tanda kurung siku, misalnya KPK dari **p** dan **q** ditulis **[p, q]**, sedangkan KPK dari p_1, p_2, p_3, …, p_n ditulis [p_1, p_2, p_3, …, p_n]. Ini akan membantu Anda dalam membedakan antara notasi unuk FPB dan KPK. Kita ketahui sebelumnya bahwa FPB untuk **p** dan **q** ditulis **(p, q)**, sedangkan KPK dari **p** dan **q** ditulis **[p, q]**. Notasi ini akan sangat mempermudah kita pada pembahasan selanjutnya.

Masih ingatkah Anda dengan pernyataan kami pada bagian sebelumnya yang menyatakan bahwa kita hanya tertarik pada kelipatan-kelipatan bilangan bulat yang positif dan mengabaikan kelipatan-kelipatan bulat yang negatif dan kelipatan nol. Anda mungkin bertanya-tanya mengapa demikian. Ini adalah saat yang tepat untuk kami sampaikan alasannya.

Pertama, mengapa kita tidak membicarakan kelipatan bulat negatif? Jika kita memasukkan bilangan-bilangan kelipatan bulat negatif sebagai semesta pembicaraan kita mengenai KPK, maka tentu kita tidak akan pernah dapat menentukan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih karena kelipatan persekutuannya adalah tak hingga ke arah kelipatan pereskutuan bulat negatif. Untuk dapat lebih memahami maksud dari uraian ini, perhatikan ilustrasi berikut ini: Kelipatan bulat positif dan negatif dari bilangan 2 adalah …, (-6), (-4), (-2), 2, 4, 6, …. Sedangkan, kelipatan bulat positif dan negatif dari bilangan 3 adalah adalah …, (-9), (-6), (-3), 3, 6, 9, … Memperhatikan himpunan bilangan kelipatan dari 2 dan 3, nampak bahwa bilangan 6 bukan lagi KPK dari 2 dan 3 karena karena ada bilangan kelipatan persekutuan yang lebih kecil dari 6 yaitu (-6). Lalu, apakah (-6) adalah kelipatan persekutuan yang terkecil dari 2 dan 3? Tentu tidak, ada tak hingga bilangan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 yang lebih kecil dari (-6). Karena hal inilah yang membuat kita tidak dapat mendefinisi bilangan KPK dari 2 dan 3 jika melibatkan kelipatan pesekutuan bulat negatif dari 2 dan 3.

Kedua, mengapa kita tidak membicarakan kelipatan bulat nol? Perhatikan **Definisi 4.**1 tentang kelipatan bilangan, yaitu **k** dikatakan kelipatan dari sembarang bilangan bulat **p** jika dan hanya jika **p|k**. Apakah **p** akan selalu habis membagi bilangan nol, yaitu apakah **p|**0? Tentu, karena untuk sembarang bilangan bulat **p** maka akan selalu ada bilangan bulat 0 yang memenuhi **p** $\times$ 0 = 0. Dengan demikian, 0 adalah kelipatan untuk setiap bilangan bulat. Akibatnya 0 akan selalu menjadi kelipatan persekutuan dari setiap dua atau lebih bilangan bulat. Bagaimana jika kita hanya mengabaikan kelipatan bulat negatif tapi tidak untuk kelipatan bulat nol dalam pembicaraan KPK? Jika kita tidak abaikan kelipatan bulat nol dari pembicaraan KPK maka nol akan selalu menjadi KPK dari dua atau lebih bilangan bulat karena 0 adalah kelipatan persekutuan dari dua atau lebih bilangan bulat. Tentu akibatnya adalah pembicaraan mengenai KPK sudah tidak menarik lagi. Dengan alasan itulah KPK dari dua atau lebih bilangan bulat dibatasi pada pembicaraan kelipatan bulat positif yang terkecil, yaitu didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif (lihat **Definisi 4.**3a dan 4.3b).

Setelah Anda memhami definisi KPK, Anda mungkin bertanya-tanya sifat-sifat apa saja yang terkait dengan KPK? Apakah ada hubungan antara KPK dan FPB? Pertanyaan-pertanyaan ini akan kita jawab pada pembahasan selanjutnya, yaitu mengenai sifat-sifat yang berlaku pada KPK dan hubungannya dengan FPB.

B. SIFAT-SIFAT PADA KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL

Pada bagian ini, kita akan menguraikan sejumlah sifat-sifat yang berlaku pada KPK dan akhir nanti kita akan sama-sama menemukan hubungan antara KPK dan FPB. Mari kita mulai untuk pembahasan yang pertama, yaitu sebagai berikut:

Coba perhatikan kembali bilangan kelipatan dari 2, 3 dan 4 berikut ini:

Bilangan kelipatan 2 adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24…

Bilangan kelipatan 3 adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, …

Bilangan kelipatan 4 adalah 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48 …

Terlihat jelas bahwa bilangan-bilangan kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah 6, 12, 18, 24, dan seterusnya. Sehingga, KPK dari 2 dan 3 adalah 6. Jika kita selidiki lebih jauh lagi, kita temukan bahwa $6|6$, $6|12$, $6|18$, dan $6|24$, yaitu KPK dari 2 dan 3, yaitu 6, selalu habis membagi bilangan-bilangan kelipatan persekutuan lainnya dari 2 dan 3. Apakah ini suatu kebetulan? Mari kita tinjau kasus lainnya, yaitu kelipatan persekutuan dari 3 dan 4 adalah 12, 24, 36, dan seterusnya. KPK dari 3 dan 4 adalah 12. Di sini juga ditemukan bahwa $12|12$, $12|24$, dan $12|36$. Dengan demikian, lagi-lagi bahwa KPK habis membagi bilangan-bilangan kelipatan persekutuan lainnya. Apakah hal ini selalu terjadi pada sembarang pasangan-pasangan bilangan bulat lainnya. Untuk dapat menyimpulkan demikian, mari kita tinjau masalah ini secara umum.

Kita anggap KPK dari **p** dan **q** adalah m, yaitu **[p, q]** = m. Misalkan **c** adalah bilangan kelipatan persekutuan lainnya dari **p** dan **q.** Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{m|c}$, yaitu KPK dari **p** dan **q** habis membagi kelipatan persekutuan lainnya dari **p** dan **q.** Untuk menunjukkan hal ini kita akan menggunakan pembuktian kontradiksi, yaitu awalnya kita andaikan bahwa $\mathbf{m\nmid c}$, kemudian kita tunjukan bahwa pengandaian itu salah sehingga akibat logisnya $\mathbf{m|c}$. Mari kita mulai!

Andaikan $m\nmid c$, maka menurut algoritma keterbagian ada bilangan-bilangan bulat **k** dan **r** yang memenuhi:

$$c = km + \mathbf{r} \qquad \text{dengan} \qquad 0 < \mathbf{r} < m$$

Sehingga,

$r = \mathbf{c} - km$ dengan $0 < \mathbf{r} < m$

Karena **[p, q]** = m, maka **p|m** dan **q|m**. Karena **p|m**, maka **p|k**m. Begitupula, karena **q|m**, maka **q|k**m.

Karena **c** adalah kelipatan persekutuan dari **p** dan **q,** maka **p|c** dan **q|c**.

Karena **p|k**m dan **p|c**, maka **p| c** – km, sehingga **p|**r karena **c** – km = **r.**

Karena **q|k**m dan **q|c**, maka **q| c** – km, sehingga **q|**r karena **c** – km = **r.**

Karena **p|**r dan **q|**r, maka **r** adalah kelipatan persekutuan dari **p** dan **q.**

Karena **[p, q]** = m, maka akibatnya **m** < **r.** Akan tetapi hal ini bertentangan dengan pengandaian sebelumnya bahwa 0 < **r** < m.

Jadi pengandaian bahwa m∤c itu tidak benar. Dengan demikian, **m|c**.

Kesimpulan dari uraian di atas dirumuskan dalam teorema berikut ini:

Teorema 4.1 [p, q]|c

Jika **c** adalah kelipatan persekutuan bilangan bulat bukan nol **p** dan **q,** maka KPK dari **p** dan **q** membagi **c,** yaitu:

[p, q]|c

Berdasarkan redaksinya, **Teorema 4.**1 adalah teorema yang bermuatan implikasi, yaitu jika **c** adalah kelipatan persekutuan bilangan bulat **p** dan **q,** maka **[p, q]|c**. Bagaimana jika sebaliknya, jika **[p, q]|c**, apakah **c** adalah kelipatan persekutuan dari **p** dan q? Misalnya, jika [3, 4]|48, yaitu 12|48, apakah 48 merupakan kelipatan persekutuan dari 3 dan 4? Coba Anda selidiki kasus ini sebagai latihan agar Anda dapat lebih memahami masalah KPK ini.

____

Kita ketahui sebelumnya bahwa [2, 3] = 6, yaitu KPK dari 2 dan 3 adalah 6. Jika 2 dan 3 masing-masing kita kalikan dengan sembarang bilangan asli, misalkan 4, maka kita dapatkan pasangan bilangan yang lain, yaitu 8 dan 12. Berapakah [8, 12]? Setelah kita selidiki, kita dapatkan bahwa [8, 12] = 24, yaitu KPK dari 8 dan 12 adalah 24. Kita ketahui bahwa 24 adalah 4 × 6 atau 4 × [2, 3]. Karena [4×2, 4×3] = [8, 12] = 24 dan 24 = 4 × 6 = 4 × [2, 3], apakah dapat kita simpulkan bahwa [4×2, 4×3] = 4 × [2, 3] ?

Untuk dapat menjawab pertanyaan di atas, mari kita dudukan kasus ini pada situasi yang lebih umum, yaitu misalkan **[p, q]** = **m** dan untuk sembarang bilangan **c** dengan **c** > 0, kita jabarkan pasangan bilangan lainnya, yaitu **[cp, cq]**. Kita akan tunjukan apakah **[cp, cq]** = **cm** = **c [p, q]**. Sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa **[cp, cq]** = **c [p, q]** dengan **c** > 0.

Karena **[p, q]** = **m**, maka **p|m** dan **q|m**, dan berdasarkan **Teorema 2.**8 c**p|c**m dan **cq|c**m. Karena c**p|c**m dan **cq|c**m, maka **cm** adalah kelipatan persekutuan dari **cp** dan cq. Jika **cm** adalah kelipatan persekutuan dari **cp** dan cq, maka menurut **Teorema 4.**1 KPK dari **cp** dan cq akan membagi **cm**, yaitu **[cp, cq]|c**m.

Selanjutnya, berdasarkan definisi KPK, **[cp, cq]** adalah kelipatan dari **cp** dan jelas bagi kita bahwa **cp** adalah kelipatan dari c. Dengan demikian, **[cp, cq]** adalah suatu kelipatan dari c. Karena **[cp, cq]** adalah suatu kelipatan dari **c,** maka kita anggap bahwa **[cp, cq]** adalah kelipatan **k** kali dari **c,** yaitu **[cp, cq]** = **kc**. Karena **[cp, cq]** = **kc** dan kita ketahui sebelumnya bahwa **[cp, cq]|c**m, maka **kc|c**m. Karena **kc|c**m, berdasarkan **Teorema 2.**8 maka **k|m**.

Selanjutnya, karena **[cp, cq]** = **kc**, maka c**p|k**c dan **cq|k**c. Karena c**p|k**c dan **cq|k**c, berdasarkan **Teorema 2.**8 maka **p|k** dan **q|k**. Dengan demikian, **k** adalah kelipatan dari **p** dan **q** yang menurut **Teorema 4.**1 maka **[p, q]|k**. Karena sebelumnya, **[p, q]** = **m** dan **[p, q]|k**, maka **m|k**.

Karena **k|m** dan **m|k**, maka **m** = **k.** Dengan demikian, **mc** = **kc**. Karena **m** = **[p, q]** dan **kc** = **[cp, cq]** sedangkan **mc** = **kc**, maka terbukti bahwa **c[p, q]** = **[cp, cq]**.

Jadi, berdasarkan uraian di atas dapat kita simpulkan bahwa untuk **c** > 0, maka **[cp, cq]** = **c[p, q]** yang dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema 4.2

Untuk **c** > 0, maka **[cp, cq]** = **c[p, q]**

Contoh 4.1

Tentukan KPK dari 5250 dan 2250!

Berdasarkan **Teorema 4.**2, maka:

$$\begin{aligned}[5250, 2250] &= [10\times525, 10\times225]\\ &= 10\,[25\times21, 25\times9]\\ &= 10 \times 25\,[21, 9]\end{aligned}$$

$= 10 \times 25\ [3\times 7, 3\times 3]$
$= 10 \times 25 \times 3\ [7, 3]$
$= 10 \times 25 \times 3 \times 21$
$= 15.750$

Berdasarkan contoh 4.1 di atas, nampak bahwa **Teorema 4.**1 sangat membantu menentukan KPK dari pasangan-pasangan bilangan yang relatif besar.

______

Jika (2, 3) = 1, kita dapatkan bahwa [2, 3] = 2×3 = 6. Berdasarkan contoh tersebut, apakah dapat kita simpulkan bahwa **[p, q]** = **pq** jika **(p, q)** = 1? Jawaban dari pertanyaan di atas dijabarkan sebagai berikut:

Karena **p|p**q dan **q|p**q, maka **pq** adalah kelipatan persekutuan dari **p** dan **q.** Berdasarkan **Teorema 4.**1 maka **[p, q]|p**q. Karena **p|[p, q]** dan **q|[p, q]** dengan **(p, q)** = 1, berdasarkan **Teorema 3.**11 maka **pq|[p, q]**. Karena **[p, q]|p**q dan **pq|[p, q]**, dapat disimpulkan bahwa **[p, q]** = **pq**. Dengan demikian terbukti bahwa jika **(p, q)** = 1 maka **[p, q]** = **pq**.

Teorema 4.3

Jika **(p, q)** = 1 maka **[p, q]** = **pq**

Selanjutnya kita akan menggunakan **Teorema 4.**3 untuk menjabarkan teorema lainnya dari konsep KPK.

Apabila **(p, q)** = **d,** maka $\frac{1}{d}$**(p, q)** = $\frac{1}{d}$d atau dapat ditulis menjadi $\left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right) = 1$. Dengan demikian, berdasarkan **Teorema 4.**3, maka $\left[\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right] = \frac{p}{d} \times \frac{q}{d}$ karena $\left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right) = 1$. Berdasarkan **Teorema 4.**2, persamaan $\left[\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right] = \frac{p}{d} \times \frac{q}{d}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\left[\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{d}}, \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{d}}\right] = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{d}} \times \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{d}}$$
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{d^2}}$$

Kedua ruas dari persamaan di atas kita kalikan dengan d^2, maka kita dapatkan persamaan berikut ini:

$$\mathbf{d^2}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{d}}[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \mathbf{d^2}\frac{\mathbf{pq}}{\mathbf{d^2}}$$
$$\mathbf{d}\ [\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \mathbf{pq}$$

Karena sebelumnya kita ketahui bahwa **(p, q)** = **d,** maka persamaan di atas menjadi: **(p, q) [p, q]** = **pq**.

Dengan demikian, dapat disimpulkan hubungan antara KPK dan FPB, yaitu **(p, q) [p, q]** = **pq** tapi ini dibatasi untuk bilangan bulat positif **p** dan **q.**

Teorema 4.4

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** maka **(p, q)[p, q]** = **pq**

Selain **Teorema 4.**2, **Teorema 4.**4 memberikan alternatif strategi penghitungan dalam penentuan KPK dari dua bilangan bulat positif bahkan untuk bilangan-bilangan yang relatif besar. Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 4.2

Tentukan KPK dari 123 dan 345!

Dari contoh 3.7, kita ketahui bahwa (123, 345) = 3

Maka KPK dari 123 dan 345 dijabarkan sebagai berikut:

(123, 345) [123, 345] = 123 × 345

3 [123, 345] = 42.435

[123, 345] = 42.435 / 3

[123, 345] = 14.145

Jadi, KPK dari 123 dan 345 adalah 14.145.

Jika **Teorema 4.**4 kita selidiki lebih lanjut, maka kita akan menemukan hubungan lainnya antara KPK dan FPB. Jika **(p, q)** = 1, maka persamaan **(p,q)[p,q]** = **pq** pada **Teorema 4.**4 menjadi **[p, q]** = **pq**. Persamaan yang terakhir ini menggambarkan bahwa KPK dari dua bilangan bulat positif adalah perkalian dari kedua bilangan tersebut jika kedua bilangan tersebut relatif prima, yaitu memiliki FPB sama dengan 1. Hal ini dijabarkan dalam teorema berikut ini:

Teorema 4.5

Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** jika **(p, q)** = 1 maka **[p, q]** = **pq**

Contoh 4.3

Tentukan KPK dari 18 dan 25!

Karena (18, 25) = 1, berdasarkan **Teorema 4.**5 maka [18, 25] = 18 × 25 = 450.

C. RANGKUMAN

Definisi 4.1 Kelipatan Bilangan
bilangan bulat **m** dikatakan kelipatan dari bilangan bulat **p** jika dan hanya jika **p|m** dengan **p** ≠ 0

Definisi 4.2a Kelipatan Persekutuan
Bilangan **k** dikatakan kelipatan persekutuan dari bilangan bulat **p** dan **q** jika **p|k** dan **q|k** dengan **p** dan **q** tidak sama dengan nol.

Definisi 4.2b Kelipatan Persekutuan
Bilangan **k** dikatakan kelipatan persekutuan dari bilangan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ jika p_i**|k** dengan p_i adalah setiap bilangan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ dan p_i tidak sama dengan nol.

Definisi 4.3a Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)
Bilangan kelipatan persekutuan terkecil atau disingkat KPK dari bilangan bulat bukan nol **p** dan **q** adalah suatu bilangan bulat positif **k** yang memenuhi:

(i) **p|k** dan **q|k**
(ii) jika ada **c** yang memenuhi **p|c** dan **q|c**, maka **k** ≤ c.

Definisi 4.3b Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)
Bilangan kelipatan persekutuan terkecil atau disingkat KPK dari bilangan bulat bukan nol $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ adalah suatu bilangan bulat positif **k** yang memenuhi:

(i) p_i**|k** dengan p_i adalah setiap bilangan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$
(ii) jika ada **c** yang memenuhi p_i**|k**, maka **k** ≤ c.

Teorema 4.1 [p, q]|c
Jika **c** adalah kelipatan persekutuan bilangan bulat bukan nol **p** dan **q,** maka KPK dari **p** dan **q** membagi **c,** yaitu:
[p, q]|c

Teorema 4.2
Untuk **c** > 0, maka **[cp, cq]** = c**[p, q]**

Teorema 4.3
Jika **(p, q)** = 1 maka **[p, q]** = **pq**

Teorema 4.4
Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** maka **(p, q)[p, q]** = **pq**

Teorema 4.5
Untuk bilangan bulat positif **p** dan **q,** jika **(p, q)** = 1 maka **[p, q]** = **pq**

D. SOAL LATIHAN

A. Tentukan apakah pernyataan-pernyataan ini benar atau salah! Jika salah berikan contoh kontranya, dan jika benar buktikan!
   1. [a, -b] = [a, b]
   2. Jika d|(a, b), maka d|[a, b]
   3. Jika **c** suatu kelipatan persekutuan dari **a** dan **b** maka (a, b)**|c**

B. Pilihlah jawaban yang benar dan buktikan!
   1. Jika [a, b] = ab, maka _________
      a. a dan **b** saling prima.
      b. (a, b) = bilangan prima.
      c. ab adalah bilangan prima.
   2. [126, 120] adalah __________
      a. 2520
      b. 15120

c. 1260

3. Apabila [a, b] = **p** dan (a, b) = **q,** maka ___________

a. **q|p**

b. **p|q**

c. **p** dan **q** saling prima.

BAB V

FUNDAMENTAL ARITMATIKA

A. URAIAN MATERI

1. BILANGAN PRIMA

Salah satu unsur penting dari bilangan bulat adalah bilangan prima. Bilangan prima memegang peranan penting dalam pengembangan teori bilangan. Banyak petunjuk dari sejarah mesir kuno yang menggambarkan bilangan prima. Buku *Elemen* yang ditulis oleh Euclid banyak menjelakan teori penting dari bilangan prima seperti ketakterbatasan bilangan prima dan teori fundamental aritmatika.

Setelah masa Mesir kuni, sangat jarang ditemukan tulisan yang membahas tentang bilangan prima. Baru sekitar abad ke-17, tahun 1640 Pierre de Fermat membuat teorema Fermat dengan menunjukkan bahwa $2^n + 1$ merupakan bilangan prima. Pada tahun 1747 Euler ikut andil dalam pengembangan teorema bilangan prima dengan menunjukkan bahwa bilangan genap dari perfect number adalah bilangan bulat dengan bentuk $2^{p-1}(2^p - 1)$. Pada abad ke-19 matematikawan Legendre dan Gauss juga ikut andil dalam pengembangan teori bilangan prima dengan membuat konjektur dari bilangan prima yang asimtotik pada fungsi $y = \frac{x}{\ln x}$.

Pengembangan pembuktian bilangan prima terus berlanjut hingga tahun 1878 bahkan sampai sekarang. Aplikasi dari bilangan prima tidak begitu banyak, penerapan teorema lebih banyak didiskusikan dalam matematika murni dan kriptografi.

Pada pembahasan sebelumnya disebutkan bahwa dua bilangan atau lebih yang memiliki faktor persekutuan terbesar 1 disebut **saling prima**. Hal ini dapat ditulis: **a** dan **b** saling prima apabila (a,b) = 1. Istilah lain dari bilangan **a** dan **b** saling prima adalah **a** dan **b** koprima atau **a** prima *relative* dengan **b**. Berikut dijelaskan definisi dari bilangan prima.

Definisi 5.1

Suatu bilangan bulat $p > 1$ disebut Bilangan prima jika bilangan tersebut hanya dapat dibagi $\boldsymbol{p}$ dan 1. Bilangan bulat yang tidak prima sering disebut dengan bilangan komposit.

Dari definisi di atas, bilangan 1 tidak termasuk dalam bilangan prima atau bilangan komposit. Bilangan 1 sering disebut sebagai unit sehingga bilangan bulat dapat dinyatakan dalam 3 jenis bilangan yaitu (1) biangan unit, (2) bilangan prima dan (3) bilangan komposit.

Bilangan 2, 3, 5, dan 7 merupakan empat bilangan prima pertama karena bilagan tersebut hanya dapat dibagi oleh bilangan 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan 2 merupakan satu-satunya bilangan prima yang genap dan sisanya adalah bilangan ganjil semua.

Dalam buku *Elemen* disebutkan sebuah teorema yang nantinya disebut sebagai fundamental teorema aritmatika. Fundamental teorema aritmatika menyebutkan bahwa setiap bilangan bulat lebih besar dari 1 memiliki faktor yang dapat ditulis dalam perkalian dengan bilangan prima. Dengan kata lain teorema ini menjelaskan bahwa bilangan prima adalah faktor dari semua bilangan bulat yang lebih besar dari 1. Sebagai contoh misalnya bilangan 30 = 2.3.5. Bilangan 2, 3 dan 5 adalah bilangan prima. Sebelum membuktikan fundamental teorema tersebut terlebih dahulu dijelaskan teorema-teorema yang berkaitan dengan bilangan prima.

Bilangan komposit memiliki hubungan erat dengan bilangan prima. Hubungan ini dapat dilihat dari faktor bilangan komposit itu sendiri yang dapat dibentuk dari bilangan prima. Hubungan ini nantinya sering disebut sebagai Teorema faktorisasi tunggal. Sebagai contoh, bilangan 140 dapat dinyatakan sebagai berikut.

140 = 2.7.5.2 atau
140 = 2.2.5.7 atau
140 = 5.2.2.7 dan sebagainya.

Perbedaan penguraian bentuk 140 di atas hanya terletak pada urutan faktornya saja. Faktor-faktor dari bilangan 140 tersebut adalah 2, 5 dan 7 yang merupakan bilangan prima. Berikut beberapa teorema pengantar yang dapat menjelaskan keterkaitan bilangan komposit dengan bilangan prima. Teorema-teorema ini selanjutnya akan menjadi landasan untuk pembuktian teorema faktorisasi tunggal.

Teorema 5.1

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti

Teorema ini dapat ditulis dalam bahasa matematika "untuk setiap a > 1 berlaku $a \mid p$ dengan **a** adalah bilangan bulat dan **p** adalah bilangan prima". Seperti diketahui bahwa bilangan bulat terdiri dari bilangan unit, prima dan komposit. Karena a > 1 dan **a** adalah bilangan buat maka terdapat dua kemungkinan yaitu a adalah bilangan prima atau a adalah bilangan komposit.

Apabila **a** adalah bilangan prima maka dari definisi bilangan prima jelas terbukti bahwa $a \mid a$.

Apabila **a** adalah bilangan komposit maka **a** mempunyai faktor bilangan positif selain 1 dan bilangan **a** itu sendiri. Misalnya faktor tersebut adalah $\mathbf{b_1}$ dengan $b_1 \mid a$. sehingga terdapat bilangan bulat positif $\mathbf{a_1}$ sedemikian sehingga

$$a = b_1a_1 \text{ dengan } 1 < a_1 < a$$

jika $\mathbf{a_1}$ adalah bilangan prima maka dari definisi bilangan prima jelas bahwa $a_1 \mid a$ sehingga teorema terbukti. Tetapi jika $\mathbf{a_1}$ adalah bilangan komposit maka $\mathbf{a_1}$ mempunyai faktor bilangan bulat positif selain 1 dan $\mathbf{a_1}$ misalnya kita sebut faktornya adalah $\mathbf{b_2}$ dengan $b_2 \mid a_1$. Sehingga terdapat bilangan bulat positif $\mathbf{a_2}$ sedemikian sehingga

$$a_1 = b_2a_2 \text{ dengan } 1 < a_2 < a_1$$

jika $\mathbf{a_2}$ adalah bilangan prima maka dari definisi bilangan prima jelas bahwa $a_2 \mid a_1$. Karena $a_1 \mid a$ dan $a_2 \mid a_1$ maka $a_2 \mid a$ maka teorema terbukti. Tetapi jika a_2 adalah bilangan komposit, maka proses seperti di atas dapat dilanjutkan sehingga diperoleh barisan

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ Dengan $a > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 .... > 1$

penguraian faktor-faktor komposit ini tentu akan berakhir pada suatu faktor prima karena faktor-faktor tersebut selalu lebih kecil dari bilangan yang difaktorkan dan selalu lebih besar dari 1. Dengan demikian apabila a adalah bilangan komposit maka a memiliki faktor bilangan prima dimana faktor bilangan prima tersebut habis membagi a. dengan demikian dapat disimpukan bahwa setiap bilangan bulat lebih besar dari 1 dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Dari Teorema 4.1 dapat kita ketahui bahwa jika bilangan bulat tersebut adalah bilangan genap maka salah satu faktor dari bilangan tersebut adalah 2 dan 2 adalah bilangan prima.

Teorema 5.2

Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 adalah suatu bilangan prima atau bilangan dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima.

Bukti

Ambil sebarang bilangan bulat positif $n > 1$. Menurut teorema 4.1 maka ada bilangan prima p_1 sedemikian sehingga $p_1 \mid n$. bentuk ini dapat ditulis.

$n = p_1 n_1$ dengan $1 \leq n_2 \leq n$

Jika $n_1 = 1$ maka $n = p_1$ sehingga n adalah suatu bilangan prima. Tetapi jika $n_1 > 1$ maka berdasarkan teorema 4.1 lagi , terdapat suatu bilangan prima p_2 sedemikian sehingga $p_2 \mid n_1$. Bentuk ini dapat ditulis:

$n_1 = p_2 n_2$ dengan $1 \leq n_2 \leq n_1$

Jika $n_2 = 1$ maka $n_1 = p_2$ sehingga $n = p_1 p_2$ berarti teorema terbukti. Tetapi jika $n_2 > 1$ maka ada suatu bilangan prima p_3 sedemikian sehingga $p_3 \mid n_2$ dan dapat ditulis:

$n_2 = p_3 n_3$ dengan $1 \leq n_3 \leq n_2$

Jika n_3 = 1 maka n_2 = p_3 sehingga $n = p_1p_2p_3$ dan teorema terbukti. Tetapi jika n_3 > 1 maka proses di atas dapat dilanjutkan sehingga akan berakhir pada n_k = 1 dan n dapat ditulis dalam bentuk $n = p_1p_2p_3 \ldots . p_k$ yaitu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. (terbukti)

Contoh 5.1

- Bilangan bulat 60 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima sebagai berikut.
  60 = 2.2.3.5 atau dapat ditulis 60 = 2^2.3.5
  Bilangan 552 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima yaitu
- 552 = 2.2.2.3.23 atau dapat ditulis 552 = 2^3.3.23

Teorema 4.2 sangat beruna dalam menentukan FPB dan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih. Penentukan FPB dan KPK tersebut dapat dilakukan dengan menyatakan bilangan bulat menjadi perkalian bilangan prima berpangkat atau sering disebut bentuk kanonik. Untuk FPB dapat diambil bilangan prima berpangkat yang minimum sedangkan untuk KPK dapat diambil bilangan prima berpangkat yang maksimum.

Contoh 5.2

Tentukan FPB dan KPK dari 192 dan 288!

Solusi

Dengan menggunakan teorema 4.2 kita dapat menyatakan bilangan 192 dan 288 dalam bentuk perkalian bilangan prima sebagai berikut.

192 = 2. 2.2.2.2.2.3 = 2^6.3

288 = 2.2.2.2.2.3.3 = $2^5.3^2$

FPB (192,288) = (192,288) = $2^{\min(6,5)}.3^{\min(1,2)} = 2^5.3^1$ = 32.3 = 96

KPK (192,288) = [192,288] = $2^{\text{maks}(6,5)}.3^{\text{maks}(1,2)} = 2^6.3^2$ = 64.9 = 576

Contoh 5.3

Tentukan FPB dan KPK dari bilangan 84, 90 dan 132!

Solusi

Dengan menggunakan teorema 4.2 kita dapat menyatakan bilangan 84, 90 dan 132 dalam bentuk perkalian bilangan prima sebagai berikut.

$84 = 2.2.3.7 = 2^2.3.5^0.7^1.11^0$

$90 = 2.5.3.3 = 2^1.3^2.5^1.7^0.11^0$

$132 = 2.2.3.11 = 2^2.3^1.5^0.7^0.11^1$

FPB $(84,90,132) = (84,90,132) = 2^{\min(1,2)}.3^{\min(1,2)}.5^{\min(0,1)}.7^{\min(0,1)}.11^{\min(0,1)}$

$= 2^1.3^1.5^0.7^0.11^0 = 6$

KPK $(84,90,132) = [84,90,132]$

$= 2^{\text{maks}(1,2)}.3^{\text{maks}(1,2)}.\ 5^{\text{maks}(0,1)}.7^{\text{maks}(0,1)}.11^{\text{maks}(0,1)}$

$= 2^2.3^2.5^1.7^1.11^1 = 4.9.5.7.11 = 13860.$

Teorema 4.2 sering disebut sebagai teorema fundamental aritmatika. Dengan menggunakan teorema tersebut, dapat ditentukan FPB dan KPK dari dua bilangan bulat atau lebih. Terdapat pertanyaan mendasar terkait dengan bilangan prima. Pertanyaan tersebut adalah “Bagaimana cara mengetahui suatu bilangan bulat positif adalah bilangan prima atau bukan?”. Pertanyaan ini akan mudah dijawab jika bilangan bulat tersebut kurang dari 100.

Dengan cara sederhana untuk menentukan suatu bilangan bulat positif merupakan bilangan prima atau bukan adalah dengan mencoba membagi bilangan tersebut dengan bilangan-bilangan sederhana yang sering dikenal seperti 2, 3, 5, 7, 11 dan seterusnya. Jika suatu bilangan bulat positif habis dibagi oleh bilangan-bilangan tersebut, maka dapat pastikan bahwa bilangan tersebut bukan bilangan prima. Namun cara ini tidaklah efesien karena tidak memiliki batas dalam membagi dengan beberapa bilangan. Terdapat teorema yang mempermudah dalam menentukan batas-batas bilangan yang dapat digunakan untuk membagi bilangan bulat positif tersebut..

Teorema 5.3

Jika n suatu bilangan komposit, maka n memiliki faktor k dengan $1 < k < \sqrt{n}$.

Bukti

Karena n suatu bilangan komposit, maka terdapat bilangan-bilangan positif k dan m sedemikian sehingga:

$km = n$ dengan $1 < k < n$ dan $1 < m < n$

Apabila k dan m kedua-duanya lebih besar dari $\sqrt{n}$, yaitu $k > \sqrt{n}$ dan $m > \sqrt{n}$, maka

$n = km > \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$

Terdapat n > n, hal ini tidak mungkin. Oleh karena itu salah satu dari k atau m harus tidak lebih kecil dari $\sqrt{n}$, misalnya k yaitu $1 < k < \sqrt{n}$. Jadi n memiliki faktor k dengan $1 < k < \sqrt{n}$.

Kontraposisi dari teorema 4.3 adalah

Jika n tidak memiliki faktor k dengan $1 < k < \sqrt{n}$, maka n adalah suatu bilangan prima.

Kontraposisi dari teorema 4.3 ini dapat dijadikan cara untuk menentukan batas dari bilangan-bilangan yang dicoba untuk membagi habis suatu bilangan bulat.

Contoh 5.4

Tentukan apakah 2167 adalah bilangan prima atau bukan?

Solusi

Jika diasumsikan bahwa bilangan 2167 adalah bilangan komposit maka dengan menggunakan teorema 4.3 dapat ditentukan bahwa bilangan 2167 memiliki faktor k dengan $1 < k < \sqrt{2167}$ atau sekitar $1 < k < 46$. Karena 2167 adalah bilangan ganjil maka tentu 2167 tidak habis dibagi 2 dan kelipatannya. Demikian pula bahwa 2167 tidak habis dibagi 3 dan kelipatannya. Karena tidak ada bilangan ganjil kurang dari 46 yang habis membagi 2167 maka dapat disimpulkan bahwa 2167 adalah bilangan prima.

Selain dengan teorema tersebut, menentukan suatu bilangan adalah bilangan prima atau bukan dapat dilakukan dengan metode Eratosthenes (276-194 SM) yang sering disebut dengan istilah **Saringan Eratosthenes**.

Saringan Eratosthenes

Pada dasarnya saringan Eratosthenes menggunakan prinsif dari kontraposisi dari teorema 4.3 yang sudah dibahas sebelumnya yang menyatakan bahwa jika suatu bilangan bulat n > 1 tidak habis dibagi oleh bilangan k dengan $1 < k < \sqrt{n}$ maka bilangan n tersebut adalah bilangan prima. Fakta inilah yang digunakan dalam saringan Eratosthenes dalam menentukan suatu bilangan adalah bilangan prima atau bukan. Berikut langkah-langkah dari penggunaan saringan Eratosthenes.

1. Membuat daftar bilangan dari 1 sampai dengan n
2. Melingkari bilangan 2 dan mencoret kelipatannya
3. Melingkari bilangan 3 dan mencoret kelipatannya
4. Melingkari bilangan 5 dan mencoret kelipatannya
5. Melingkari bilangan 7 dan mencoret kelipatannya
6. Melingkari bilangan 11 dan mencoret kelipatannya
7. Dan selanjutnya.

Dari langkah di atas, akan ditemukan bilangan-bilangan prima yaitu bilangan yang dilingkari dan bilangan yang tidak dicoret. Bilangan yang dicoret jelas adalah bilangan komposit karena memiliki faktor bilangan yang dilingkari.

Sebagai contoh misalnya akan ditentukan bilangan prima dari 1 – 100, maka dapat dibuat daftar bilangan dari 1 – 100 sebagai berikut.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Kemudian dilakukan langkah-langkah saringan Eratosthenes sebagai berikut

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Sehingga diperoleh bilangan prima dari 1 – 100 adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ,37 ,41, 43, 47, 53, 9, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97.

2. FAKTORISASI TUNGGAL

Pada pembahasan sebelumnya terlah dibahas teorema 4.2 yang menyatakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dibagi habis oleh bilangan prima. Teorema 4.2 tersebut kemudian berlanjut dengan teorema 4.3 yang menyatakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat ditulis dalam perkalian bilangan prima. Pada pembahasan selanjutnya akan dibahas keterkaitan anatara pemfaktoran bilangan bulat positif dengan faktor-faktor prima yang tunggal.

Teorema 5.4

Jika p suatu bilangan prima dan p | ab, maka p | a atau p | b

Bukti

Karena p suatu bilangan prima, maka untuk sebarang bilangan bulat a berlaku (a,p) = 1 atau (a,p) = p. jika (a,p) = 1 dan p | ab maka jelas bahwa p | b dan jika (a,p) = p maka p | a.

Dengan demikian terbukti bahwa p | a atau p | b.

Teorema 5.5 (Teorema Faktorisasi Tunggal)

Pemfaktoran suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 atas faktor-faktor prima adalah tunggal kecuali urutan dari faktor-faktornya.

Bukti

Pada teorema 4.3 dinyatakan bahwa setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Akan dibuktikan bahwa faktor-faktor prima tersebut adalah tunggal.

Ambil sembarang bilangan bulat positif n > 1.

Jika n suatu bilangan prima maka n adalah faktornya sendiri.

Jika n adalah bilangan komposit dan **diandaikan** bahwa pemfaktoran n atas faktor-faktor prima adalah tidak tunggal. Misalnya:

$n = p_1p_2p_3 \ldots p_t$ dan $n = q_1q_2q_3 \ldots q_r$

dengan p_i dan p_j masing-masing adalah bilangan-bilangan prima untuk i = 1,2,3.. t dan j = 1,2,3…r serta $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \ldots \geq p_t$ dan $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \ldots \geq q_t$ dengan $t \leq r$.

Karena $n = p_1p_2 \ldots p_t$ maka $p_1 \mid n$ maka dengan menggunakan teorema 4.4 diperoleh $p_1 \mid q_1q_2q_3 \ldots q_r$. dengan demikian diperoleh $p_1 = q_k$ untuk suatu k dengan $1 \leq k \leq r$. mengingat bahwa $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \ldots \geq q_t$ maka $p_1 \leq q_1$.

Karena $n = q_1q_2q_3 \ldots q_r$ maka $q_1 \mid n$ sehingga $q_1 \mid p_1p_2p_3 \ldots p_t$. dengan menggunakan teorema 4.4 diperoleh bahwa $q_1 = p_m$ untuk suatu m dengan $1 \leq m \leq t$. dan mengingat $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \ldots \geq p_t$ maka $q_1 \leq p_1$.

Karena $p_1 \leq q_1$ dan $q_1 \leq p_1$ maka $p_1 = q_1$ sehingga dari permisalan n sebelumnya kita peroleh $p_2p_3 \ldots p_t = q_2q_3 \ldots q_r$. jika proses tersebut dilanjutkan maka akan diperoleh

$p_2 = q_2$ sehingga $p_3p_4 \ldots p_t = q_3q_4 \ldots q_r$
$p_3 = q_3$ sehingga $p_4p_5 \ldots p_t = q_4q_5 \ldots q_r$

dan seterusnya.

Apabila t = r maka proses tersebut akan berakhir pada $p_t = q_r$. dengan demikian permisalan yang menyatakan bahwa pemfaktoran n atas faktor-faktor prima tersebut tidak tunggal adalah salah. Dengan demikian pemfaktoran n atas faktor-faktor prima adalah tunggal.

Teorema 5.6 (Teorema Euclides)

Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga

Bukti

Teorema ini akan dibuktikan dengan bukti tak langsung atau bukti kontradiksi.

Misalkan $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ …. Adalah urutan-urutan bilangan prima dan andaikan ada bilangan prima tersbesar misalkan kita sebut p_n. jika dibentuk suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 misalkan kita sebut N maka berdasarkan teorema 4.3 kita dapat menulis N sebagai berikut.

N = p1p2p3…pn + 1

Karena N > 1 menurut teorema 4.1 maka N dapat dibagi oleh suatu bilangan prima sehingga N dapat dibagi oleh sekurang-kurangnya satu bilangan prima dari p_1, p_2, p_3 … p_n.

Misalkan bilangan prima p_k dengan $1 \leq k \leq n$ yang membagi N atau dapat ditulis $p_k \mid N$.

$N = p_1p_2p_3 \ldots p_n + 1$ dengan $p_k \mid N$ dan $p_k \mid p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$. maka $p_k \mid 1$

Hal ini tidaklah mungkin karena p_k adalah suatu bilangan prima. Oleh karena itu pengandaian yang menyatakan bahwa terdapat bilangan prima terbesar adalah salah sehingga pengandaian tersebut harus diingkari. Dengan demikian tidak ada bilangan prima yang terbesar atau dengan kata lain banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga.

B. RANGKUMAN

1. Bilangan prima adalah bilangan yang hanya dapat dibagi oleh bilangan 1 dan bilangan itu sendiri
2. Bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki faktor lain selain 1 dan bilangan itu sendiri. dengan kata lain bilangan komposit adalah bilangan tidak prima.
3. Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 memiliki faktor bilangan prima
4. Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dapat ditulis dalam bentuk perkalian bilangan prima.
5. Pemfaktoran bilangan bulat n atas faktor-faktor prima adalah tunggal
6. Banyaknya bilangan prima adalah tak berhingga.

C. SOAL LATIHAN

1. Tentukan FPB dan KPK dari 198, 216 dan 252!
2. Tentukan FPB dan KPK dari 6552 dan 4563!
3. Buktikan bahwa bilangan prima yang berbentuk $n^3 - 1$ hanyalah 7.
4. Buktikan bahwa jika n suatu bilangan komposit yang lebih dari 4 maka $n \mid (n - 1)$.
5. Tentukan bilangan prima yang kurang dari 160!

6. Buktikan jika p suatu bilangan prima dan $p \mid a^n$ dengan n suatu bilangan asli maka $p \mid a$.
7. Buktikan jika $2^n - 1$ adalah bilangan prima maka n suatu bilangan prima pula.
8. Untuk $n > 3$ tunjukkan bahwa bilangan-bilangan bulat n, n +2 dan n + 4 tidak mungkin semuanya prima.
9. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat berbentuk $n^3 + 1$ yang merupakan bilangan prima kecuali 2.
10. Tentukan suatu bilangan prima p sedemikian sehingga 17p + 1 adalah suatu bilangan kuadrat.V

BAB VI

PERSAMAAN DIOPHANTINE

A. URAIAN MATERI

Dalam kehidupan setiap hari, kita sering terlibat dalam masalah-masalah yang melibatkan perhitungan. Contohnya jika kita mempunyai uang sebesar Rp. 50.000, uang tersebut digunakan untuk membeli buku dan pensil. Harga Sebuah buku Rp.5000 dan pensil Rp.2500. Berapa banyak buku dan pensil yang dapat dibeli dari jumlah uang sebanyak 50.000 tadi?

Untuk memecahkan masalah di atas, kita misalkan buku = x dan pensil = y, maka persamaan yang dapat dibentuk adalah 5000x +2500y = 50000. Tugas kita selanjutnya adalah mencari solusi dari masalah di atas, yaitu mencari nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut.

Dari contoh di atas, koefisien nilai x dan y serta akar-akar persamaan merupakan anggota bilangan bulat. Contoh tersebut merupakan salah satu contoh persamaan linear *Diophantine*. Persamaan *Diophantine* merupakan persamaan yang akar akarnya adalah bilangan bulat. Persamaan ini dikemukakan oleh matematikawan Diophantine pada masa yunani kuno. Brahmagupta yang merupakan matematikawan india menjadi orang pertama yang menggambarkan solusi dari persamaan *Diophantine*.

Teorema 6.1

Untuk a dan b bilangan bulat dengan d = (a,b), Persamaan ax + by = c tidak mempunyai solusi bilangan bulat jika $d \nmid c$. Jika $d|c$, maka terdapat tak berhingga banyak solusi dari bilangan bulat. Selain itu jika x = x_0 dan y = y_0 adalah bagian solusi dari persamaan maka semua solusi akan diberikan oleh:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \qquad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n,$$ dimana n adalah bilangan bulat.

Bukti:

Asumsikan bahwa x dan y anggota bilangan bulat sedemikian sehingga $ax + by = c$. Maka karena d | a dan d | b, menurut teorema 1.9, diperoleh d|c. Karena itu jika d ∤ c maka persamaan itu tidak mempunyai solusi.

Sekarang disumsikan d | c, Dari teorema 3.8 (d = ma + nb), ada bilangan bulat s dan t sehingga diperoleh

d = as + bt .... (3.1)

Karena d|c berarti ada bilangan bulat e sehingga c = de

Kalikan (3.1) dengan e, sehingga diperoleh :

c = de = (as + bt)e = a (se) + b (te)

salah satu solusi yang diberikan adalah x = x_0 dan y = y_0 , dimana x_0 = se dan y_0 = te.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa ada tak berhingga banyaknya solusi dari persamaan, ambil x = x_0 + $\left(\frac{a}{d}\right)$n dan y = y_0 – $\left(\frac{b}{d}\right)$n, dimana n adalah anggota bilangan bulat.

Maka diperoleh pasangan (x,y) adalah solusi karena

ax + by = $a\left(x_o + \left(\frac{b}{d}\right)n\right) + b\left(y_o + \left(\frac{a}{d}\right)n\right)$

= $ax_o + a\left(\frac{b}{d}\right)n + by_o - b\left(\frac{a}{d}\right)n$

= ax_0 + by_0 = c

Sekarang akan diperlihatkan setiap solusi dari persamaan ax + by = c.

Andaikan x dan y adalah bilangan bulat dengan ax + by = c.

Karena ax_0 + $by_0 = c$, dengan pengurangan diperoleh

ax + by = ax_0 + by_0

ax + by - (ax_0+ by_0) = 0

(ax –ax_0) + (by - by_0) $= 0$

a(x –x_0) + b(y - y_0) $= 0$

a(x – x_0) = b($y_0 - y$)

kedua ruas dibagi dengan d, sehingga diperoleh

$\left(\frac{a}{d}\right)(x - x_0) = \left(\frac{b}{d}\right)(y_0 - y)$

Dari teorema 3.6, diketahui bahwa $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Berdasarkan Lemma 3.4 ini menunjukkan bahwa $\left(\frac{a}{d}\right) \mid (y_0 - y)$.

Karena n adalah anggota bilangan bulat dengan $\left(\frac{a}{d}\right) n = (y_0 - y)$, berarti

$$\mathbf{y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n}$$

masukan nilai y untuk mencari nilai x

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y)$$
$$a(x - x_0) = b\left(\frac{a}{d}\right) n$$
$$\mathbf{x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n}$$

dengan n adalah bilangan bulat.
Teorema ini digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan linear ax + by = c dimana a,b,c mempunyai FPB.

Contoh 6.1

1. Tentukan semua solusi dari PDL 12x + 18y = 50

   Penyelesaian :

   Gunakan Teorema Euclid untuk menentukan FPB (12,18)

   $18 = 1 \times 12 + 6$
   $12 = 2 \times 6 + 0$

   FPB (12,18) = 6, dan karena 50 tidak habis dibagi 6 ($6 \nmid 50$) maka persamaan ini tidak mempunyai solusi bulat.
2. Tentukan semua solusi bulat yang memenuhi PDL :2x + 5y = 11

   Penyelesaian :

   Gunakan teorema Euclid untuk menentukan FPB

   $5 = 2 \times 2 + 1$
   $2 = 2 \times 1 + 0$

FPB (5,2) = 1, dan karena 11 habis dibagi 1 (1|11) maka persamaan ini mempunyai solusi. Akan dicari penyelesaian dari PDL tersebut, yaitu:

$1 = 5 - 2 \times 2$
$1 = (5 \times 1) - (2 \times 2)$ .... Dikalikan 11
$11 = 11\,[(5 \times 1) - (2 \times 2)]$
$\quad = (5 \times 11) + (2 \times (-22))$

Jadi diperoleh solusi $x_0 = -22$ dan $y_0 = 11$

Ini merupakan salah satu solusi dari PDL 2x + 5y = 11, sehingga solusi umumnya adalah:

$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n$ dan $y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n$

$\quad = -22 + \left(\frac{5}{1}\right)n \qquad\qquad = 11 - \left(\frac{2}{1}\right)n$

$\quad = -22 + 5n \qquad\qquad = 11 - 2n$

Untuk semua n adalah anggota bilangan bulat.

3. Ibu menyuruh Dewi untuk membeli dua macam buah, yaitu mangga dan jeruk. Ibu memberikan uang Rp. 100.000, 00 kepada Dewi untuk mendapatkan sebanyak mungkin buah tetapi jeruk lebih banyak dari mangga. Bila harga mangga Rp. 700,00 per biji dan jeruk Rp. 1.300,00 per biji, tentukan banyak buah yang harus dibeli oleh Dewi.

Penyelesaian :

Misalkan x menyatakan banyak mangga dan y menyatakan banyak jeruk yang harus dibeli maka permasalahan di atas dapat diformulasikan menjadi :

$700x + 1300y = 100000$, $x \geq 0$ & $y \geq 0$ dan $y \geq x$

Setelah disederhanakan diperoleh persamaan Diophantine :

$7x + 13y = 1000$

Karena FPB(7, 13) = 1 maka dipastikan persamaan ini mempunyai penyelesaian. Dengan algoritma Euclid diperoleh :

$1 = 7 \,.\, 2 + 13 \,.(-1)$, kedua ruas dikalikan dengan 1000
$1000 = 7 \,.\, 2000 + 13 \,.\, (-1000)$

maka diperoleh penyelesaian khususnya yaitu : x_0 = 2000 dan y_0 = -1000

Sehingga penyelesaian umum persamaan ini diberikan oleh :

x = 2000 + 13n
y = -1000 - 7n   untuk n ∈ B

Karena disyaratkan x ≥ 0 maka diperoleh

2000 + 13n ≥ 0 maka $n \geq -\frac{2000}{13} \cong -153{,}84$ maka n = {-153, -152, -151, ….}

Syarat pada y ≥ 0 menghasilkan batasan n berikut

-1000 - 7n ≥ 0 maka $n \leq -\frac{1000}{7} \cong -142{,}85$ maka n = {…., -145, -144, -143}

Syarat y > x memberikan hasil sebagai berikut :

-1000 - 7n > 2000 + 13n maka n < -150 maka n = {-153, -152, -151}

Nilai n yang memenuhi ketiga syarat ini adalah

n = {-153, -152, -151}

Penyelesaian yang bersesuaian dengan n ini akan bernilai positif, tetapi kita perlu memilih n yang membuat nilai x + y terbesar. Perhatikan tabel berikut :

n	x	y	x + y
-153	11	71	82
-152	24	64	88
-151	37	57	94

Jadi, Dewi harus membeli 37 biji mangga dan 57 biji jeruk.

Teorema 6.2

Jika $a_1, a_2, ..., a_n$ adalah bilangan bulat tak negatif, maka persamaan

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = c$

mempunyai penyelesaian bulat jika dan hanya jika $d = (a_1, a_2, \ldots., a_n)|c$. Lebih dari itu jika ada penyelesaian, maka ada tak hingga banyak penyelesaian.

Bukti :

Jika ada bilangan bulat $x_1, x_2, \ldots., x_n$ sedemikian sehingga $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots. + a_n x_n = c$ maka karena $d|= a_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots., n$, menurut teorema 1.9 $d|c$. Oleh karena itu, jika $d\nmid c$ maka tidak ada solusi bulat dari persamaan tersebut.

Akan digunakan induksi matematika untuk untuk membuktikan ada tak hingga banyak solusi jika $d|c$. Perhatikan bahwa menurut teorema 3.23 pernyataan ini benar ketika $n = 2$.

Sekarang, umpamakan ada tak hingga banyak solusi untuk semua persamaan dalam n variabel memenuhi hipotesis. Menurut teorema 3.9, himpunan kombinasi linear dari $a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1}$ adalah sama ketika mengalikan dari himpunan-himpunan (a_n, a_{n+1}). Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat y ada tak hingga banyak solusi dari PDL $a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = (a_n, a_{n+1})y$. Ini menunjukkan persamaan awal dalam $n + 1$ variabel dapat direduksi menjadi PDL dalam n variabel :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots. + a_{n-1} x_{n-1} + (a_n, a_{n+1})y = c.$$

Perhatikan bahwa c habis dibagi oleh $(a_1, a_2, \ldots., a_{n-1}, (a_n, a_{n+1}))$ karena menurut Lemma 3.2 persamaan FPB ini $(a_1, a_2, \ldots., a_n, a_{n+1})$. Dengan induksi hopotesis persamaan ini mempunyai tak hingga banyak solusi bulat, sebagaimana PDL dalam n variabel dimana FPB dari koefisisn-koefisien membagi konstanta c. Ini menunjukka bahwa ada tak hingga banyak solusi dari persamaan awal.

Contoh 6.2

1. Tentukan semua solusi dari persamaan berikut :

   $2x + 3y + 4z = 5$

Penyelesaian :

FPB (2, 3, 4) = 1 dan 1|5, maka menurut teorema 3.24 terdapat tak berhingga banyak solusi dari persamaan tersebut.
Selanjutnya persamaan ini diubah terlebih dulu menjadi persamaan dalam dua variabel :
2x + 3y = 5 – 4z
Digunakan algoritma Euclid untuk mencari FPB (2,3) :

$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$3 = 2 \times 1 + 0$$

Jadi, FPB (2,3) = 1 dan 1|5 – 4z untuk setiap bilangan bulat z. Sehingga dapat diambil z untuk setiap bilangan bulat t.
Selanjutnya akan dicari penyelesaian persamaan itu :
$1 = 3 - 2$ .... kalikan dengan 5 – 4t

$$\begin{aligned} 5 - 4t &= 3(5 - 4t) - 2(5 - 4t) \\ &= 5 \times 3 + 3 \times 4t - 2 \times 5 + 2 \times 4t \\ &= 5 \times 3 - 12t - 5 \times 2 - 8t \\ &= 5 \times 3 - 5 \times 2 - 4t \\ &= 5 \times 3 - 5 \times 2 - 2 \times 2t \\ &= 3 \times 5 + 2(-5 - 2t) \end{aligned}$$

Maka x = -5 – 2t dan y = 5
Ini merupakan salah satu solusi dari persamaan diatas, sehingga solusi umumnya adalah :
x = -5 – 2t + 3s
y = 5 – 2s
z = t , untuk setiap t ∈ B

2. Tentukan solusi dimana x dan y bilangan bulat dari persamaan diopantine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$.

Penyelesaian :

Persamaan diopantine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$ berbentuk pecahan. Agar lebih mudahnya persamaan tersebut diubah dulu dalam bentuk persamaan biasa :
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14} \rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{14} \rightarrow$ 14(x + y) = 1(xy) $\rightarrow$ 14x + 14y = xy

Diperoleh persamaan 14x + 14y = xy, sehingga persamaan tersebut diubah menjadi :

$xy + 14x + 14y + 196 = 196$

$(x – 14) (y – 14) = 196$

Diperoleh (x – 14) (y – 14) = 196, sehingga (x – 14) dan (y – 14) adalah pembagi-pembagi yang saling berpasangan dari 196 (katakan kedua pasangan itu a dan b).

Misalkan a = x – 14 dan b = y – 14 merupakan pasangan penyelesaian bulat dari persamaan diopantin tersebut, sehingga solusi umumnya adalah :

x = a + 14

y = b + 14

untuk $\forall\ \mathrm{a, b}\ \in \mathrm{B}$, $\mathrm{dengan\ a} \times \mathrm{b} = 196$ dan a, b faktor dari 196.

B. RANGKUMAN

1. Persamaan Diophantine Linier ax + by = c tidak mempunyai solusi bilangan bulat jika $d \nmid c$.
2. Persamaan Diophantine Linier ax + by = c mempunyai solusi Jika d|c. solusi dari PDL tersebut adalah banyak solusi yang dapat dinyatakan dengan persamaan:

   $$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \qquad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n,$$
3. Jika a_1, a_2, …., a_n adalah bilangan bulat tak negatif, maka persamaan

   $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c$$

   mempunyai penyelesaian bulat jika dan hanya jika d = (a_1, a_2, …., a_n)|c. Lebih dari itu jika ada penyelesaian, maka ada tak hingga banyak penyelesaian

C. SOAL LATIHAN

1. Temukan semua solusi atau tunjukkan jika PDL berikut tidak memiliki solusi.

   a. $2x + 5y = 11$

b. $17x + 13y = 100$
c. $60x + 18y = 97$
d. $21x + 14y = 147$
e. $12x + 18y = 50$
f. $25x + 95y = 970$
g. $30x + 47y = -11$

2. Tentukan semua solusi dari PDL berikut
   a. $7x + 3y + 4z = 5$
   b. $7x + 21y + 35z = 8$
   c. $2x + 5y + 4z + 3p = 5$

BAB VII

KEKONGRUENAN

Istilah kongruen merupakan istilah yang sering terdengar pada mata kuliah Geometri. Pada mata kuliah teori bilangan, istilah kongruen berkaitan dengan keterbagian bilangan bulat. Kekongruenan dalam teori bilangan juga diikuti dengan istilah modulo yang secara *ethimologi* berarti sisa. kekongruenan modulo dikembangkan pada awal abad ke-19 oleh Karl **Friedrich Gauss**, salah satu matematikawan paling terkenal dalam sejarah.

A. URAIAN MATERI

Definisi 7.1

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Jika a, b $\in \mathrm{B}$**,** dapat dikatakan bahwa a kongruen dengan b modulo m jika m | (a – b).

Jika a kongruen b modulo m, dapat dituliskan $\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}$ (mod m)**.** Jika m∤(a – b), dituliskan a $\not\equiv \mathrm{b}$ (mod m), dan dikatakan bahwa a dan b **tidak kongruen modulo m**.

Contoh 7.1

- $13 \equiv 1$ (mod 2) dibaca “13 kongruen dengan 1 modulo 2” yang berarti 2 | (13 – 1) atau 2 |12
- $-3 \equiv 30$ (mod 11) dibaca “-3 kongruen dengan 30 modulo 11” yang berarti 11 | (-3 – 30) atau 11 | -33
- $31 \not\equiv 5$ (mod -6) dibaca “31 tidak kongruen dengan 5 modulo -6” karena -6∤(31-5) = 26

Kekongruenan modulo banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya pada kasus waktu yang mana waktu dapat dinyatakan dalam 24 jam tetapi dikenal angka pada jarum jam paling besar adalah 12. Sistem jam bekerja baik modulo 12 maupun modulo 24 untuk jam, dan modulo 60 untuk menit dan detik, kalender bekerja pada modulo 7 untuk hari dalam seminggu dan modulo 12 untuk bulan. Meteran serba guna sering beroperasi pada modulo 1000 dan odometer bekerja pada modulo 100000.

Contoh 7.2

- Pukul 23:00 berarti pukul 11 malam karena $23 \equiv 11 \pmod{12}$.

Ketika bekerja menggunakan kekongruenan, akan sangat berguna mengubah ke kesamaannya. Untuk melakukan hal ini, diperlukan teorema di bawah ini.

Teorema 7.1

Jika a dan b bilangan bulat, maka **$a \equiv b$ (mod m)** jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga **a = b + km**.

Bukti:

Jika **$a \equiv b$ (mod m)**, maka m | (a – b). Ini berarti bahwa ada suatu k bilangan bulat dengan km = a – b, sehingga **a = b + km**.
Sebaliknya, jika ada bilangan bulat k dengan a = b + km, kemudian km = a – b. Oleh karena itu, m | (a – b), dan akibatnya, $a \equiv b$ (mod m).

Contoh 7.3

- 15 ≡ 1 (mod 7) karena $\exists_2 \in \mathrm{B}, 15 = 1 + 2 \times 7$
- $31 \not\equiv 5$ (mod 7) karena $\forall_x \in \mathrm{B}, 8 \neq -1 + 7x$

Untuk pemahaman lebih lanjut terkait dengan kekongruenan dan sifat-sifat yang ada pada kekongruenan, Berikut dijelaskan beberapa Teorema yang berkaitan dengan sifat penting dalam kekongruenan.

Teorema 7.2

Misal m suatu bilangan bulat positif. Kekongruenan modulo m memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Refleksif. Jika a suatu bilangan bulat, maka $a \equiv a$ (mod m)

2. Simetris. Jika a dan b ∈ $\mathbf{B}$ sedemikian sehingga a ≡ b (mod m), maka b ≡ a (mod m)
3. Transitif. Jika a, b, dan c ∈ $\mathbf{B}$ dengan a ≡ b (mod m) dan b ≡ c (mod m), maka a ≡ c (mod m).

Bukti :

(i) Jelas bahwa a ≡ a (mod m) karena m | (a – a) = 0

(ii) Jika $a \equiv b$ (mod m) maka m | (a – b). Oleh karena itu, ada suatu bilangan k sehingga $km = a - b$. Hal ini menunjukkan $(-k)m = b - a$ sehingga m | (b – a). Akibatnya, $b \equiv a$ (mod m)

(iii) Jika $a \equiv b$ (mod m), dan $b \equiv c$ (mod m), maka m | (a – b) dan m | (b – c). Oleh karena itu, ada bilangan bulat k dan l dengan $km = a - b$ dan $lm = b - c$. Sehingga, $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$. Ini menunjukkan bahwa m | (a – c) dan $a \equiv c$ (mod m).

Contoh 7.4

1. 2 ≡ 2 (mod 6) karena 6 | (2 – 2) = 0. (sifat refleksif)
2. -9 ≡ 5 (mod 7) karena $\exists_2 \in B, -9 = 5 + (-2) \times 7$, dan $5 = -9 + 2 \times 7$, untuk 2 ∈ B
   Sehingga dapat dikatakan pula 5 ≡ -9 (mod 7) (sifat simetris)
3. Sifat transitif
   22 ≡ 7 (mod 7) dan 7 ≡ 2 (mod 7) maka 22 ≡ 2 (mod 7) karena $\exists_4 \in B, 22 = 2 + 4 \times 5$

Berdasarkan Teorema 7.2, dapat diperoleh bahwa himpunan bilangan bulat dapat dibagi ke dalam m himpunan berbeda yang disebut kelas kekongruenan modulo m, masing-masing kelas terdiri atas bilangan bulat yang saling kongruen modulo m.

Contoh 7.5

Kesesuaian 4 kelas kekongruenan modulo 4 sebagai berikut:

$. . . \equiv -10 \equiv -5 \equiv 0 \equiv 5 \equiv 10 \equiv . . .$ (mod 5) = [0]

$. . . \equiv -11 \equiv -6 \equiv 1 \equiv 6 \equiv 11 \equiv . . .$ (mod 5) = [1]

$. . . \equiv -12 \equiv -7 \equiv 2 \equiv 7 \equiv 12 \equiv . . .$ (mod 5) = [2]
$. . . \equiv -13 \equiv -8 \equiv 3 \equiv 8 \equiv 13 \equiv . . .$ (mod 5) = [2]

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Diberikan suatu bilangan bulat a, dengan algoritma pembagian kita dapatkan **a = bm + r** dimana **0 ≤ r ≤ m – 1**. Sebut **r** sebagai residu terkecil nonnegatif dari a modulo m. Dapat dikatakan bahwa r adalah hasil dari pengurangan a modulo m. Dapat juga menggunakan notasi a **mod** m = r untuk menunjukkan bahwa r adalah residu yang diperoleh ketika a dibagi m. Misalnya 17 **mod** 5 = 2 dan -8 **mod** 7 = 6.

Dari persamaan a = bm + r, ini berarti $a \equiv r$ (mod m). Oleh karena itu, setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu bilangan bulat pada himpunan 0, 1, ..., m – 1. Karena tidak ada dua bilangan bulat 0, 1, ..., m – 1 yang kongruen modulo m, maka kita memiliki m bilangan bulat sedemikian sehingga setiap bilangan bulat kongruen tepat satu dari m bilangan bulat itu.

Contoh 7.6

Tentukan residu positif terkecil 1! + 2! + 3! + 4! + …. + 10! pada modulo 3.

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa :

n! = 1.2.3.4 …. . n, ini berarti
2! = 2 ≡ 2 mod (3)
3! = 1.2.3 = 3.2 ≡ 0 mod (3)
4! = 1.2.3.4 = 3.2.4 ≡ 0 mod (3)
……
n! = 1.2.3.4. …. . n = 3.2.4. … . n ≡ 0 mod (3)

sehingga,

1! + 2! + 3! + 4! + …. + 10! (mod 3)
= 1 + 2 + 0 (mod 3) + (0 mod 3) + …. + 0 mod (3) ≡ 0 mod (3)

Teorema 7.3

Jika a, b bilangan bulat dan m bilangan bulat positif, maka $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}$ **(mod m)** jika dan hanya jika **a mod m = b mod m**

Contoh 7.7

$22 \equiv 7 \ (mod\ 5)$ maka menurut teorema 4.3 $22\ mod\ 5 \equiv 7\ mod\ 5$

Definisi 7.2

Sistem residu lengkap modulo m adalah himpunan bilangan bulat sedemikian sehingga setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu bilangan bulat pada himpunan tersebut.

Contoh 7.8

Algoritma Pembagian menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat 0, 1, 2, . . ., m – 1 adalah sistem residu lengkap modulo m. System tersebut disebut himpunan residu terkecil nonnegative modulo m.

Contoh 7.9

Misal m adalah suatu bilangan bulat ganjil, maka himpunan bilangan bulat

$-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}$, . . ., -1, 0, 1, . . ., $\frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}$,

himpunan residu terkecil mutlak modulo m, adalah system lengkap residu.

Teorema 7.4

Jika a, b, c dan m adalah bilangan bulat dan $m > 0$ sedemikian sehingga $a \equiv b$ (mod m), maka :

1. $a + c \equiv b + c$ (mod m),
2. $a - c \equiv b - c$ (mod m),
3. $ac \equiv bc$ (mod m)

Bukti:

Karena $a \equiv b\ (mod\ m)$, maka m | (a – b).

1. $(a - b)$ bisa diuraikan menjadi $(a + c) - (b + c)$ sehingga m | (a – b) ekivalen dengan m | $(a + c) - (b + c)$ sehingga (i) terpenuhi
2. $(a - b)$ bisa diuraikan menjadi $(a - c) - (b - c)$ sehingga m | (a – b) ekivalen dengan m | $(a - c) - (b - c)$ sehingga (ii) terpenuhi
3. Untuk menunjukkan (iii) terpenuhi, diketahui bahwa ac – bc = c(a - b). Karena m | (a – b), maka ini dipenuhi juga untuk m | c(a – b). Oleh karena itu, $ac \equiv bc$ (mod m)

Contoh 7.10

Karena $22 \equiv 7$ (mod 5), maka berdasar teorema 7.4 ini juga menunjukkan bahwa :

1. $22 + 4 \equiv 7 + 4$ (mod 5) sehingga $26 \equiv 11$ (mod 5) karena 5 | 26 – 11 = 15
2. $22 - 4 \equiv 7 - 4$ (mod 5) sehingga $18 \equiv 3$ (mod 5) karena 5 | 18 – 3 = 15
3. $22 \times 4 \equiv 7 \times 4$ (mod 5) sehingga $88 \equiv 28$ (mod 5) karena 5 | 88 – 28 = 60

Teorema 7.4 di atas hanya menjelaskan operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian pada kedua ruas kekongruenan. Bagaimana jika kedua ruas kekongruenan dibagi dengan suatu bilangan bulat?,

Contoh 7.11

$16 = 8 \times 2 \equiv 3 \times 2 = 6$ (mod 10). Tetapi faktor persekutuan dari 2 tidak dapat dihilangkan sehingga $8 \not\equiv 3$ (mod 10).

Contoh di atas menunjukkan bahwa sifat kanselasi tidak berlaku sepenuhnya pada relasi kekongruenan. Sifat kanselasi akan berlaku dengan suatu syarat seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 7.5

Jika a, b, c dan m adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $m > 0$, d = (c, m) dan ac ≡ bc (mod m) maka

$$a \equiv b \ (mod \ \frac{m}{d})$$

Bukti:

Jika $ac \equiv bc$ (mod m), kita ketahui bahwa m | ac – bc = c(a – b). Oleh karena itu, ada suatu bilangan bulat k di mana c(a – b) = km. Dengan membagi kedua ruas dengan d, kita peroleh $\left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\right)(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}}\right)$. Karena $\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1$, berdasarkan lemma 3.4 maka terpenuhi juga $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}} | (a-b)$. Dengan demikian a ≡ b $\left(\mathrm{mod}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}}\right)$

Contoh 7.12

$33 \equiv 15 (\mathrm{mod}\ 9)$
$3 \times 11 \equiv 3 \times 5 (\mathrm{mod}\ 9)$
FPB (3, 9) = 3, maka menurut teorema 7.5
$11 \equiv 5 \left(\mathrm{mod}\ \frac{9}{3}\right)$

Corollary 7.1

Jika a, b, c, dan m suatu bilangan bulat sedemikian hingga $m > 0$, (c, m) = 1 dan $ac \equiv bc$ (mod m) maka $a \equiv b$ (mod m).

Contoh 7.13

Karena $25 \equiv 5$ (mod 2) dan (2,5) = 1, dapat simpulkan bahwa $\frac{25}{5} \equiv \frac{5}{5}$ (mod 2) atau $5 \equiv 1$ (mod 2).

Teorema 7.6

Jika a, b, c, d, dan m bilangan bulat sedemikian hingga hingga $m > 0$, $a \equiv b$ (mod m) dan $c \equiv d$ (mod m) maka :

1. $a + c \equiv b + d$ (mod m)
2. $a - c \equiv b - d$ (mod m)
3. $ac \equiv bd\ (\mathrm{mod\ m})$

Bukti:

Karena $a \equiv b$ (mod m) dan $c \equiv d$ (mod m), kita tahu bahwa m | (a – b) dan m | (c – d). Oleh karena itu, ada bilangan bulat k dan l dengan $km = a - b$ dan $lm = c - d$.

1. $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = km + lm = (k + l)m$
   Oleh karena itu, $m|[(a + c) - (b + d)]$ sehingga $a + c \equiv b + d$ (mod m)
2. $(a - c) - (b - d) = (a - b) - (c - d) = km - lm = (k - l)m.$
   Oleh karena itu, $m|[(a - c) - (b - d)]$ sehingga $a - c \equiv b - d$ (mod m)
3. $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) = ckm + blm = (ck + bl)m.$ Oleh karena itu, $m|(ac - bd)$sehingga $ac \equiv bd$ (mod m)

Contoh 7.14

Karena $-3 \equiv 30$ (mod 11) dan $2\,7 \equiv 5$ (mod 11), menggunakan teorema 7.6 diperoleh bahwa:

- $24 = -3 + 27 \equiv 30 + 5 = 35$ (mod 11) karena $11|24 - 35 = -11$
- $-30 = -3 - 27 \equiv 30 - 5 = 25$ (mod 11) karena $11| - 30 - 25 = -55$
- $-81 = -3 \times 27 \equiv 30 \times 5 = 150$ (mod 11) karena $11| - 81 - 150 = -231$

Lemma 7.1

Himpunan bilangan bulat tak kongruen modulo m membentuk himpunan lengkap modulo m.

Bukti:

Dianggap bahwa himpunan bilangan bulat tak kongruen m tidak membentuk himpunan lengkap modulo m. ini berimplikasi bahwa setidaknya ada satu bilangan bulat a yang tak kongruen pada himpunan bilangan bulat, sehingga tidak ada bilangan bulat pada himpunan kongruen modulo m yang mempunyai sisa ketika dibagi dengan m. ini sesuai dengan prinsip Pigeonhole, paling sedikit ada dua bilangan bulat yang sama pada himpunan modulo m. ini tidak mungkin, karena bilangan bulat yang tak kongruen modulo m. sehingga setiap m bilangan bulat tak kongruen modulo m membentuk system lengkap residu modulo m.

Teorema 7.7

Jika $r_1, r_2, \ . \ . \ ., r_m$ adalah sistem residu lengkap modulo m, maka jika a adalah bilangan bulat positif dengan (a, m) = 1, maka

$$ar_1 + b, ar_2 + b, \ . \ . \ ., ar_m + b$$

adalah sistem residu lengkap modulo m untuk sebarang bilangan bulat b.

Bukti:

Pertama, akan ditunjukkan bahwa tidak ada dua bilangan bulat
$ar_1 + b, ar_2 + b, \ . \ . \ ., ar_m + b$
yang kongruen modulo m. Untuk menunjukkannya, perhatikan bahwa jika

$ar_j + b \equiv ar_k + b$ (mod m)

maka berdasar (ii) teorema 7.4, diperoleh

$ar_j \equiv ar_k$ (mod m)

Karena (a, m) = 1, Corollary 7.1 menyatakan bahwa

$r_j \equiv r_k$ (mod m)

Karena $r_j \not\equiv r_k$ (mod m) jika $j \neq k$, dapat disimpulkan bahwa $j = k$

Contoh 7.15

Himpunan A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} adalah merupakan suatu system residu lengkap modulo 6. Jika masing-masing unsur A dikalikan dengan 5 dan ditambah 2, yang mana (5,6) = 1, dan setelah dikalikan dimasukkan sebagai unsur himpunan B, maka dapat ditentukan bahwa B = {2, 7, 12, 17, 22, 27}. Himpunan B merupakan suatu system residu yang lengkap modulo 6 sebab setiap unsur B kongruen dengan satu dan hanya satu y ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}, yaitu :

2 ≡ 2 (mod 6)	12 ≡ 0 (mod 6)	22 ≡ 4 (mod 6)
7 ≡ 1 (mod 6)	17 ≡ 5 (mod 6)	27 ≡ 3 (mod 6)

Theorema 7.8

Jika a, b, k dan m adalah bilangan bulat dengan $k > 0, m > 0$ dan $a \equiv b(mod\ m)$ maka $a^k \equiv b^k(mod\ m)$.

Bukti :

Karena $a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow m\ |(a-b)$ dan karena
$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1})$
dengan demikian $(a-b)\ |\ (a^k - b^k)$
Sehingga, menurut teorema 7.6 ini manunjukkan bahwa $m\ |(a^k - b^k)$
Oleh karena itu, $a^k \equiv b^k(mod\ m)$

Contoh 7.16

1. $22 \equiv 7\ (mod\ 5)$, maka dengan theorema didapatkan bahwa

   $484 \equiv 22^2 \equiv 7^2 \equiv 49\ (mod\ 5)$

2. Cari residu positif terkecil dari $(3)^{10}$ mod 11?

   $(3^2)^5 \equiv 9^5 \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv 1\ (mod\ 11)$

Theorema 7.9

Jika $a \equiv b(mod\ m_1), a \equiv b(mod\ m_2), \dots, a \equiv b(mod\ m_k)$, dengan $a, b, m_1, m_2, \dots, m_k$ adalah bilangan bulat dengan $m_1, m_2, \dots, m_k$ bilangan bulat positif maka $a \equiv b(mod\ [m_1, m_2, \dots, m_k])$ dengan $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ adalah KPK dari $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Bukti:

Karena $a \equiv b(mod\ m_1), a \equiv b(mod\ m_2), \dots, a \equiv b(mod\ m_k)$ maka
$m_1\ |(a-b), m_2\ |(a-b), \dots, m_k\ |(a-b)$
$\Leftrightarrow [m_1, m_2, \dots, m_k]\ |(a-b)$
Akibatnya $a \equiv b(mod\ [m_1, m_2, \dots, m_k])$

Contoh 7.17

$22 \equiv 7(mod\ 5), 22 \equiv 7(mod\ 3)$, maka menurut teorema 4.9 $22 \equiv 7\ (mod\ 15)$ karena $15\ |\ (22 - 7 = 15)$

Corollary 7.2

Jika $a \equiv b(mod\ m_1), a \equiv b(mod\ m_2), \dots, a \equiv b(mod\ m_k)$, dengan a, b adalah bilangan bulat dan $m_1, m_2, \dots, m_k$ adalah bilangan bulat positif relative prima yang berpasangan, maka $a \equiv b(mod\ m_1.m_2.\dots.m_k)$.

Bukti:

Karena $m_1, m_2, \dots, m_k$ adalah bilangan relatif saling prima maka $[m_1, m_2, \dots, m_k] = m_1 . m_2 . \dots . m_k$. Dengan teorema 4.9, diperoleh

$a \equiv b \ (mod\ m_1 . m_2 . \dots . m_k)$.

Contoh 7.18

$75 \equiv 15(mod\ 2)$, $75 \equiv 15(mod\ 3)$, $75 \equiv 15(mod\ 5)$, menurut corollary 4.91 karena 2, 3, 5 adalah bilangan relative saling prima maka dapat dikatakan $75 \equiv 15\ (mod\ 2 \times 3 \times 5)$ atau $75 \equiv 15(mod\ 60)$

Kekongruenan dapat digunakan untuk pangkat besar bilangan bulat. Sebagai contoh misalnya menemukan residu positif terkecil dari 2^{644} modulo 645. untuk menemukan residu positif terkecil dengan menghitung 2^{644}, terdapat suatu bilangan dengan 194 desimal digit. Sebaliknya, untuk menemukan 2^{644} modolo 645 pertama-tama dituliskan eksponen 644 dalam notasi biner:

$(644)_{10}=(1010000100)_2$

Selanjutnya, akan dihitung residu positif terkecil dari 2, 2^2 ,2^4 ,2^8 ....2^{512} dengan berturut mengkuadratkan dan mengurangi modulo 645, sehingga diperoleh

$2 \equiv 2$ (mod 645)
$2^2 \equiv 4$ (mod 645)
$2^4 \equiv 16$ (mod 645)
$2^8 \equiv 256$ (mod 645)
$2^{16} \equiv 391$ (mod 645)
$2^{32} \equiv 16$ (mod 645)
$2^{64} \equiv 256$ (mod 645)
$2^{128} \equiv 391$ (mod 645)
$2^{256} \equiv 16$ (mod 645)
$2^{512} \equiv 256$ (mod 645)

Sekarang akan dihitung 2^{644} modulo 645 dengan mengalikan residu positif terkecil dari pangkat 2, diperoleh

$2^{644} = 2^{512+128+4} = 2^{512}2^{128}2^4 \equiv 256.391.16 = 1601536 \equiv 1$ (mod 645)

Dari uraian di atas baru saja mengilustrasikan prosedur umum untuk perpangkatan modulo, untuk menghitung b^N modulo m, di mana b, m dan N adalah bilangan bulat positif. Pertama kita menuliskan pangkat N dalam notasi binari, sebagai N = $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_2$. Kemudian mencari residu positif terkecil dari $b \times b^2 \times b^4 \times \dots \times b^{2j}$ modulo m, dengan berturut-turut mengkuadratkan dan mengurangi modulo m. Terakhir, kalikan residu positif terkecil modulo m dari b^{2j} untuk j dengan a =1, kurangkan dengan modulo m setelah perkalian.

Theorema 7.10

Misalkan b, m, dan N adalah bilangan bulat positif dengan b < m, maka residu positif terkecil dari b^N modulo m dapat dihitung dengan menggunakan operasi bit $O((\log_2 m)^2 \log_2 N)$

Bukti:

Untuk mencari residu positif terkecil dari b^N modulo m, dapat menggunakan algoritma. Pertama: mencari residu positif terkecil dari $b \times b^2 \times b^4 \times \dots \times b^{2j}$ modulo m dimana $2^k \leq N < 2^{k+1}$, dengan berturut-turut mengkuadratkan dan mengurangi modulo m. syarat total dari $O((\log_2 m)^2 \log_2 N)$. karena ditunjukkan bahwa $K = [log_2 N]$ kuadrat modulo m, dengan syarat $O((\log_2 m)^2)$ operasi bit. Kemudian kalikan kalikan residu positif terkecil modulo m dari b^{2j} yang bersesuaian dengan digit biner N sama dengan 1., dan modulo m dikurangkan setelah masing-masing dikalikan. $O((\log_2 m)^2 \log_2 N$ juga termasuk operasi bit. Karena terdapat banyak perkalian $log_2 N$ dengan dengan syarat $O((\log_2 m)^2)$ operasi bit. Maka, nilai total $O((\log_2 m)^2 \log_2 N$ operasi bit ditemukan.

Aplikasi Kongruensi

Sebelum zaman kalkulator dan computer, kriteria keterbagian digunakan sebagai tes untuk menguji sebuah bilangan bisa dibagi dengan bilangan tertentu atau tidak. Sebagai contoh, di dalam *Talmud* ditulis jika a dan b bilangan-bilangan bulat positif dan 7 membagi 2a+b, maka 7 juga membagi *100a+b*. Uji keterbagian yang lain bisa ditemukan dalam karya-karya al-Khawarizmi dan Fibonaci, diantaranya adalah uji keterbagian untuk bilangan 7, 9 dan 11. Beberapa sangat mudah dipahami sebagai contoh untuk semua bilangan bulat *n*, 2 mem bagi *n* jika dan hanya jika digit terakhir dari bilangan *n* adalah genap. Untuk uji-uji keterbagian yang lain akan dipaparkan dalam makalah ini.

Uji Keterbagian

1. Uji Keterbagian untuk bilangan 2

Teorema 7.11 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$n = d_{k-1} \dots d_2 d_1 d_0$ dapat dibagi dengan 2 jika dan hanya jika $2|d_0, d_0 \in \{0,2,4,6,8\}$. Jadi, n bisa dibagi 2 jika dan hanya jika digit terakhir adalah 0,2,4,6, atau 8.

Bukti

Diketahui $10 \equiv 0(mod\ 2)$, sehingga $10^j \equiv 0(mod\ 2^j), j = 1,2,3,\dots,k$. Jika $j = 1$, maka $10 \equiv 0(mod\ 2)$. Suatu bilangan n dapat dinyatakan dengan : $n = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0)$. Karena $2|10$ maka $2|10^j$, untuk j=1,2,….,k. Misal $m = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1$, maka $n = m + d_0$. Karena $2|10^j$ dan $2|m$. Jika $2|n$ dan $2|m$ maka $2|n-m$ sehingga $2|d_0$ dan jika $2|m$ dan $2|d_0$ $2|m + d_0$ sehingga $2|n$.

Contoh 7.19

1. Tentukan apakah 32.688.048 dapat dibagi oleh 2?
2. Tentukan apakah 41.578.912.246 dapat dibagi oleh 2?

Penyelesaiannya

1. $2|32.688.048$ karena $2|8$
2. $2|41.578.912.246$ karena $2|6$

2. **Uji Keterbagian untuk bilangan 3**

Teorema 7.12 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$n = d_{k-1} \dots d_2 d_1 d_0$ dapat dibagi dengan 3 jika dan hanya jika $3\,|(d_{k-1} + \cdots + d_2 + d_1 + d_0)$.

Bukti:

Ambil $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Karena $10 \equiv 1(mod\ 3)$,maka diperoleh $P(10) \equiv P(1)(mod\ 3)$. $P(10) = N$ sementara $P(1) = S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ sehingga $N \equiv S(mod\ 3)$. Hal itu menunjukkan bahwa $N \equiv 0(mod\ 3)$ jika dan hanya jika $S \equiv 0(mod\ 3)$ atau dapat dituliskan 3|N ⇔ 3|S.

Contoh 7.20

1. Tentukan apakah 18.385 dapat dibagi oleh 3?
2. Tentukan apakah 65.412.351 dapat dibagi oleh 3?

Penyelesaiannya

1. $3 \nmid 18.385$ karena $3 \nmid 1 + 8 + 3 + 8 + 5 = 25$
2. $3|65.412.351$ karena $3|6 + 5 + 4 + 1 + 2 + 3 + 5 + 1 = 27$

3. **Uji Keterbagian untuk bilangan 4**

Teorema 7.13 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$n = d_{k-1} \dots d_2 d_1 d_0$ dapat dibagi dengan 4 jika dan hanya jika $4|(d_1 d_0)$ dengan$(d_1 d_0)$ merupakan bilangan yang dibentuk oleh dua digit terakhir dari n.

Bukti:

Diketahui $10 \equiv 0(mod\ 2)$, sehingga $10^j \equiv 0(mod\ 2^j), j = 1,2,3, \dots, k$. Jika $j = 2$, maka $100 \equiv 0(mod\ 4)$. Suatu bilangan n dapat dinyatakan dengan $n = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0)$. Karena $4|10 \rightarrow 4|10^j$, untuk j=1,2,….,k. Misal $m = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2$, maka $n = m + d_1 d_0$.

Karena $4|10^j \rightarrow 4|m$. Jika $4|n$ dan $4|m \rightarrow 4|n - m \rightarrow 4|d_1 d_0$ dan jika $4|m$ dan $4|d_1 d_0 \rightarrow 4|m + d_1 d_0 \rightarrow 4|n$.

Contoh 7.21

1. Tentukan apakah 83.026 dapat dibagi oleh 4?
2. Tentukan apakah 897.650.243.28 dapat dibagi oleh 4?

Penyelesaian

1. $4 \nmid 83.026$ karena $4 \nmid 26$
2. $4|897.650.243.28$ karena $4|28$

4. Uji Keterbagian untuk bilangan 5

Teorema 7.14 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$\mathrm{n} = \mathrm{d}_{\mathrm{k}-1} \dots \mathrm{d}_2\mathrm{d}_1\mathrm{d}_0$ dapat dibagi dengan 5 jika dan hanya jika $5\ |\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_0 \in \{0{,}5\}$. Jadi, n bisa dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir adalah 0 atau 5.

Bukti:

Diketahui $10 \equiv 0(mod\ 5)$, sehingga $10^j \equiv 0(mod\ 5^j), j = 1,2,3, \dots, k$. Jika $j = 1$, maka $10 \equiv 0(mod\ 5)$. Suatu bilangan n dapat dinyatakan dengan $: n = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0)$. Karena $5|10 \rightarrow 5|10^j$, untuk j=1,2,....,k. Misal $m = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1$, maka $n = m + d_0$. Karena $5|10^j \rightarrow 5|m$. Jika $5|n$ dan $5|m \rightarrow 5|n - m$ sehingga $5|d_0$ dan jika $5|m$ dan $5|d_0 \rightarrow 5|m + d_0$ sehingga $5|n$.

Contoh 7.22

1. Tentukan apakah 235.555.790 dapat dibagi oleh 5?
2. Tentukan apakah 48.126.953.125 dapat dibagi oleh 5?

Penyelesaian

1. $5|235.555.790$ karena $5|0$
2. $5|48.126.953.125$ karena $5|5$

5. Uji Keterbagian untuk bilangan 6

Semua bilangan n, dengan $\mathrm{n} \neq 0$ dapat dibagi oleh bilangan 6 jika dan hanya jika n dapat dibagi oleh 2 dan 3 secara simultan dan FPB(2,3)=1.

Contoh 7.23

Tentukan apakah 4.201.012 dapat dibagi oleh 6.

Penyelesaian

Karena digit terakhirnya adalah 2 maka bilangan tersebut dapat dibagi oleh 2. Jadi 2|2. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $3|4.201.012$. Karena $4+2+0+1+0+1+2=10$, maka $3 \nmid 10$, sehingga dapat dsimpulkan bahwa $6 \nmid 4.201.012$.

6. Uji Keterbagian untuk bilangan 8

Teorema 7.15 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$\mathrm{n} = \mathrm{d}_{\mathrm{k}-1} \dots \mathrm{d}_2\mathrm{d}_1\mathrm{d}_0$ dapat dibagi dengan 8 jika dan hanya jika $8|(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1\mathrm{d}_0)$ dengan $(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1\mathrm{d}_0)$merupakan bilangan yang dibentuk oleh tiga digit terakhir dari n.

Bukti:

Diketahui $10 \equiv 0(mod\ 2)$, sehingga $10^j \equiv 0(mod\ 2^j), j = 1,2,3,\dots,k$. Jika $j=3$, maka $1000 \equiv 0(mod\ 8)$. Suatu bilangan n dapat dinyatakan dengan $n = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0)$. Karena $8|10 \rightarrow 8|10^j$, untuk j=1,2,….,k. Misal $m = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_3 \times 10^3$, maka $n = m + d_2d_1d_0$.

Karena $8|10^j \rightarrow 8|m$. Jika $8|n$ dan $8|m \rightarrow 8|n-m$ sehingga $8|d_2d_1d_0$ dan jika $8|m$ dan $8|d_2d_1d_0 \rightarrow 8|m + d_2d_1d_0$ sehingga $8|n$.

Contoh 7.24

1. Tentukan apakah 1344 dapat dibagi oleh 8.
2. Tentukan apakah 410.330 dapat dibagi oleh 8

Penyelesaian:

1. $8|1344$ karena $8|344$
2. $8 \nmid 410.330$karena $8 \nmid 330$

7. Uji Keterbagian untuk bilangan 9

Teorema 7.16 (Burton, David M. 2010)

Jika $\mathrm{N} = \mathrm{a_m}10^{\mathrm{m}} + \mathrm{a_{m-1}}10^{\mathrm{m-1}} \ldots + \mathrm{a_1}10 + \mathrm{a_0}$ menunjukkan bentuk desimal dari pengembangan bilangan bulat N, $0 \leq \mathrm{a_k} < 10$, dan $\mathrm{S} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1} + \mathrm{a_2} + \cdots + \mathrm{a_m}$ maka 9|N jika dan hanya jika 11|S.

Bukti

Ambil $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Karena $10 \equiv 1(mod\ 9)$,maka diperoleh $P(10) \equiv P(1)(mod\ 9)$. $P(10) = N$ sementara $P(1) = S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ sehingga $N \equiv S(mod 9)$. Hal itu menunjukkan bahwa $N \equiv 0(mod\ 9)$ jika dan hanya jika $S \equiv 0(mod\ 9)$ atau dapat dituliskan 9|N ⇔ 9|S.

Contoh 7.25

1 Tentukan apakah 987.654.321 dapat dibagi oleh 9?
2 Tentukan apakah 78.918.239.735 dapat dibagi oleh 9?

Penyelesaian

1. 9|987.654.32karena $9|9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$
2. $9 \nmid 78.918.239.735$ karena $9 \nmid 7 + 8 + 9 + 1 + 8 + 2 + 3 + 9 + 7 + 3 + 5 = 42$

8. Uji Keterbagian untuk bilangan 10

Teorema 7.17 (Voss James. Mathematics Journal. Divisibility Tests In N)

$\mathrm{n} = \mathrm{d_{k-1}} \ldots \mathrm{d_2 d_1 d_0}$ dapat dibagi dengan 10 jika dan hanya jika $10\ |\mathrm{d_0}, \mathrm{d_0} = 0$.

Bukti

Diketahui $10 \equiv 0(mod\ 10)$, sehingga $10^j \equiv 0(mod\ 10^j)$, $j = 1,2,3, \ldots, k$. Jika $j = 1$, maka $10 \equiv 0(mod\ 10)$. Suatu bilangan n dapat dinyatakan dengan :$n = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0)$. Karena 10|10 → $10|10^j$, untuk j=1,2,....,k. Misal $m = d_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1$, maka $n = m + d_0$. Karena $10|10^j$ → $10|m$. Jika $10|n$ dan $10|m$ → $10|n - m$ sehingga $10|d_0$ dan jika $10|m$ dan $10|d_0$ → $10|m + d_0$ sehingga $10|n$.

Contoh 7.26

Tentukan apakah 15.810 dapat dibagi oleh 10!

Penyelesaian

$10|15.810$ karena $10|0$

9. Uji Keterbagian untuk bilangan 11

Teorema 7.18

Jika $\mathrm{N} = \mathrm{a_m} \times 10^{\mathrm{m}} + \mathrm{a_{m-1}} \times 10^{\mathrm{m-1}} \dots + \mathrm{a_1} \times 10 + \mathrm{a_0}$ menunjukkan bentuk desimal dari bilangan bulat N,$0 \leq \mathrm{a_k} < 10$, dan $\mathrm{T} = \mathrm{a_0} - \mathrm{a_1} + \mathrm{a_2} - \dots + (-1)^{\mathrm{m}}\mathrm{a_m}$ maka $11|\mathrm{N}$ jika dan hanya jika $11|\mathrm{T}$.

Bukti:

Ambil $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Karena $10 \equiv -1(mod 11)$,maka diperoleh $P(10) \equiv P(-1)(mod 11)$. $P(10) = N$ sementara $P(-1) = T = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^m a_m$ sehingga $N \equiv T(mod 11)$ sehingga 11|N ⇔ 11|T

Contoh 7.27

Tentukan apakah bilangan bulat N= 1.571.724 dapat dibagi oleh 11.

Penyelesaian

11|1.571.724 karena $4 - 2 + 7 - 1 + 7 - 5 + 1 = 11$, maka 11|11.

10. Uji Keterbagian untuk bilangan 7,11,13

Uji pengembangan secara simultan untuk keterbagian oleh bilangan prima 7,11 dan 13.

Diketahui bahwa 7.11.13 $= 1001$ dan$10^3 = 1000 \equiv -1(mod\ 1001)$.

$(a_k a_{k-1} \dots a_0)_{10}$=$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} \dots + a_1 10 + a_0$
$\equiv (a_0 + 10a_1 + 100a_2) + 1000(a_3 + 10a_4 + 100a_5) +$
$(1000)^2 a_6 + 10a_7 + 100a_8) + \cdots$
$\equiv (100a_2 + 10a_1 + a_0) - (100a_5 + 10a_4 + a_3) + (100a_8 + 10a_7 + a_6) - \cdots = (a_2 a_1 a_0)_{10} - (a_5 a_4 a_3)_{10} + (a_8 a_7 a_6)_{10} - \cdots (mod\ 11)$.

Contoh 7.28

Tentukan apakah bilangan 1.010.908.899 dapat dibagi oleh 7, 11, dan 13 secara simultan!

Penyelesaian

Karena 899-908+010-1=0, maka 1.010.908.899 dapat dibagi oleh 7, 11, dan 13 secara simultan.

11. Uji Keterbagian Berbasis b

Teorema 7.19

Jika d|b dan j dan k adalah bilangan bulat positif dengan j < k, maka $(\mathrm{a_k} \dots \mathrm{a_1 a_0})_\mathrm{b}$ dapat dibagi oleh $\mathrm{d^j}$ jika dan hanya jika $(\mathrm{a_{j-1}} \dots \mathrm{a_1 a_0})_\mathrm{b}$ dapat dibagi oleh $\mathrm{d^j}$.

Bukti:

Karena $b \equiv 0(mod\ d)$ maka $b^j \equiv 0\ (mod\ d^j)$ sehingga

$$\begin{aligned}(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b &= a_k b^k + \cdots + a_j b^j + a_{j-1} b^{j-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \text{ b} \\ &\equiv a_{j-1} b^{j-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \\ &= \left(a_{j-1} \dots a_1 a_0\right)_b (mod\ d^j).\end{aligned}$$

Akibatnya, $d^j|(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ jika dan hanya jika $d^j|(a_{j-1} \dots a_1 a_0)_b$.

Contoh 7.29

Ambil *n*=$(7F28A6)_{16}$. Kemudian, karena *2|16* maka dari teorema 9 diketahui bahwa *2|n* sebab *2|6.*

Namun demikian, karena *4|16* terlihat bahwa $4 \nmid \mathrm{n}$ sebab $4 \nmid 6$.

Teorema 7.20

Jika $\mathrm{d|(b-1)}$, maka $\mathrm{n} = (\mathrm{a_k} \dots \mathrm{a_1 a_0})_\mathrm{b}$ dapat dibagi oleh d jika dan hanya jika penjumlahan digit-digit $\mathrm{a_k} + \cdots + \mathrm{a_1} + \mathrm{a_0}$ dapat dibagi oleh d.

Bukti:

Karena $d|(b-1)$, diperoleh $b \equiv 1(mod\ d)$ sehingga berdasarkan teorema 4.7, $b^j \equiv 1\ (mod\ d)$ untuk semua bilangan bulat positif j.

Akibatnya $n = (a_k \ldots a_1 a_0)_b \equiv a_k b^k + \cdots + a_1 b + a_0 \equiv a_k + \cdots + a_1 + a_0 \ (mod\ d)$. Hal ini menunjukkan bahwa $d|n$ jika dan hanya jika $d|(a_k + \cdots + a_1 + a_0)$.

Contoh 7.30

Ambil *n*=$(7F28A6)_{16}$. Dari teorema 10 karena *3|(16-1), 5|(16-1)* dan *15|(16-1)* dan $7 + F + 2 + 8 + A + 6 = 48$. Diketahui bahwa *3|n* karena *3|48*. Namun demikian $5 \nmid \mathrm{n}$ karena $5 \nmid 48$. Demikian juga $15 \nmid \mathrm{n}$ karena $15 \nmid 48$.

Teorema 7.21

Jika $\mathrm{d}|(\mathrm{b}+1)$, maka $\mathrm{n} = (\mathrm{a_k} \ldots \mathrm{a_1 a_0})_\mathrm{b}$ dapat dibagi oleh d jika dan hanya jika alternative jumlahan digit-digit $(-1)^\mathrm{k}\mathrm{a_k} + \cdots - \mathrm{a_1} + \mathrm{a_0}$ dapat dibagi oleh d.

Bukti:

Karena $d|(b+1)$, diperoleh $b \equiv -1 (mod\ d)$. Karenanya, $b^j \equiv (-1)^j (mod\ d)$, dan akibatnya $n = (a_k \ldots a_1 a_0)_b \equiv (-1)^k a_k + \cdots - a_1 + a_0 (mod\ d)$. Jadi, $d|n$ jika dan hanya jika $d|((-1)^k a_k + \cdots - a_1 + a_0)$.

Contoh 7.31

Ambil *n*=$(7F28A6)_{16}$. Dari teorema 11 karena *17|(16+1)* dan *6-A+8-2+F-7=10,* maka $17 \nmid \mathrm{n}$ karena $17 \nmid 10$.

B. RANGKUMAN

1. Misalkan m bilangan bulat positif. Jika a, b ∈ $\boldsymbol{B}$**,** dapat dikatakan bahwa a kongruen dengan b modulo m ditulis $a \equiv b$ (mod m) jika m | (a – b).
2. Jika a dan b bilangan bulat, maka $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}$ **(mod m)** jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga **a = b + km**.
3. Misal m suatu bilangan bulat positif. Kekongruenan modulo m memenuhi sifat-sifat berikut:
   a. Refleksif. Jika a suatu bilangan bulat, maka $a \equiv a$ (mod m)

b. Simetris. Jika a, b ∈ $\boldsymbol{B}$ sedemikian sehingga $a \equiv b$ (mod m), maka $b \equiv a$ (mod m)

c. Transitif. Jika a, b, dan c ∈ $\boldsymbol{B}$ dengan $a \equiv b$ (mod m) dan $b \equiv c$ (mod m), maka $a \equiv c$ (mod m).

4. Jika a, b bilangan bulat dan m bilangan bulat positif, maka $\boldsymbol{a \equiv b}$ **(mod m)** jika dan hanya jika a mod m = b mod m

5. Sistem residu lengkap modulo m adalah himpunan bilangan bulat sedemikian sehingga setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu bilangan bulat pada himpunan tersebut.

6. Jika a, b, c dan m adalah bilangan bulat dan $m > 0$ sedemikian sehingga $a \equiv b$ (mod m), maka :
   a. $a + c \equiv b + c$ (mod m),
   b. $a - c \equiv b - c$ (mod m),
   c. $ac \equiv bc$ (mod m)

7. Jika a, b, c dan m adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $m > 0$, d = (c, m) dan $ac \equiv bc$ (mod m) maka $a \equiv b$ (mod m/d)

8. Jika a, b, c, dan m suatu bilangan bulat sedemikian hingga $m > 0$, (c, m) = 1 dan $ac \equiv bc$ (mod m) maka $a \equiv b$ (mod m).

9. Jika a, b, c, d, dan m bilangan bulat sedemikian hingga hingga $m > 0$, $a \equiv b$ (mod m) dan $c \equiv d$ (mod m) maka :
   a. $a + c \equiv b + d$ (mod m)
   b. $a - c \equiv b - d$ (mod m)
   c. $ac \equiv bd$ (mod m)

10. Himpunan bilangan bulat tak kongruen modulo m membentuk himpunan lengkap modulo m.

11. Jika $r_1, r_2, \ . \ . \ ., r_m$ adalah sistem residu lengkap modulo m, maka jika a adalah bilangan bulat positif dengan (a, m) = 1, maka

$$ar_1 + b, ar_2 + b, \ . \ . \ ., ar_m + b$$

adalah sistem residu lengkap modulo m untuk sebarang bilangan bulat b.

12. Jika $\mathrm{a, b, k}$ dan m adalah bilangan bulat dengan $\mathrm{k > 0, m > 0}$ dan $\mathrm{a \equiv b (mod\ m)}$ maka $\mathrm{a^k \equiv b^k (mod\ m)}$.

13. Jika $\mathrm{a \equiv b (mod\ m_1), a \equiv b (mod\ m_2), \dots, a \equiv b (mod\ m_k)}$, dengan $\mathrm{a, b, m_1, m_2, \dots, m_k}$ adalah bilangan bulat dengan $\mathrm{m_1, m_2, \dots, m_k}$

bilangan bulat positif maka $\mathrm{a \equiv b(mod\ [m_1, m_2, \dots, m_k])}$; $\mathrm{[m_1, m_2, \dots, m_k]}$ adalah KPK dari $\mathrm{m_1, m_2, \dots, m_k}$.

14. Jika $\mathrm{a \equiv b(mod\ m_1), a \equiv b(mod\ m_2), \dots, a \equiv b(mod\ m_k)}$, dengan $\mathrm{a, b}$ adalah bilangan bulat dan $\mathrm{m_1, m_2, \dots, m_k}$ adalah bilangan bulat positif relative prima yang berpasangan, maka $\mathrm{a \equiv b(mod\ m_1. m_2. \dots. m_k)}$.
15. Misalkan b, m, dan N adalah bilangan bulat positif dengan b < m, maka residu positif terkecil dari $\mathrm{b^N}$ modulo m dapat dihitung dengan menggunakan operasi bit $O((\log_2 m)^2 \log_2 N)$

C. SOAL LATIHAN

1. Tunjukkan kebenaran kekongruenan berikut.
   a. $22 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 2)$
   b. $69 \equiv 62 (\mathrm{mod}\ 7)$
   c. $-2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$
   d. $111 \equiv -9 (\mathrm{mod}\ 40)$
   e. $-3 \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 11)$
2. Tunjukkan bahwa jika a adalah bilangan bulat genap, maka $a^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ dan jika a adalah bilangan bulat ganjil, maka $a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$
3. Tunjukkan jika a adalah bilangan bulat ganjil, maka $a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8)$
4. Tentukan residu positif terkecil modulo 13 dari bilangan bulat berikut
   a. 22
   b. 100
   c. -1
   d. -100
   e. -22
5. Tunjukkan jika a, b dan m adalah bilangan bulat dengan $m > 0$ dan $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$ maka $a \bmod m = b \bmod m$.
6. Tentukan pangkat tertinggi dari 2 yang membagi bilangan positif berikut.
   a. 201.984
   b. 1.423.408
   c. 89.375.744

7. Tentukan pangkat tertinggi dari 5 yang membagi bilangan positif berikut
   a. 112.250
   b. 4.860.625
8. Temukan pangkat tertinggi dari 2 yang membagi bilangan bulat berikut.
   a. $(101111110)_2$
   b. $(1010000011)_2$
   c. $(111000000)_2$

BAB VIII

PERKONGRUENAN LINIER

A. PENDAHULUAN

Pada bahasan sebelumnya, telah dibahas pengertian relasi kongruen dan sifat-sifatnya. Pada bahasan ini, akan dipelajari penggunaan pengertian dan sifat-sifat kongruen tersebut.

Kongruen modulo 9 dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran perkalian dan penjumlahan bilangan-bilangan bulat.

10.000 – 1 = 9.999 = 9 k_1 sehingga 10.000 ≡ 1 (mod 9)

Bagaimana dengan 1000, 100, 10 ?

100 – 1 = 999 = 9 k_2 sehingga 1000 ≡ 1 (mod 9)
100 – 1 = 99 = 9 k_3 sehingga 100 ≡ 1 (mod 9)
10 – 1 = 9 = 9 k_4 sehingga 10 ≡ 1 (mod 9)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap bilangan bulat kongreun modulo 9 dengan jumlah angka-angkanya.

Contoh 8.1

Tanpa melakukan pembagian, apakah bilangan ini terbagi oleh 9?

176.521.221 ≡ 100.000.000 + 70.000.000 + 6.000.000 + 500.000 + 20.000 + 1.000 + 200 + 20 + 1 (mod 9)
≡ 1(1) + 7(1) + 6(1) + 5(1) + 2(1) + 1(1) + 2(1) + 2(1) + 1 (mod 9)
≡ 27 (mod 9)

Karena 27 ≡ 0 (mod 9) maka bilangan 176.521.221 terbagi oleh 9.
Uraian dan contoh di atas secara umum dinyatakan sebagai berikut:

$10^n \equiv 1 \pmod 9$ untuk n = 1, 2, 3,…

B. URAIAN MATERI

1. PERKONGRUENAN LINIER

Setelah mempelajari pengertian relasi konrgruen, sifat-sifat dan kegunaannya. Berikut akan dipelajari kongruensi linear kalimat terbuka yang menggunakan relasi kongruen disebut *kongruensi*.

Misalnya:

$3x \equiv 6 \pmod 9$; $x^4 + 3x - 3 \equiv 0 \pmod{31}$

Definisi 8.1

Suatu kongruensi yang mempunyai bentuk :

$$ax \equiv b \pmod m$$

dengan $x \in Z$ disebut suatu **Perkongruenan linier satu variabel.**

Perhatikan bahwa jika $x = x_o$ adalah suatu solusi dari $ax \equiv b \pmod m$, dan jika diketahui bahwa $x_1 \equiv x_o \pmod m$, maka $ax_1 \equiv ax_o \pmod m$, dengan demikian x_1 juga suatu solusi. Jika satu anggota dari kelas kongruensi mod *m* adalah solusi, maka semua anggota kelas kongruensi adalah solusi.

Teorema 8.1

Andaikan *a, b*, dan *m* adalah bilangan bulat dengan $m > 0$ dan $(a,m) = d$.

1. Jika $d \nmid b$ maka $ax \equiv b \pmod m$ tidak memiliki solusi
2. Jika $d \mid b$ maka $ax \equiv b \pmod m$ tepat memiliki *d* solusi inkongruen modulo *m*.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 7.1 kongruensi linier $ax \equiv b \pmod m$ ekuivalen dengan persamaan Diophantine Linear dalam dua variable $ax - my = b$. bilangan bulat *x* adalah solusi dari $ax \equiv b \pmod m$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat *y* yang memenuhi persamaan $ax - my = b$.

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa jika $d \nmid b$, tidak ada solusi, namun jika $d \mid b$, $ax - my = b$ memiliki banyak solusi yang tak terhingga, diberikan oleh

$$x = x_0 + (m/d)t, \quad y = y_0 + (a/d)t$$

dengan $x=x_0$ dan $y=y_0$ adalah solusi bagian dari persamaan. Nilai x yang diberikan di atas,

$$x = x_0 + (m/d)t,$$

adalah solusi dari kongreunsi linear; ada banyak solusi yang tak hingga.

Untuk menentukan berapa banyak solusi inkongruensi yang ada, ditemukan syarat yang mendiskripsikan ketika dua dari solusi-solusi $x_1=x_0 + (m/d)t_1$ dan $x_2=x_0 + (m/d)t_2$ kongruen modulo m. jika dua solusi adalah konguen, maka

$$x_0 + (m/d)t_1 \equiv x_0 + (m/d)t_2 \pmod m$$

kurangkan x_0 dari sisi kedua sisi, didapat

$$(m/d)t_1 \equiv (m/d)t_2 \pmod m$$

Sekarang $(m, m/d) = m/d$ karena $(m/d) \mid m$, sedemikian sehingga berdasarkan dari teori 4.4 ditunjukkan bahwa

$$t_1 \equiv t_2 \pmod d$$

Ini menunjukkan bahwa himpunan lengkap dari solusi inkongruen yang diperoleh dari $x = x_0 + (m/d)t$, dengan t terdapat dalam system lengkap dari residu modulo d. Satu himpunan yang memenuhi $x = x0 + (m/d)t$ adalah $t = 1, 2, 3, \ldots, d-1$

Kongruensi linear dengan a dan modulo m adalah relative prima maka memiliki solusi tunggal, akan ditunjukkan pada corrolaly 4.11.1 dibawah ini.

Corollary. 8.1

Jika a dan m adalah bilangan bulat relative prima dengan $m > 0$ dan b adalah bilangan bulat, maka kongruensi linear $ax \equiv b \pmod m$ memiliki solusi tunggal mod m.

Bukti

Karena $(a,m) = 1$, diketahui bahwa $(a,m)|b$. berdasarkan Teorema 7.1 kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{m}$ tepat memiliki $(a,m) = 1$ solusi inkongruensi mod m.

Contoh 8.2

1. Kongruensi linier $7x \equiv 3 \pmod{12}$ mempunyai satu solusi $x \equiv 9 \pmod{12}$ sebab $x = 9$ merupakan satu-satunya unsur dalam suatu kelas residu modulo 12 yang memberikan satu unsur yang memenuhi kongruensi. Dengan demikian $x = 9$ merupakan satu unsur dari suatu sistem residu yang lengkap modulo 12 yang memenuhi kongruensi, $x = 9$ adalah satu unsur dari sistem residu lengkap modulo 12 yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$
2. Kongruensi linier $6x \equiv 9 \pmod{15}$ mempunyai tiga selesaian, $x_1 = 4 + 15r$, $x_2 = 9 + 15r$, dan $x_3 = 14 + 15r$ untuk sembarang bilangan bulat r. dapat pula dinyatakan dalam bentuk modulo yaitu $x_1 \equiv 4 \pmod{15}$, $x_2 \equiv 9 \pmod{15}$, $x_3 \equiv 14 \pmod{15}$
   Nilai-nilai $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$ tidak ada yang memenuhi kongruensi $6x \equiv 9 \pmod{15}$ selain 4, 9, dan 14.
3. $3x \equiv 6 \pmod{9}$, maka memiliki 3 solusi karena $(3,9) = 3$ dan $3 \mid 6$. Solusinya dapat diselesaikan sebagai berikut.

   $3x \equiv 2.3 \pmod{3.3}$
   $x \equiv 2 \pmod{3}$
   $x \equiv 5 \pmod{3}$
   $x \equiv 8 \pmod{3}$

   nilai-nilai x yang memenuhi kongruensi linear $3x \equiv 6 \pmod{9}$ adalah 2, 5, 8 . dengan $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
4. $15x \equiv 9 \pmod{25}$ tidak memiliki solusi karena $(15,25) = 5$ dan $5 \nmid 9$.
5. $17x \equiv 14 \pmod{21}$, memiliki solusi tunggal karena $(17,21) = 1$ dan $1 \mid 14$. Solusinya dapat diselesaikan sebagai berikut.

   $17x \equiv 14 \pmod{21}$
   $17x \equiv 35 \pmod{21}$
   $17x \equiv 56 \pmod{21}$

$17x \equiv 77 \pmod{21}$
$17x \equiv 98 \pmod{21}$
$17x \equiv 119 \pmod{21}$
$x \equiv 7 \pmod{21}$

2. INVERS MODULO

Kongruensi dengan bentuk khusus $ax \equiv 1 \pmod{m}$, berdasarkan Teorema 8.1 ada sebuah solusi untuk kongruensi tersebut jika dan hanya jika $(a,m) = 1$ dan kemudian semua solusi adalah kongruen modulo m.

Definisi 8.2

Diketahui bilangan bulat a dengan $(a,m) = 1$, sebuah solusi bilangan bulat x dari $ax \equiv 1 \pmod{m}$ disebut invers dari a mod m.

Contoh 8.3

Tentukan $4^{-1} \pmod{17}$!

Penyelesaian

$4x \equiv 1 \pmod{17}$
$4x \equiv 18 \pmod{17}$
$4x \equiv 35 \pmod{17}$
$4x \equiv 52 \pmod{17}$
$x \equiv 13 \pmod{17}$

jadi invers 4 modulo 17 adalah 13

Selanjutnya akan ditunjukkan bilangan bulat adalah invers modulo p, dengan p adalah prima yang dirangkum pada Teorema dibawah ini:

Teorema 8.2

Andaikan p prima. bilangan bulat positif a adalah Invers dirinya sendiri modulo p jika dan hanya jika $a \equiv 1 \pmod{p}$ atau $a \equiv -1 \pmod{p}$

Bukti :

Jika $a \equiv 1 \pmod{p}$ atau $a \equiv -1 \pmod{p}$ maka $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ sedemikian sehingga a adalah invers a mod p.

Sebaliknya,

Jika a adalah invers a mod p, maka $a^2 = a.a \equiv 1 \pmod{p}$ akibatnya $p|(a^2-1)$.

Karena $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$, ini mengimplikasikan bahwa $p|(a - 1)$ atau $p|(a + 1)$.

Jadi, $a \equiv 1 \pmod{p}$ atau $a \equiv -1 \pmod{p}$

3. TEOREMA SISA

Salah seorang matematikawan dari China **Ch'in Chiu Shao** pernah melontarkan sebuah pertanyaan:"Jika suatu bilangan dibagi 3 maka bersisa 1, jika dibagi 5 bersisa 2 dan jika dibagi 7 bersisa 3. Berapakah bilangan tersebut?". Pertanyaan tersebut dapat ditulis :

$x \equiv 1 \pmod{3}$
$x \equiv 2 \pmod{5}$
$x \equiv 3 \pmod{7}$

Ch'in Chiu Shao selanjutnya mengemukakan sebuat teorema untuk menyelesaikan persoalan tersebut. Cara tersebut sering disebut dengan istilah ***Chine's Reminder Theorem***. atau **Teorema Sisa China**, dimana pasangan dari setiap dua modulo dari kongruensi adalah relatif prima.

Teorema 8.3 (Teorema Sisa China)

Ditentukan bahwa $m_1, m_2, \ldots, m_r$ adalah bilangan-bilangan bulat positif yang setiap pasang adalah relative prima, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah sebarang r bilangan bulat. Sistem kongruensi linier:

$$x \equiv a1 \pmod{m1}$$
$$x \equiv a2 \pmod{m2}$$
$$.$$
$$.$$
$$x \equiv ar \pmod{mr}$$

mempunyai suatu solusi yang tunggal modulo $M = m_1.m_2 \ldots m_r$

Bukti

$M = m_1.m_2 \dots\ m_r$, dan ambil $M_i = M/m_i$, maka $m_i|M$ sehingga $(M_i, m_i) = 1$ dengan $1 \leq i \leq r$ .Sesuai dengan Teorema 8.1, karena $(M_i, m_i) = 1$, maka tentu ada satu $b_i \in Z$ sedemikian hingga $M_ib_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, dan $M_ib_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ jika $i \neq j$. Ambil $x = M_1b_1a_2 + M_2b_2a_2 + \dots + M_rb_ra_r$, maka x adalah suatu solusi bersama dari r kongruensi linier. Untuk menunjukkan hal ini, kita harus membuktikan bahwa

$$x \equiv a_i \ (mod\ m_i)\ untuk\ i = 1,2, \dots, r$$
$$x = M_1b_1a_2 + M_2b_2a_2 + \dots + M_rb_ra_r$$
$$\equiv (M1b1a1 + M2b2a2 + \dots + Mibiai + \dots + Mrbrar)\ (mod\ mi)$$
$$\equiv (0.a1 + 0.a2 + \dots + 1.ai + \dots + 0.ar)\ (mod\ mi)$$
$$x \equiv ai\ (mod\ mi), i = 1,2, \dots, r$$

terbuktilah bahwa sistem kongruen $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ untuk $i = 1,2, \dots, r$ mempunyai solusi bersama mod $(m_1.m_2.m_3.....m_r)$.

Selanjutnya tinggal menunjukkan bahwa solusi itu tunggal, dimisalkan ada dua solusi yaitu x_0 dan x_1, maka $x_0 \equiv x_1 \equiv a_i \pmod{m_i}$, yaitu $x_0 \equiv x_1 \pmod{m_i}$, atau $m_i|x_0 - x_1$. Dengan demikian $m_1|x_0 - x_1$, $m_2|x_0 - x_1$, ... , $m_r|x_0 - x_1$, dan sesuai dengan Teorema 7.9, $m_1m_2 \dots m_r|x_0 - x_1$, atau $M|x_0 - x_1$, berarti $x_0 \equiv x_1 \pmod{M}$. Jadi solusi bersama dari system r kongruensi linier adalah tunggal modulo m.

Contoh 8.4

Tentukan solusi dari $x \equiv 1 \pmod{3}$; $x \equiv 2 \pmod{5}$ dan $x \equiv 3 \pmod{7}$!

Penyelesaian

Cara 1

$x \equiv 1 \pmod{3}$

perkongruenan tersebut berarti :

$x = 1 + 3a$ .... (1)

persamaan (1) tersebut kita substitusikan ke $x \equiv 2 \pmod{5}$

$x \equiv 2 \pmod{5}$

$1 + 3a \equiv 2 \pmod 5$ kedua ruas dikurangi dengan 1

$1 + 3a - 1 \equiv 2 - 1 \pmod 5$

$3a \equiv 1 \pmod 5$ ruas kanan ditambah dengan 5

$3a \equiv 1 + 5 \pmod 5$

$3a \equiv 6 \pmod 5$

$3a \equiv 3.2 \pmod 5$ kedua ruas dibagi 3

$a \equiv 2 \pmod 5$

perkongruenan ini berarti :

$a = 2 + 5b$ .... (2)

persamaan (2) disubstitusikan ke persamaan (1) diperoleh :

$x = 1 + 3a$

$x = 1 + 3(2 + 5b)$

$x = 1 + 6 + 15\,b$

$x = 7 + 15b$ ....(3)

persamaan (3) disubstitusikan ke perkongruenan $x \equiv 3 \pmod 7$

$x \equiv 3 \pmod 7$

$7 + 15b \equiv 3 \pmod 7$ kedua ruas dikurangi dengan 7

$7 + 15b - 7 \equiv 3 - 7 \pmod 7$

$15b \equiv -4 \pmod 7$ ruas kanan ditambahkan dengan 7x7

$15b \equiv -4 + 7.7 \pmod 7$

$15b \equiv -4 + 49 \pmod 7$

$15b \equiv 45 \pmod 7$

$15b \equiv 15.\,3 \pmod 7$ bagi kedua ruas dengan 15

$b \equiv 3 \pmod 7$

perkongruenan ini berarti :

$b = 3 + 7c$ .... (4)

persamaan (4) ini kita substitusikan ke persamaan (3) maka diperoleh :

$x = 7 + 15(3 + 7c)$

$x = 7 + 45 + 105c$

$x = 52 + 105c$ .... (5)

persamaan (5) ini dapat ditulisa dalam bentuk :

$x \equiv 52 \pmod{105}$

jadi bilangan tersebut adalah 52

bisa dilihat bahwa jika 52 dibagi 3 maka akan bersisa 1, jika dibagi 5 akan bersisa 2 dan jika dibagi 7 akan bersisa 3.

Cara lain untuk menyelesaiakan soal tersebut di atas bisa dilihat dengan cara 2 berikut ini.

Cara 2 (dengan teorema 8.3)

$x \equiv 1 \pmod{3}$
$x \equiv 2 \pmod{5}$
$x \equiv 3 \pmod{7}$

misalnya :

$a_1 = 1$	$m_1 = 3$	$M_1 = m_2 \times m_3 = 5 \times 7 = 35$
$a_2 = 2$	$m_2 = 5$	$M_2 = m_1 \times m_3 = 3 \times 7 = 21$
$a_3 = 3$	$m_3 = 7$	$M_3 = m_1 \times m_2 = 3 \times 5 = 15$

dari nilai M_1,M_2 dan M_3 maka dapat ditulis :

$M_1x = 35x \equiv 1 \pmod{3}$ ruas kanan ditambahkan dengan 3 x 23
$35x \equiv 1 + 3.23 \pmod{3}$
$35x \equiv 70 \pmod{3}$ kedua ruas dibagi 35
$x \equiv 2 \pmod{3}$

kita peroleh $s_1 = 2$

$M_2x = 21x \equiv 1 \pmod{5}$ ruas kanan ditambah dengann 4 x 5
$21x \equiv 1 + 4.5 \pmod{5}$
$21x \equiv 21 \pmod{5}$ kedua ruas dibagi 21
$x \equiv 1 \pmod{5}$

diperoleh $s_2 = 1$

$M_3x = 15x \equiv 1 \pmod{7}$ ruas kanan ditambah dengan 7 x 2
$15x \equiv 1 + 7.2 \pmod{7}$
$15x \equiv 15 \pmod{7}$ kedua ruas dibagi dengan 15

$x \equiv 1 \pmod 7$

diperoleh s_3 =1
untuk mencari hasil akhir maka kita gunakan rumus :

$s = a_1s_1M_1 + a_2s_2M_2 + a_3s_3M_3$
$s = 1.2.35 + 2.1.21 + 3.1.15$
$s = 70 + 42 + 45$
$s = 157$

maka sistem perkonrunan di atas dapat ditulis :

$x \equiv s \pmod{m_1m_2m_3}$
$x \equiv 157 \pmod{3.5.7}$
$x \equiv 157 \pmod{105}$
$x \equiv 157 - 105 \pmod{105}$
$x \equiv 52 \pmod{105}$

jadi bilangan tersebut adalah 52.

Contoh 8.5

- Selesaikan system kongruensi linier simultan $x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 3 \pmod 7$, dan $x \equiv 4 \pmod 9$

Solusi

$a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $m_1 = 8$, $m_2 = 7$, dan $m_3 = 9$
$(m_1,m_2) = (m_1,m_3) = (m_2,m_3) = 1$
$M = m_1m_2m_3 = 8.7.9 = 504$
$M_1 = (M/m_1) = \frac{504}{8}$
$(M/m_1)b_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, maka $7.9b_1 \equiv 1 \pmod 8$, sehingga $b_1 = 7$
$M_2 = (M/m_2) = \frac{504}{7}$
$(M/m_2)b_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$, maka $8.9b_2 \equiv 1 \pmod 7$, sehingga $b_2 = 4$
$M_3 = (M/m_3) = \frac{504}{9}$
$(M/m_3)b_3 \equiv 1 \pmod{m_3}$, maka $8.7b_3 \equiv 1 \pmod 9$, sehingga $b_3 = 5$
Jadi $x = 7.9.7.5 + 8.9.4.3 + 8.7.5.4 = 4189$
$x \equiv 157 \pmod{504}$

- Tentukan solusi dari kongruensi linear $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 7$, $x \equiv 5 \pmod{11}$

  Penyelesaian:

  $(m_1,m_2) = (m_1,m_3) = (m_1,m_4) = (m_1,m_5) = (m_2,m_3) = (m_2,m_4) = (m_2,m_5) = (m_3,m_4) = (m_3,m_5) = (m_4,m_5) = 1$

  $M = m_1.m_2.m_3.m_4.m_5 = 2.3.5.7.11 = 2310$

  $M_1 = \frac{M}{m_1} = 3.5.7.11 = 1155$,

  $\frac{M}{m_1}b_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$ maka $1155b_1 \equiv 1 \pmod 2$ sehingga $b_1 = 1$

  $M_2 = \frac{M}{m_2} = 2.5.7.11 = 770$,

  $\frac{M}{m_2}b_2 \equiv 1 \pmod{m_2}$ maka $770b_2 \equiv 1 \pmod 3$ sehingga $b_2 = 2$

  $M_3 = \frac{M}{m_3} = 2.3.7.11 = 462$,

  $\frac{M}{m_3}b_3 \equiv 1 \pmod{m_3}$ maka $462b_3 \equiv 1 \pmod 5$ sehingga $b_3 = 3$

  $M_4 = \frac{M}{m_4} = 2.3.5.11 = 330$,

  $\frac{M}{m_4}b_4 \equiv 1 \pmod{m_4}$ maka $330b_4 \equiv 1 \pmod 7$ sehingga $b_4 = 1$

  $M_5 = \frac{M}{m_5} = 2.3.5.7 = 210$,

  $\frac{M}{m_5}b_5 \equiv 1 \pmod{m_5}$ maka $210b_5 \equiv 1 \pmod{11}$ sehingga $b_5 = 1$

  Maka $x = (1155) + 2\ (770)\ 2 + 3\ (462)\ 3 + 4\ (330) + 5\ (210)$

  $= 1155 + 3080 + 4158 + 1320 + 1050$

  $= 10.763$

  $x \equiv 1532 \pmod{2310}$

- Sebuah kotak berisi sejumlah telur. Jika dari kotak tersebut diambil 2, 3, 4, 5, 6 setiap kali ambil, maka sisa dalam kotak berturut 1, 2, 3, 4, 5 butir telur. Tetapi jika diambil 7 butir setiap kali ambil maka tak ada sisanya. Tentukan banyaknya telur minimal dalam kotak tersebut!

  Penyelesaian:

  Misalkan kotak itu berisi x butir telur, maka kalimat matematika dari soal tersebut adalah suatu system kongruensi sebagai berikut.

  $x \equiv 1 \pmod 2$; $x \equiv 2 \pmod 3$; $x \equiv 3 \pmod 4$; $x \equiv 4 \pmod 5$; $x \equiv 4 \pmod 6$; $x \equiv 0 \pmod 7$

kongruensi terakhir, $x \equiv 0 \pmod 7$ sama artinya dengan $x = 7k$, dengan k bilangan bulat. Jika $x = 7k$, disubtitusikan pada 5 kongruensi lainnya, maka diperoleh:

$7k \equiv 1 \pmod 2$ atau $k \equiv 1 \pmod 2$
$7k \equiv 2 \pmod 3$ atau $k \equiv 2 \pmod 3$
$7k \equiv 3 \pmod 4$ atau $k \equiv 1 \pmod 4$
$7k \equiv 4 \pmod 5$ atau $k \equiv 2 \pmod 5$
$7k \equiv 5 \pmod 6$ atau $k \equiv 5 \pmod 6$

Dua kongruensi pertama, yaitu $k \equiv 1 \pmod 2$ bersama dengan $k \equiv 2 \pmod 3$ ekuivalen dengan kongruensi terakhir, yaitu $k \equiv 5 \pmod 6$. Sehingga lima kongruensi tersebut mempunyai solusi yang sama dengan system tiga kongruensi terakhir, yaitu:

$$k \equiv 1 \pmod 4$$
$$k \equiv 2 \pmod 5$$
$$k \equiv 5 \pmod 6$$

dari kongruensi $k \equiv 1 \pmod 4$ berarti $k = 1 + 4k_1$, untuk suatu bilangan bulat k_1.

Substitusikan nilai k dalam kongruensi kedua dan diperoleh

$$1 + 4k_1 \equiv 2 \pmod 5$$
$$4k_1 \equiv 1 \pmod 5$$
$$k_1 \equiv 4 \pmod 5$$

ini berarti $k_1 \equiv 4 + 5k_2$ untuk suatu bilangan bulat k_2.

Substitusikan nilai k_1 dalam $k = 1 + 4k_1$ sehingga diperoleh

$$k = 1 + 4\,(4 + k_2)$$
$$= 1 + 16 + 20k_2 = 17 + 20\,k_2$$

Substitusikan nilai k ini dalam kongruensi ketiga dan diperoleh

$$17 + 20k_2 \equiv 5 \pmod 6$$
$$20k_2 \equiv -\,12 \pmod 6$$
$$2k_2 \equiv -\,12 \pmod 6$$
$$k_2 \equiv -2 \pmod 3$$
$$k_2 \equiv 0 \pmod 3$$

Hal ini berarti $k_2 = 3t$ untuk suatu bilangan bulat t.

Substitusikan nilai k2 ini dalam persamaan $k = 17 + 20\,k_2$ sehingga memperoleh $k = 17 + 60t$, dengan t bilangan bulat. Jadi kotak tersebut minimal berisi 17 butir telur.

4. SISTEM PERKONGRUENAN LINIER

Pada pembahasan tentang aljabar (biasa), salah satu topik adalah sistem persamaan linier. Dua persamaan linier dua variabel, tiga persamaan linier tiga variabel, atau *n* persamaan linier *n* variabel membentuk sistem persamaan linier. Penyelesaian sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan cara eliminasi, cara substitusi, cara matriks, operasi baris elementer (OBE) atau cara determinan. Masing-masing cara mempunyai langkah- langkah dan aturan-aturan tertentu dalam memperoleh selesaian.

Serupa dengan pembahasan di aljabar, salah satu topik di teori bilangan adalah sistem kongruensi linier. Sistem kongruensi linier *n* variabel adalah gabungan dari *n* kongruensi linier bermodulo sama yang masing-masing-masing memuat paling banyak *n* variabel. Penyelesaian sistem kongruensi linier juga dapat dilakukan dengan substitusi, eliminasi, atau dengan menggunakan matriks dan determinan.

Berikut sedikit permulaan pembahasan tentang sistem kongruensi linier ini dengan sebuah contoh, yaitu akan dicari semua bilangan bulat *x* dan *y* sehingga :

$2x + 3y \equiv 7 \pmod{11}$
$3x + 5y \equiv 6 \pmod{11}$

Jika menggunakan cara eliminasi, maka perlu ditapkan terlebih dahulu yang akan dieliminasi, yaitu *x* atau *y.* Misalkan dietapkan *y* dieliminasi, maka kongruensi pertama dikalikan 5 dan kongruensi kedua dikalikan 3, sehingga diperoleh :

$10x + 15y \equiv 35 \pmod{11}$
$9x \;\; + 15y \equiv 18 \pmod{11}$

Jika kongruensi pertama dikurangi kongruensi kedua, maka diperoleh :

$x \equiv 17 \pmod{11}$,
$x \equiv 6 \pmod{11}$

Dengan cara yang sama, jika *x* yang dieliminasi, maka kongruensi pertama dikalikan 3 dan kongruensi kedua dikalikan 2, sehingga diperoleh :

$6x + 9y \;\; \equiv 21 \pmod{11}$

$6x + 10y \equiv 12 \pmod{11}$

Jika kongruensi kedua dikurangi kongruensi pertama, maka diperoleh :

$y \equiv -9 \pmod{11}$
$y \equiv \ \ 2 \pmod{11}$

Jadi, bilangan x dan y yang memenuhi sistem kongruensi linear tersebut adalah:

$y \equiv 2 \pmod{11}$ dan $x \equiv 6 \pmod{11}$

Teorema 8.4

Diketahui $a, b, c, d, e, f, m \in Z$, $m > 0$, dan $\Delta = ad - bc$ sehingga $(\Delta, m) = 1$

Sistem kongruensi linier :

$$ax + by \equiv e \pmod{m}$$
$$cx + dy \equiv f \pmod{m}$$

mempunyai suatu solusi tunggal yaitu :

$$x \equiv \bar{\Delta}\,(de - bf) \pmod{m}$$

$$y \equiv \bar{\Delta}\,(af - ce) \pmod{m}$$

dimana $\bar{\Delta}$ adalah inverse dari Δ modulo m.

Bukti :

Jika y akan dieliminasi, maka kongruensi pertama dikalikan d dan kongruensi ke-dua dikalikan b, sehingga diperoleh :

$$adx + bdy \equiv de \pmod{m}$$
$$bcx + bdy \equiv bf \pmod{m}$$

Jika kongruensi pertama dikurangi kongruensi kedua, maka diperoleh :

$(ad - bc)x \equiv (de - bf) \pmod{m}$ atau $\Delta x \equiv (de - bf) \pmod{m}$ sehingga

$$\bar{\Delta}\,\Delta x \equiv \bar{\Delta}\,(de - bf) \pmod{m}$$

Karena $\bar{\Delta}\Delta \equiv 1 \pmod{m}$, maka diperoleh $\mathbf{x \equiv \bar{\Delta}\ (de - bf) \pmod{m}}$

Selanjutnya, jika x akan dieliminasi, maka kongruensi pertama dikalikan c dan kongruensi kedua dikalikan a , sehingga diperoleh :

$$acx + bcy \equiv ce \pmod{m}$$
$$acx + ady \equiv af \pmod{m}$$

Jika kongruensi kedua dikurangi kongruensi pertama, maka diperoleh :

$(ad - bc)y \equiv (af - ce) \pmod{m}$ atau $\Delta y \equiv (af - ce) \pmod{m}$ sehingga

$\bar{\Delta}\Delta y \equiv \bar{\Delta}\ (af - ce) \pmod{m}$

Karena $\bar{\Delta}\Delta \equiv 1 \pmod{m}$, maka diperoleh $\mathbf{y \equiv \bar{\Delta}\ (af - ce) \pmod{m}}$

Contoh 8.6

Selesaikan sistem kongruensi linier :

$$4x - 7y \equiv 6 \pmod{17}$$
$$5x + 2y \equiv 9 \pmod{17}$$

Jawab :

$\Delta = 4.2 - (-7)(5) = 43 \equiv 9 \pmod{17}$ dan

$\bar{\Delta} = 2$, sebab $\bar{\Delta}\Delta = 86 \equiv 1 \pmod{17}$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} x &\equiv \bar{\Delta}\,(de - bf) \pmod{m} \\ &\equiv 2\,(2.6 + 7.9) \pmod{17} \\ &\equiv 14 \pmod{17} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} y &\equiv \bar{\Delta}\,(af - ce) \pmod{m} \\ &\equiv 2\,(4.9 - 5.6) \pmod{17} \\ &\equiv 12 \pmod{17} \end{aligned}$$

Pemeriksaan :

jika $x = 14$ dan $y = 12$ disubstitusikan pada masing-masing kongruensi diperoleh

$4x - 7y = 4.14 - 7.12 = 56 - 84 = -28 \equiv 6 \pmod{17}$ dan
$5x + 2y = 5.14 + 2.12 = 70 + 24 = 94 \equiv 9 \pmod{17}$

Untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier 3 variabel atau lebih dengan cara eliminasi memerlukan langkah-langkah yang lebih panjang karena tahapan memperoleh *x* melalui eliminasi variabel-variabel yang lain. Cara menyelesaikan sistem kongruensi linier *n* variabel yang relatif mudah adalah dengan menggunakan aljabar linier, yaitu persamaan matriks.

Definisi 8.3

Ditentukan A dan B adalah matriks-matriks berukuran $p \times q$ yang elemen-elemennya bilangan bulat, a_{ij} merupakan elemen A pada baris ke *i* kolom ke *j*, dan b_{ij} merupakan elemen B pada baris ke *i* kolom ke *j*. A disebut kongruen dengan B modulo m jika $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$ untuk setiap pasangan (i,j) dengan $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, dan ditulis dengan $A \equiv B \pmod{m}$.

Contoh 8.7

(a) $\begin{bmatrix} 34 & 46 \\ 23 & 29 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \pmod{13}$

Sebab $34 \equiv 8 \pmod{13}$, $46 \equiv 7 \pmod{13}$, $23 \equiv 10 \pmod{13}$, $29 \equiv 3 \pmod{13}$

(b) $\begin{bmatrix} -20 & 5 & 39 \\ 15 & 7 & 58 \\ -62 & 12 & 41 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \pmod{7}$

Teorema 8.5

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran $p \times q$, $A \equiv B \pmod{m}$, dan C adalah suatu matriks berukuran $q \times r$, D adalah suatu matriks berukuran $r \times p$, semua elemen-elemenya bilangan bulat, maka $AC \equiv BC \pmod{m}$ dan $DA \equiv DB \pmod{m}$

Bukti :

Misalkan elemen-elemen A adalah a_{ij} , elemen-elemen B adalah b_{ij} dengan $1 \le i \le p$ dan $1 \le j \le q$, dan elemen-elemen C adalah c_{ij} dengan $1 \le j \le$ q dan $1 \le j \le r$.

Unsur AC dan BC pada baris ke i kolom ke j berturut-turut adalah :

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik}c_{kj} \text{ dan } \sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj} \text{ , } 1 \le i \le p \text{ dan } 1 \le j \le r$$

Diketahui bahwa A ≡ B (mod m) , maka sesuai definisi 4.3 , $a_{ik} \equiv b_{ik}$ (mod m) untuk semua i dan k, yaitu :

$$\sum_{k=1}^{q} a_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj} \text{ , } 1 \le i \le p \text{ dan } 1 \le j \le r$$

Akibatnya, AC ≡ BC (mod m).

Dengan cara yang sama, buktikan DA ≡ DB (mod m).

Contoh 8.8

Diketahui :

A dan B keduanya berukuran 3 x 2 , A = $\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 10 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

C berukuran 2 x 4, D berukuran 2 x 3 , C = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ dan D = $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

AC = $\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 10 \\ 20 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 & 72 & 78 & 93 \\ 76 & 82 & 98 & 83 \\ 75 & 101 & 134 & 69 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ (mod 8)

BC = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 16 & 14 & 29 \\ 20 & 26 & 34 & 19 \\ 43 & 37 & 38 & 53 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ (mod 8)

DA = $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 10 \\ 20 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 58 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (mod 8)

$$DB = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 58 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \pmod 8$$

Perhatikan bahwa AC ≡ BC (mod 8) dan DA ≡ DB (mod 8)

Marilah sekarang kita lihat cara memperoleh solusi sistem kongruensi linier dengan menggunakan persamaan matriks, suatu cara yang serupa/mirip dengan cara memperoleh solusi sistem persamaan linier di dalam aljabar (linier).

Secara umum, suatu sistem kongruensi linier dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod m \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \equiv b_n \pmod m \end{array}$$

Dalam bentuk persamaan matriks, sistem kongruensi linier ini dapat ditulis dengan :

AX ≡ B (mod *m*)

dimana :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \ \textbf{dan} \ \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 8.9

Suatu sistem kongruensi linier :

$2x + 3y + 4z \equiv 2 \pmod{11}$

$3x + y + 2z \equiv 7 \pmod{11}$
$4x + 2y + z \equiv 3 \pmod{11}$

dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{11}$$

Solusi sistem kongruensi linier :

A X ≡ B (mod m)

diperoleh dari :

A^{-1} A X ≡ A^{-1} B (mod m) , A^{-1} adalah inverse A modulo m
I X ≡ A^{-1} B (mod m) , I adalah matriks identitas
X ≡ A^{-1}B (mod m)

dengan $\mathbf{A^{-1}}$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 8.4

Jika A dan A^{-1} adalah matriks-matriks dengan elemen-elemen bilangan bulat, dan berukuran $n \times n$, serta $A^{-1}A \equiv A\,A^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$, dengan :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matriks identitas berderajad n ,

maka A^{-1} disebut inverse matriks A modulo m.

Teorema 8.6

Diketahui suatu matriks :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dengan elemen-elemen bilangan bulat, Δ = det A = $ad - bc$, dan (Δ ,m) = 1. Maka invers matriks A modulo m adalah :

$$A^{-1} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dengan Δ^{-1} adalah invers Δ modulo m.

Bukti :

Untuk membuktikan A^{-1} adalah inversi A modulo m, kita harus membuktikan bahwa $AA^{-1} \equiv A^{-1}A \pmod{m}$

$$AA^{-1} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \Delta^{-1} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$\equiv \Delta^{-1} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Delta^{-1}\Delta & 0 \\ 0 & \Delta^{-1}\Delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1 \pmod{m}$$

Dengan jalan yang sama, buktikan bahwa $A^{-1}A \equiv I \pmod{m}$

Contoh 8.10

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, dengan demikian Δ = 5.8 – 7.3 = 19

Inversi dari Δ = 19 modulo 11 adalah Δ^{-1} = 7 sebab $\Delta\,\Delta^{-1}$ = 19.7 = 133 ≡ 1 (mod 11)

Jadi inversi A adalah $A^{-1} = 7 \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & -21 \\ -49 & 35 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (mod 11)

Selanjutnya, seperti uraian yang telah kita pelajari dalam aljabar linier, terutama pada topik matriks dan determinan, kita mengenal dan memahami tentang matriks adjoint dan dan rumusan mencari invers matriks dengan menggunakan matriks adjoint dan determinan.

Definisi 8.5

Ditentukan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ Adjoint dari matriks A, ditulis **adj A**, adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya adalah α_{ji} dengan α_{ij} sama dengan $(-1)^{i+j}$ dikalikan determinan suatu matriks yang diperoleh dengan menghapus semua elemen A pada baris ke *i* dan kolom ke *j*.

Teorema 8.7

Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan A bukan matriks nol , maka A (adj A) = Δ I

Dari Teorema tersebut, maka akan menurunkan Teorema di bawah ini:

Teorema 8.8

Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan semua elemen-elemennya adalah bilangan bulat, serta *m* adalah bilangan bulat positif sehingga (Δ, *m*) = 1, maka invers dari A adalah :

$$A^{-1} = \Delta^{-1} \text{ (adj A)}$$

Bukti

Karena (Δ, *m*) = 1 , maka $\Delta \neq 0$, dan sesuai Teorema 4.9 , A (adj A) = Δ I

Selanjutnya, dari (Δ, *m*) = 1 dapat ditentukan bahwa Δ mempunyai inverse Δ^{-1} modulo m, sehingga :

A (Δ^{-1}) (adj A) ≡ A (adj A) Δ^{-1} = (Δ I) Δ^{-1} ≡ $\Delta\ \Delta^{-1}$ I ≡ I (mod *m*) , dan
Δ^{-1} (adj A) A ≡ Δ^{-1} (adj A . A) ≡ $\Delta^{-1}\ \Delta$ I ≡ I (mod *m*)
Jadi Δ^{-1} (adj A) adalah inversi A, atau $A^{-1} = \Delta^{-1}$ (adj A)

Contoh 8.11

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka Δ = 4 , dan $\Delta^{-1} \equiv 3 \pmod{11}$

$$A^{-1} = \Delta^{-1} \text{ (adj A)} = 3 \begin{bmatrix} -1 & -14 & 10 \\ 2 & 12 & -8 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -42 & 30 \\ 6 & 36 & -24 \\ -3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \pmod{11}$$

Pemeriksaan :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 22 \\ 44 & 23 & 44 \\ 66 & 33 & 67 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{11}$$

Sekarang dapat menggunakan invers A modulo m untuk menyelesaikan suatu kongruensi linier :

$A\,X \equiv B \pmod{m}$

dengan $(\Delta, m) = 1$.

Berdasarkan Teorema 4.20, karena $(\Delta, m) = 1$, maka A mempunyai invers, misalnya A^{-1} sehingga jika kedua ruas $A\,X \equiv B \pmod{m}$ dikalikan A^{-1} diperoleh :

$$A^{-1}(A\,X) = A^{-1}B \pmod{m}$$
$$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \pmod{m}$$
$$I\,X = A^{-1}B \pmod{m}$$
$$X = A^{-1}B \pmod{m}$$

Dengan demikian selesaian kongruensi linier simultan adalah $X = A^{-1}B \pmod{m}$

Contoh 8.12

Selesaikan system kongruensi linier :

$x + 2y + z \equiv 4 \pmod{7}$, $x - y + z \equiv 5 \pmod{7}$, $2x + 3y + z \equiv 1 \pmod{7}$

Jawab : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; \text{dan } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta = 3$, dan $(\Delta, 7) = (3,7) = 1$, maka $\Delta^{-1} \equiv 5 \pmod 7$

$$A^{-1} = \Delta^{-1} (\text{adj } A) = 5 \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \\ 25 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 47 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Contoh 8.13

Tentukan solusi dari system kongruensi linear berikut:

a) $2x + 3y \equiv 5 \pmod{17}$
$x + 5y \equiv 6 \pmod{17}$

penyelesaian:

Sistem kongruensi linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \pmod 7$$

Dengan operasi baris elementer (OBE) persamaan matriks tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $2B_2 - B_1$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mod 7

Dengan demikian sistem kongruensi linear dapat diwakili oleh satu kongruensi linear $2x + 3y \equiv 5 \pmod 7$, sehingga solusinya yaitu:

Untuk $x = 0$, maka $3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv 12 \pmod 7$

$y \equiv 4 \pmod 7$

solusi ke- 1 adalah $x = 0$ dan $y \equiv 4 \pmod 7$

Untuk $x = 1$, maka $2 + 3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv 3 \pmod 7$

$y \equiv 1 \pmod 7$

solusi ke-2 adalah $x = 1$ dan $y \equiv 1 \pmod 7$

Untuk $x = 2$, maka $4 +3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv 1 \pmod 7$

$y \equiv 5 \pmod 7$

solusi ke-3 adalah $x = 2$ dan $y \equiv 5 \pmod 7$

Untuk $x = 3$, maka $6 + 3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv -1 \pmod 7$

$3y \equiv 6 \pmod 7$

$y \equiv 2 \pmod 7$

solusi ke-4 adalah $x = 3$ dan $y \equiv 2 \pmod 7$

Untuk $x = 4$, maka $8 + 3y \equiv 3 \pmod 7$

$3y \equiv -3 \pmod 7$

$y \equiv -1 \pmod 7$

$y \equiv 6 \pmod 7$

solusi ke-5 adalah $x = 4$ dan $y \equiv 6 \pmod 7$

Untuk $x = 5$, maka $10 + 3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv -5 \pmod 7$

$3y \equiv 2 \pmod 7$

$y \equiv 3 \pmod 7$

solusi ke-6 adalah $x = 5$ dan $y \equiv 3 \pmod 7$

Untuk $x = 6$, maka $12 + 3y \equiv 5 \pmod 7$

$3y \equiv -7 \pmod 7$

$3y \equiv 0 \pmod 7$

$y \equiv 0 \pmod 7$

solusi ke-7 adalah $x = 6$ dan $y \equiv 0 \pmod 7$

Jadi, terdapat 7 pasangan x dan y yang merupakan solusi.

b) $4x + y \equiv 5 \pmod 7$

$x + 2y \equiv 4 \pmod 7$

sistem kongruensi linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mod } 7$$

Dengan operasi baris elementer (OBE) matriks tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} B_{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} B_2 - 4B_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dari baris kedua di atas menyatakan bahwa system kongruensi linear tidak memiliki solusi.

Akan ditentukan solusi dari sistem berikut:

$x + y + z \equiv 1 \pmod 7$

$x + y + w \equiv 1 \pmod 7$

$x + z + w \equiv 1 \pmod 7$

$y + z + w \equiv 1 \pmod 7$

sistem kongruensi linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mod } 7$$

Akan diselesaikan dengan operasi baris elementer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_2 - B_1, B_3 - B_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_1 - B_4, B_2 + B_4, -B_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_4 - B_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_3 - B_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{mod } 7$$

Ini berarti,

$z = 1$

$-3w = -1$, maka $w = 1$

$y + 2w = 1$, maka $y = -1$

$x - y = 0$, maka $x = -1$

jadi, solusi dari sistem kongruensi linear tersebut dalam modulo 7 adalah

$z = 1 + 7t$, $w = 1 + 7t$, $y = 6 + 7t$, dan $x = 6 + 7t$, dengan t bilangan bulat.

Akan ditentukan banyaknya solusi inkongruen dari sistem kongruensi linear:

$3x + y + 3z \equiv 1 \pmod 5$

$x + 2y + 4z \equiv 2 \pmod 5$

$4x + 3y + 2z \equiv 3 \pmod 5$

Penyelesaian:

Sistem kongruensi linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \pmod 5$$

Dengan cara OBE, nilai *x, y,* dan *z* dapat ditemukan

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} 2B_1,\ B_3\text{-}B_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} B_3 - B_1,\ B_2 - B_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} 3B_1 - B$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa $3z = 0$ maka $z = 0$ dan $3x + y = 1$.

Selanjutnya, solusi yang dicari yaitu $3x + y \equiv 1 \pmod 5$

Untuk $x = 0$ maka $3x + y \equiv 1 \pmod 5$

$3(0) + y \equiv 1 \pmod 5$

$y \equiv 1 \pmod 5$

solusi ke-1 adalah $x \equiv 0$; $y \equiv 1 \pmod 5$

Untuk $x = 1$ maka $3x + y \equiv 1 \pmod 5$

$3(1) + y \equiv 1 \pmod 5$

$y \equiv -2 \pmod 5$

$y \equiv 3 \pmod 5$

solusi ke-2 adalah $x \equiv 1$; $y \equiv 3 \pmod 5$

Untuk $x = 2$ maka $3x + y \equiv 1 \pmod 5$

$3(2) + y \equiv 1 \pmod 5$
$y \equiv -5 \pmod 5$
$y \equiv 0 \pmod 5$

solusi ke-3 adalah $x \equiv 2$; $y \equiv 0 \pmod 5$

Untuk $x = 3$ maka $3x + y \equiv 1 \pmod 5$
$3(3) + y \equiv 1 \pmod 5$
$y \equiv 2 \pmod 5$

solusi ke-4 adalah $x \equiv 3$; $y \equiv 2 \pmod 5$

Untuk $x = 4$ maka $3x + y \equiv 1 \pmod 5$
$3(4) + y \equiv 1 \pmod 5$
$y \equiv 4 \pmod 5$

solusi ke-5 adalah $x \equiv 4$; $y \equiv 4 \pmod 5$

Jadi, banyaknya solusi dari sistem kongruensi linear tersebut adalah 5.

C. RANGKUMAN

1. Andaikan *a, b*, dan *m* adalah bilangan bulat dengan $m > 0$ dan $(a,m) = d$.
   a. Jika $d \nmid b$ maka $ax \equiv b \pmod m$ tidak memiliki solusi
   b. Jika $d \mid b$ maka $ax \equiv b \pmod m$ tepat memiliki *d* solusi inkongruen modulo *m*.
2. Jika *a* dan *m* adalah bilangan bulat relative prima dengan $m > 0$ dan *b* adalah bilangan bulat, maka kongruensi linear $ax \equiv b \pmod m$ memiliki solusi tunggal mod *m*.
3. Diketahui bilangan bulat *a* dengan $(a.m) = 1$, sebuah solusi bilangan bulat *x* dari
   $ax \equiv 1 \pmod m$ disebut invers dari *a* mod *m.*
4. Jika *p* prima bilangan bulat positif adalah Invers *a* modulo *p* jika dan hanya jika $a \equiv 1 \pmod p$ atau $a \equiv -1 \pmod p$.
5. Ditentukan bahwa $m_1, m_2, \ldots, m_r$ adalah bilangan-bilangan bulat positif yang setiap pasang adalah relative prima, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ adalah sebarang *r* bilangan bulat.

Sistem kongruensi linier:

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$

$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$

.

.

.

$x \equiv a_r \pmod{m_r}$

mempunyai suatu solusi yang tunggal modulo M = $m_1.m_2 \ldots\ m_r$

6. Diketahui $a, b, c, d, e, f, m \in$ Z , $m > 0$, dan $\Delta = ad - bc$ sehingga ($\Delta, m) = 1$

Sistem kongruensi linier :

$ax + by \equiv e \pmod{m}$

$cx + dy \equiv f \pmod{m}$

mempunyai suatu solusi tunggal yaitu :

$x \equiv \bar{\Delta}(de - bf) \pmod{m}$

$y \equiv \bar{\Delta}(af - ce) \pmod{m}$

dimana $\bar{\Delta}$ adalah inverse dari Δ modulo m.

7. Ditentukan A dan B adalah matriks-matriks berukuran $p \times q$ yang elemen-elemennya bilangan bulat, a_{ij} merupakan elemen A pada baris ke i kolom ke j, dan b_{ij} merupakan elemen B pada baris ke i kolom ke j. A disebut kongruen dengan B modulo m jika $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$ untuk setiap pasangan (i,j) dengan $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, dan ditulis dengan A ≡ B (mod m).
8. Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran $p \times q$, A ≡ B (mod m) , dan C adalah suatu matriks berukuran $q \times r$, D adalah suatu matriks berukuran $r \times p$, semua elemen-elemenya bilangan bulat, maka AC ≡ BC (mod m) dan DA ≡ DB (mod m).
9. Jika A dan A^{-1} adalah matriks-matriks dengan elemen-elemen bilangan bulat, dan berukuran $n \times n$, serta $A^{-1}A \equiv A\,A^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$, dengan :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matriks identitas berderajad n ,

maka A^{-1} disebut inverse matriks A modulo *m*.

10. Diketahui suatu matriks :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dengan elemen-elemen bilangan bulat, Δ = det A = $ad - bc$, dan (Δ ,*m*) = 1.

Maka invers matriks A modulo *m* adalah :

$$A^{-1} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

dengan Δ^{-1} adalah invers Δ modulo *m.*

11. Ditentukan A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ Adjoint dari matriks A, ditulis **adj A**, adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya adalah α_{ji} dengan α_{ij} sama dengan $(-1)^{i+j}$ dikalikan determinan suatu matriks yang diperoleh dengan menghapus semua elemen A pada baris ke *i* dan kolom ke *j*.
12. Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan A bukan matriks nol , maka A (adj A) = Δ I.
13. Jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ dan semua elemen-elemennya adalah bilangan bulat, serta *m* adalah bilangan bulat positif sehingga (Δ, *m*) = 1, maka invers dari A adalah :

$A^{-1} = \Delta^{-1}$ (adj A)

D. SOAL LATIHAN

1. Tentukan solusi dari perkongruenan berikut!.

a. $25x \equiv 15 (\text{mod } 29)$

b. $6x \equiv 15 \pmod{21}$

c. $36x \equiv 8 \pmod{102}$

d. $34x \equiv 60 \pmod{98}$

2. Dengan menggunakan perkongruenan, tentukan solusi dari persamaan diphantine berikut.!

   a. $12x + 25y = 331$

   b. $5x - 53y = 17$

3. Tentukan semua solusi dari perkongruenan linier $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$!

4. Tentukan solusi dari perkongruenan linier simultan berikut.!

   a. $x \equiv 5 \pmod{11}, x \equiv 14 \pmod{29}, x \equiv 15 \pmod{31}$

   b. $x \equiv 5 \pmod{6}, x \equiv 4 \pmod{11}, x \equiv 3 \pmod{17}$

   c. $2x \equiv 1 \pmod{5}, 3x \equiv 9 \pmod{6}, 4x \equiv 1 \pmod{7}, 5x \equiv 9 \pmod{11}$

5. Tentukan solusi dari sistem perkongruenan berikut.!

   a. $\begin{aligned} x + 2y &\equiv 1 \pmod{5} \\ 2x + y &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} x + 3y &\equiv 1 \pmod{5} \\ 3x + 4y &\equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$

   c. $\begin{aligned} 2x + 3y &\equiv 5 \pmod{7} \\ x + 5y &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$

6. Tentukan solusi dari sistem perkongruenan berikut.!

   a. $\begin{aligned} x + y &\equiv 1 \pmod{7} \\ x + z &\equiv 2 \pmod{7} \\ y + z &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &\equiv 1 \pmod{7} \\ x + 2y + 5z &\equiv 1 \pmod{7} \\ x + 4y + 6z &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$

7. Tentukan matriks A yang elemen-elemennya residu terkecil modulo 5 jika

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \pmod{5}$$

8. Tentukan invers modulo 5 dari matriks berikut.!

   a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. Tentukan invers modulo 7 dari matriks berikut!

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

DAFTAR PUSTAKA

Burton, David M.*Elementary Number Theory (7th ed)*. New York: Mc Graw Hill. 2010

Clark, Edwin. *Elementary Number Theory*. Florida: Departement of Mathematics University of Sout Florida. 2003

Hardy & Wright. *An Introduction to The Theory of Number (4th)*. London: Oxford University Press. 1960

Koblitz, N. *A Course in Number Theory and Criptography*. Newyork: Springer. 1994.

Manin, Y., M., & Pnchishkin. *Introduction to Modern Number Theory: Fundamental Problems, Ideas and Theories (Second Edition)*. Berlin: Springer. 2005.

Rosen, K.H. *Elementary Number theory and Its Application Sixth Edition*. Monmouth University. 2011

Santos, David, A,. *Elementary Number Theory*. 2004 (tidak diterbitkan)

Sukirman. *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator. 2006

Biodata Penulis

NURHARDIANI, lahir di Pamekasan, pada tanggal 25 April 1980. Menempuh pendidikan dasar di SDN Barurambat Kota 2 Pamekasan tahun 1992, pendidikan menengah pertama di SMPN 2 Pamekasan tahun 1995; pendidikan menengah atas di SMAN 1 Pamekasan tahun 1998; pendidikan tinggi strata 1 di Institut Teknologi Sepuluh Sepuluh Nopember Surabaya (ITS) Jurusan Teknik Fisika tahun 2003; pendidikan tinggi strata 2 di Universitas Negeri Malang (UM) Jurusan Pendidikan Matematika tahun 2007. Sekarang sedang menempuh pendidikan strata 3 (S3) di Universitas Negeri Surabaya (UNESA). Bekerja sebagai dosen tetap (PNS) di Jurusan Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah (FITK) IAIN Mataram sejak tahun 2008. Beberapa penelitian yang pernah dilakukan: Profil Alur Berpikir Mahasiswa Yang Berhasil Baik Dalam Memecahkan Masalah Teori Bilangan Berdasarkan Kecenderungan *Multiple Intelligences* (DIPA IAIN Mataram).

SUSILAHUDIN PUTRAWANGSA adalah dosen di Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) IAIN Mataram. Lahir pada tanggal 10 Januari 1986 di Lombok Timur, Nusa Tenggara Barat. Pendidikan sekolah dasar di tempuh di SDN 6 Suwangi, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama dan atas di Pondok Pesantren Nurul Haramain Narmada, Lombok Barat. Kemudian melanjutkan studi Strata 1 di Jurusan Pendidikan Matematika FITK IAIN Mataram (2006-2010). Pendidikan Strata 2 ditempuh melalui *International Master Program on Mathematics Education (IMPOME),* yaitu suatu program master pendidikan matematika berstandar internasional kerjasama antara Pemerintah Kerjaan Belanda (Utrecht University) dan Pemerintah Republik Indonesia (Universitas Negeri Surabaya) dari tahun 2011 hingga 2013. Pendidikan non-formal yang pernah diikutinya antara lain: (1) Pada tahun 2012 mengikuti *Utrecht Summer School on Mathematics Education* yang diadakan oleh Freudenthal Institute di Universitas Utrecht, Belanda; (2) *English for Academic Purpose* yang diselenggarakan oleh Pusat Budaya dan Bahasa, Universtias Gajah Mada, Yogyakarta yaitu pada tahun 2011; (3) Pada tahun 2009 – 2010, mengikuti program *Communicative English Teacher*

Training yang diadakan oleh LAPIS-ELTIS kerjasama antara pemerintah Indonesia dengan Australia; dan (4) *International English Language Study Program (IELSP)* yang diselenggarakan oleh IIEF bekerjasama dengan pemerintah Amerika Serikat di Universitas Ohio, yaitu pada tahun 2010. Sebelum menjadi dosen di Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) IAIN Mataram, beliau pernah mengajar mata pelajaran Matematika dan Bahasa Inggris di Sekolah Menengah Pertama dan Sekolah Menengah Atas dari tahun 2004 hingga 2010. Pada tahun 2013-2014, menjadi dosen di STKIP Hamzanwadi Selong. Kemudian pada tahun 2014, ditunjuk menjadi Ketua Program Studi Pendidikan Teknik Informatika di STKIP Hamzanwadi Selong. Adapun karya tulis ilmiah yang pernah ditulisnya antara lain: (1) *Educational Design Research: Developing Students' Understanding of Multiplication Strategy on Area Measurement;* (2) *Educational Design Research: Developing Students' Understanding of Area as Number of Units Covering Surface;* (3) *Students Prior Understanding of Area;* (4) *Illiterate Counting Strategy in Solving Mathematics Problems;* (5) *Supporting students' understanding of percentages: The didactical use of bar model;* (6) Pedoman Praktikum Desain Pembelajaran Matematika; dan (7) Modul Perkuliahan Teori Bilangan.

M. SYAWAHID, lahir di Kekait, Gunungsari-Lombok Barat, NTB pada tanggal 23 Desember 1987. Menempuh pendidikan dasar di MI At-Tahzib Kekait pada tahun 2000, pendidikan menengah pertama di MTs At-Tahzib Kekait tahun 2003; pendidian menengah atas di MA Al-Ishlahuddiny, Kediri-Lombok Barat, NTB tahun 2006; pendidikan tinggi strata 1 (S1) di IAIN Mataram tahun 2010 dan pendidikan tinggi strata 2 (S2) di Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) tahun 2013. Bekerja sebagai Dosen Tetap (PNS) di Jurusan Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) IAIN Mataram. Karya Ilmiah yang pernah di terbitkan diantaranya: Pengembangan Perangkat Pembelajaran SMP Terintegrasi dengan Pengembangan Kecerdasan Emosional dan Spiritual; Kemampuan Berfikir Formal Mahasiswa.