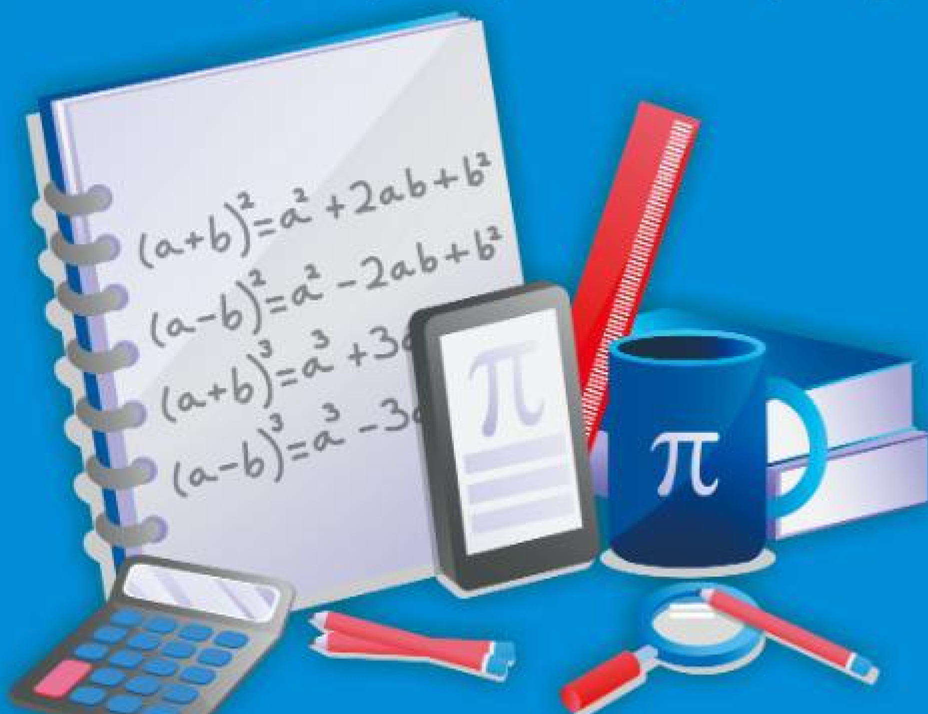
Pengembangan
Bahan Ajar Tiga Bahasa
(Bahasa Indonesia, Arab dan Inggris)

MATEMATIKA

untuk Madrasah Tsanawiyah (MTs) & Aliyah (MA)



Penulis:
Parhaini Andriani
Alkusaeri
Lalu Sucipto
Mauludin
Kristayulita
Erpin Evendi
Nurhardiani
Samsul Irpan
Sofyan Mahfudy
Kiki Riska Ayu Kurniawati
Ahmad Nasrullah
M. Syawahid
Indira Putri Kinasih
Hesi Kumalasari

Editor:
Dr. Yek Amin Azis, M.Pd.
Muhammad Muhlis. M.Pd.

Editor: Dr. Yek Amin Azis, M.Pd.
Muhammad Muhlis. M.Pd.
MATEMATIKA untuk Madrasah Tsanawiyah (MTs) & Aliyah (MA)

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR TIGA BAHASA

(Bahasa Indonesia, Arab, dan Inggris)

MATEMATIKA

untuk

Madrasah Tsanawiyah (MTs) & Aliyah (MA)

IMPLEMENTASI KERJASAMA UIN MATARAM DENGAN USTY

Penulis:

Parhaini Andriani
Alkusaeri
Lalu Sucipto
Mauludin
Kristayulita
Erpin Evendi
Nurhardiani
Samsul Irpan
Sofyan Mahfudy
Kiki Riska Ayu Kurniawati
Ahmad Nasrullah
M. Syawahid
Indira Putri Kinasih
Hesi Kumalasari

Editor: Dr. Yek Amin Azis, M.Pd.
Muhammad Muhlis. M.Pd.

Matematika untuk Madrasah Tsanawiyah (MTs) & Aliyah (MA)

Penulis	: Parhaini Andriani Alkusaeri Lalu Sucipto Mauludin Kristayulita Erpin Evendi Nurhardiani Samsul Irpan Sofyan Mahfudy Kiki Riska Ayu Kurniawati Ahmad Nasrullah M. Syawahid Indira Putri Kinasih Hesi Kumalasari
Editor	: Dr. Yek Amin Azis, M.Pd. Muhammad Muhlis. M.Pd.
Layout	:
Desain Cover	: Sanabil Creative

All rights reserved
Hak Cipta dilindungi Undang Undang
Dilarang memperbanyak dan menyebarkan sebagian atau keseluruhan isi buku dengan media cetak, digital atau elektronik untuk tujuan komersil tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit.

ISBN : 978-623-317-332-2
Cetakan 1 : Agustus 2022

Penerbit:
Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabilpublishing.com

Kerjasama dengan :
Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram
UPT. Pengembangan Bahasa (UPB)
Pendidikan Bahasa Arab (PBA)
Tadris Matematika (TMTK)
Tadris Bahasa Inggris (TBI)
Jalan Gajah Mada No.100 Jempong Baru-Mataram
Website: www.uinmataram.ac.id

University of Science & Technology, Yemen (USTY)

KATA PENGANTAR DAN SAMBUTAN
REKTOR UIN MATARAM

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah dan rasa syukur hendaknya senantiasa terscurahkan kehadirat-Nya, karena berkat limpahan nikmat-Nyalah buku "Pengembangan Bahan Ajar Tiga Bahasa, Bahan Ajar Matematika untuk MTs dan MA" sebagai bagian dari implementasi kerjasama Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram dan *University of Science and Technology, Yemen (USTY)* yang selanjutnya dikoordinir oleh UPT. Pengembangan Bahasa (UPB) UIN Mataram bisa kami ketengahkan ke hadapan pembaca sesuai batas waktu yang sudah ditentukan.

Dalam proses pengembangan, UPT. Pengembangan Bahasa (UPB) UIN Mataram selaku koordinator melibatkan dosen-dosen yang berkompeten dari Tadris Matematika (TMTK), Tadris Bahasa Inggris (TBI), Pendidikan Bahasa Arab (PBA), dan *University of Science and Technology, Yemen (USTY)*.

Kami sambut baik diterbitkannya buku ini, di mana keberadaan buku ini kami harapkan bisa dijadikan sebagai salah satu referensi bahan ajar mata kuliah Matematika untuk melengkapi referensi-referensi bahan ajar bagi siapa saja yang membutuhkannya.

Akhirnya kepada semua pihak, utamanya tim penyusun dan penerbit yang telah berperan aktif dalam kegiatan penyusunan buku ini kami sampaikan banyak terima kasih. Semoga semua ini dapat memberi manfaat yang sebesar-besarnya demi terlaksananya berbagai bentuk pengajaran yang inovatif dan memiliki ruh perubahan ke arah yang dicita-citakan, bernilai ibadah di sisi Allah, serta membawa dampak positif bagi lingkungan. Amin.

UIN Mataram, 29 Agustus 2022
Rektor,

KEMENTERIAN AGAMA
UIN MATARAM
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MATARAM
REPUBLIK INDONESIA

Prof. Dr. H. Masnun Tahir, M.Ag.

DAFTAR ISI

BAB I BILANGAN

Parhaini Andriani

Pada bab ini membahas tentang sistem bilangan riil yang terdiri dari bilangan asli, bilangan cacah, pecahan, bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan riil.

A. Sistem Bilangan Hindu-Arab

Sistem bilangan yang kita gunakan saat ini dinamakan system bilangan Hindu-Arab. Sistem bilangan ini memuat digit yang memuat sepuluh symbol: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sistem ini menggunakan basis 10 di mana peningkatan nilai tempat bertambah dengan pangkat sepuluh. Digit digunakan sebagai kombinasi untuk merepresentasikan seluruh bilangan yang mungkin. Sehingga sistem ini bersifat posisional, artinya posisi suatu lambang berpengaruh terhadap nilai lambang tersebut di dalam bilangan. Misalnya, posisi simbol 3 pada angka 435.681 memberikan nilai yang jauh lebih besar daripada nilai simbol 8 pada angka yang sama.

Sistem bilangan ini pada mulanya dikembangkan oleh ilmuan India sekitar abad ketiga SM dinama pada masa itu digunakan angka Brahmi. Angka Brahmi lebih rumit daripada y ang system bilangan yang kita gunakan saat ini. Angka Brahmi memiliki simbol berbeda untuk angka 1 hingga 9, serta simbol berbeda untuk 10, 100, 1000, …, juga untuk 20, 30, 40, …, dan lainnya untuk 200, 300, 400, …, 900.

Perkembangan sistem desimal posisional berasal dari matematikawan Hindu selama periode Gupta. Sekitar tahun 500, seorang astronom Bernama Aryabhata menggunakan kata kha ("kekosongan") untuk menandai "nol" dalam susunan angka tabel. Kemudian seorang ilmuan Hindu Bernama Brahmasphuta Siddhanta pada abad ke-7 memberikan pemahaman yang relatif maju tentang peran matematika dari nol. Perkembangan India ini diambil dalam matematika Islam pada abad ke-8.

Sistem bilangan kemudian diperkenalkan dengan baik oleh dua orang ilmuan Muslim terkenal, yaitu (1) Al-Khwarizmi (matematikawan Persia), yang menulis sebuah buku “On the Calculation with Hindu Numerals” sekitar tahun 825, dan (2) Al-Kindi (matematikawan Arab), yang menulis sebuah buku “On the Use of the Hindu Numerals” [kitāb fī isti'māl al-'adād al-hindī] (كتاب في استعمال العدد الهندي) sekitar tahun 830. Selanjutnya system bilangan ini berkembang ke seluruh dunia Islam dan akhirnya juga ke Eropa.

B. Bilangan cacah (whole number)

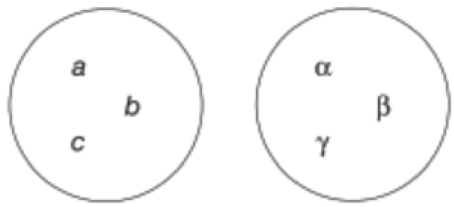
Bilangan (number) adalah suatu ide atau abstraksi yang merepresentasikan suatu kuantitas. Simbol bilangan dinamakan angka (numeral).

Terdapat tiga fungsi utama bilangan:

1. Menentukan banyaknya elemen pada himpunan finite, mengacu pada bilangan kardinal (cardinal numbers).
2. Menentukan keterurutan, mengacu pada bilangan ordinal (ordinal numbers).
3. Digunakan sebagai identitas, seperti nomor telepon, nomor rekening, nomor induk kependudukan, dan sebagainya. Fungsi ini mengacu pada bilangan identifikasi (identification numbers).

Konsep tentang bilangan kardinal perlu dipahami terlebih dahulu sebelum membahas tentang system bilangan yang lebih luas. Bilangan cardinal ini biasanya dikenal dengan bilangan asli (natural number).

Perhatikan dua himpunan pada Gambar 1 berikut!



Gambar 1. Dua himpunan dengan elemen yang berbeda-beda.

Himpunan pertama dan kedua tidak memiliki elemen yang sama. Himpunan pertama beranggotakan huruf {a, b, c} dan himpunan kedua beranggotakan huruf {α, β, γ}. Walaupuan kedua himpunan ini terbentuk dari elemen-elemen yang berbeda-beda, namun keduanya ekuivalen karena memiliki atribut sama yang dapat diasosiasikan dengan suatu bilangan tertentu yaitu 3.

Simbol $\boldsymbol{n(A)}$ merepresentasikan **banyaknya elemen pada himpunan finite A**.

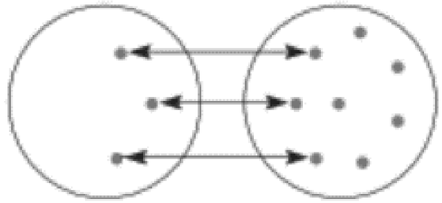
$n(\{a,b,c\}) = 3$ karena $\{a,b,c\} \sim \{1,2,3\}$

$n(\{a,b,c,\cdots,z\}) = 26$ karena $\{a,b,c,\cdots,z\} \sim \{1,2,3,\cdots,26\}$

Definisi Keterurutan Bilangan Cacah

Misalkan $a = n(A)$ dan $b = n(B)$. Maka a kurang dari b ditulis "$a < b$" atau b lebih besar dari a ditulis "$b > a$", jika himpunan *A* ekuivalen dengan proper subset dari himpunan *B*.

Misalnya pada Gambar 2, himpunan *A* memiliki 3 elemen dan himpunan *B* memiliki 8 elemen. Himpunan *A* adalah himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari himpunan *B*. Konsep ini dapat digunakan untuk menyatakan bahwa $3 < 8$ (dibaca 3 kurang dari 8).

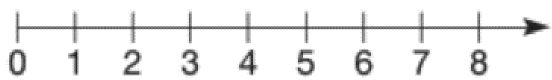


Himpunan *A* Himpunan *B*

Gambar 2. Korespondensi antara himpunan *A* dan himpunan *B*

Simbol ketaksamaan juga dapat dikombinasikan dengan simbol kesamaan yang dinyatakan dalam symbol: $a \leq b$ (dibaca a kurang dari atau sama dengan b) dan $b \leq a$ (dibaca $b$lebih dari atau sama dengan a).

Untuk menyatakan keterurutan pada bilangan cacah dapat pula digunakan garis bilangan, sebagaimana Gambar 4. Garis bilangan menunjukkan keterurutan bilangan dari terkecil ke terbesar. Artinya semakin ke kanan bilangan makin besar, demikian pula sebaliknya. Karena bilangan 3 letaknya lebih kiri dibandingkan dengan bilangan 8, maka 3 lebih kecil dari 8 (ditulis $a < b$)



Gambar 4. Garis bilangan

C. Algoritma pada Operasi bilangan cacah

Algoritma adalah prosedur, langkah-langkah sistematis yang digunakan untuk menemukan jawaban, yang biasanya digunakan untuk perhitungan.

1. Algoritma penjumlahan

Algoritma tertulis umum untuk penjumlahan melibatkan dua prosedur utama: (1) menambahkan satu digit (dengan demikian menggunakan fakta-fakta dasar) dan (2) membawa (mengelompokkan kembali atau menukar).

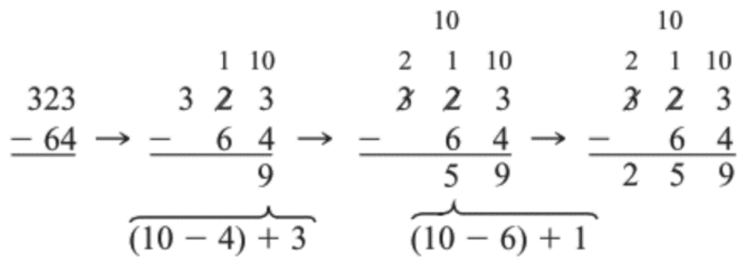
Metode nilai tempat dapat digunakan dalam bentuk yang diperluas sebagaimana contoh berikut.

$$\begin{aligned} 134 + 325 &= (1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) + (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5) \\ &= (1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + (4 + 5) \\ &= (1 + 3)10^2 + (3 + 2)10 + (4 + 5) \\ &= 400 + 50 + 9 \\ &= 459 \end{aligned}$$

2. Algoritma pengurangan

Algoritma umum untuk pengurangan melibatkan dua prosedur utama: (1) pengurangan bilangan yang ditentukan oleh tabel fakta penjumlahan dan (2) pertukaran atau pengelompokan ulang (kebalikan dari proses penjumlahan). Prosedur pertukaran ini biasanya menggunakan istilah “meminjam”.

Misalnya untuk mengoperasikan 323 – 64 digunakan prosedur pengurangan bersusun sebagaimana pada gambar 5 berikut.



Gambar 5 Contoh prosedur pengurangan bilangan bersusun

3. Algoritma perkalian

Algoritma perkalian standar melibatkan fakta perkalian, distributivitas, dan pemahaman menyeluruh tentang nilai tempat.

Berikut contoh prosedur untuk perkalian 34 x 12

$$
\begin{aligned}
34 \times 12 &= 34(10 + 12) \\
&= 34 \cdot 10 + 34 \cdot 2 \\
&= (30 + 4) \cdot 10 + (30 + 4) \cdot 2 \\
&= 30 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 30 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\
&= 300 + 40 + 60 + 8 \\
&= 300 + 100 + 8 \\
&= 408
\end{aligned}
$$

4. Algoritma pembagian

Operasi pembagian melibatkan algoritma pembagian panjang yang melibatkan satu atau mungkin dua digit bilangan pembagi. Ide utama dari algoritma pembagian panjang adalah algoritma pembagian yang berbunyi “jika a dan b adalah sembarang bilangan cacah dengan $b \neq 0$, maka terdapat bilangan cacah unik q dan r sedemikian sehingga $a = bq + r$, di mana $0 \leq r < b$”.

Berikut ini contoh prosedur pembagian 1976 : 32.

$$
\begin{array}{r}
61 \\
\hline
1 \\
60 \\
32\overline{)1976} \\
-1920 \\
\hline
56 \\
-32 \\
\hline
24
\end{array}
$$

Langkah 1: berapakah kira-kira 1976 dibagi 32? Dugaan: 60
Langkah 2: Operasikan 1976 – (60 x 32) = 1976 – 1920 = 56
Langkah 3: berapakah kira-kira 56 dibagi 32? Dugaan: 1
Langkah 4: Operasikan 56 – 32 = 24

Berdasarkan perhitungan di atas dapat dibuat pernyataan berdasarkan algoritma pembagian sebagaimana berikut:

$$32 \cdot 61 + 24 = 1952 + 24 = 1976$$

5. Urutan Operasi

Operasi pada bilangan mencakup: penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian serta perpangkatan (eksponen). Kebingungan seringkali terjadi Ketika dihadapkan pada lebih dari satu operasi pada suatu pernyataan matematika tertentu. Misalnya ketika mengoperasikan $3 + 4 \times 5$, mana yang dahulu dioperasikan? Jika $3 + 4$ diselesaikan pertama, maka didapat $7 \times 5 = 35$. Namun apabila 4×5 dioperasikan pertama, maka didapat $20 + 3 = 23$. Kedua prosedur ini memberikan hasil yang berbeda. Untuk mengeliminasi kebingungan dalam melakukan prosedur yang melibatkan lebih dari satu operasi, maka para matematikawan menyepakati urutan operasi.

Urutan Operasi pada Bilangan *Tanda Kurung, Eksponen, Perkalian dan Pembagian, Penjumlahan dan Pengurangan.* *PEMDAS (Parentheses, Exponent, Multiplication, Division, Addition and Subtraction)*

Contoh:
Gunakan sifat keterurutan pada operasi bilangan untuk menyelesaikan pernyataan berikut:

a. $5^3 - 4 \cdot (1 + 2)^2$
b. $11 - 4 \div 2 \cdot 5 + 3$

Penyelesaian:

a. $5^3 - 4 \cdot (1 + 2)^2 \quad = 5^3 - 4 \cdot 3^2$
$= 125 - 4 \cdot 9$

$= 125 - 36$
$= 89$

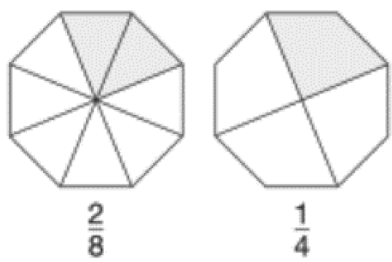
b. $11 - 4 \div 2 \cdot 5 + 3 = 11 - 2 \cdot 5 + 3$
$= 11 - 10 + 3$
$= 4$

D. Pecahan

Definisi

Pecahan adalah sebuah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai pasangan berurutan bilangan cacah $\frac{a}{b}$, di mana $b \neq 0$. Pada pecahan $\frac{a}{b}$, a dinamakan pembilang dan *b* dinamakan penyebut.

Dua pecahan yang merepresentasikan banyak yang sama dinamakan pecahan ekuivalen. Misalnya $\frac{2}{8}$ dan $\frac{1}{4}$ merepresentasikan banyak yang sama sebagaimana Gambar 6 berikut.



Gambar 6. Representasi dua pecahan yang ekuivalen

Definisi keterurutan pecahan

Andaikan $\frac{a}{c}$ dan $\frac{b}{c}$ adalah sembarang dua pecahan. Maka $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ jika dan hanya jika *a<b*.

Contoh:
$\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ jika dan hanya jika *3<4*

Teorema

Andaikan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sembarang dua pecahan. Maka $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ jika dan hanya jika *ad<bc*

Contoh:
$\frac{9}{11} < \frac{7}{8}$ jika dan hanya jika $9 \cdot 8 < 11 \cdot 7$ atau $72 < 77$

Teorema

Andaikan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sembarang dua pecahan di mana $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka berlaku $$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Desimal

Desimal digunakan untuk menyatakan pecahan dalam notasi nilai tempat basis sepuluh. Desimal yang telah kita pelajari sejauh ini disebut desimal terminasi, karena mereka dapat direpresentasikan dengan menggunakan sejumlah digit bukan nol di sebelah kanan titik desimal.

Contoh:

$$\frac{43}{1250} = \frac{43}{2 \cdot 5^4} = \frac{43 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{344}{10.000} = 0{,}0344$$

Teorema

Andaikan $\frac{a}{b}$ adalah pecahan dalam bentuk yang paling sederhana. Maka $\frac{a}{b}$ memiliki representasi decimal berulang yang tidak berbatas (not terminate) jika dan hanya jika *b* memiliki factor prima berupa bilangan 2 atau 5.

Contoh:

Nyatakan $0,\overline{34}$ dalam bentuk pecahan

Penyelesaian:

Misalkan *n* = $0,\overline{34} = 0{,}343434\ ....$

Maka 100*n* = $34,\overline{34} = 34{,}343434\ ....$

$$\begin{array}{rl} 100n = & 34{,}343434\ .... \\ n = & 0{,}343434\ .... \quad - \\ \hline 99n = & 34 \end{array}$$

$$n = \frac{34}{99}$$

Rasio

Konsep rasio terjadi di banyak tempat dalam matematika dan dalam kehidupan sehari-hari.

Rasio adalah pasangan berurutan bilangan yang ditulis *a* : *b* dengan b $\neq 0$. Rasio a dan b dapat pula ditulis sebagai $\frac{a}{b}$.

Definisi kesamaan pada rasio

Andaikan $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah sembarang dua rasio. Maka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$jika dan hanya jika *ad* = *bc*

Proporsi adalah pernyataan dua rasio yang sama. Konsep digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan rasio.
Contoh:
TK Tadika Puri memesan 3 kotak susu coklat untuk setiap 7 orang anak. Jika terdapat 581 siswa di sekolah tersebut, berapa banyak susu coklat yang harus dipesan?

Penyelesaian

$$\frac{3}{7} = \frac{n}{581}$$

Gunakan sifat perkalian silang pada rasio, sehingga didapat

$$7n = 3 \cdot 581$$

$$n = \frac{3 \cdot 581}{7} = 249$$

Jadi TK Tadika Puri harus memesan 249 kotak susu coklat.

Persen

Kata persen berasal dari Bahasa Latin yang berarti “per serratus”. Sehingga 25 persen berarti 25 per serratus, $\frac{25}{100}$ atau 0.25 yang ditulis sebagai “25%”.

Karena persen dapat dinyatakan sebagai pecahan dengan penyebut 100, masalah yang terkait persen melibatkan tiga informasi yaitu suatu persentase, *p* dan dua bilangan yaitu *a* dan *n* yang berupa pembilang dan penyebut suatu pecahan. Hubungan ketiganya dinyatakan dalam bentuk proporsi berikut:

$$\frac{p}{100} = \frac{a}{n}$$

Contoh:
Sebuah baju memiliki harga Rp. 150.000,00 Baju tersebut mendapat diskon sebesar 30%. Berapa yang dapat dibayar untuk membeli baju tersebut?

Penyelesaian:
Misalkan p = 30 dan n = 150,000
Maka

$$\frac{30}{100} = \frac{a}{150.000}$$
$$a = \frac{30}{100} \times 150.000 = 45.000$$

Diskon harga baju yang didapat = Rp. 45.000

Maka uang yang harus dibayar untuk membeli baju = Rp. 150.000 - Rp. 45.000 = Rp. 105.000.

E. Bilangan Bulat (Integer)

Terdapat situasi dalam matematika di mana bilangan negative dibutuhkan. Misalnya pengurangan 4 – 7 tidak memiliki jawaban pada bilangan cacah. Sehingga dibutuhkan bilangan yang baru yaitu bilangan bulat.

Definisi

Bilangan bulat adalah himpunan $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Bilangan -1, -2, -3, … dinamakan bilangan bulat negative. Bilangan 1, 2, 3, … dinamakan bilangan bulat postif. Nol bukan termasuk bilangan bulat negatif maupun positif.

Sifat-sifat penjumlahan pada bilangan bulat

Misalkan *a* dan *b* adalah sembarang bilangan bulat

1. Sifat tertutup pada penjumlahan.
   a + *b* adalah bilangan bulat
2. Sifat komutatif pada penjumlahan
   $$a + b = b + a$$
3. Sifat asosiatif pada penjumlahan
   $$a + (b + c) = (a + b) + c$$
4. Sifat identitas pada penjumlahan
   0 adalah bilangan bulat unik sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, yang berlaku untuk seluruh *a*.
5. Sifat invers aditif pada penjumlahan
   Untuk setiap bilangan bulat *a* terdapat suatu bilang bulat unik, ditulis -*a*, sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$. Bilangan bulat -*a* dinamakan invers aditif dari *a*.

<u>Definisi pengurangan pada bilangan bulat</u>

Misalkan *a* dan *b* adalah sembarang bilangan bulat, maka $a - b = a + (-b)$

<u>Perkalian pada bilangan bulat</u>

Misalkan a dan b adalah sembarang bilangan bulat

1. Perkalian dengan 0. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
2. Perkalian dua bilangan bulat postif.
   Jika a positif dan b postif, maka $a \cdot b = ab$
3. Perkalian bilangan bulat postif dan negatif
   Jika a positif dan b negatif, maka $a \cdot (-b) = -ab$
   Jika a negative dan b postif, maka $(-a) \cdot b = -ab$
4. Perkalian dua bilangan bulat negatif
   Jika a negatif dan b negatif, maka $(-a) \cdot (-b) = ab$

<u>Sifat-sifat perkalian pada bilangan bulat</u>

Misalkan a dan b adalah sembarang bilangan bulat

1. Sifat tertutup pada perkalian.
   $a \cdot b$ adalah bilangan bulat
2. Sifat komutatif pada perkalian
   $$a \cdot b = b \cdot a$$
3. Sifat asosiatif pada perkalian
   $$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
4. Sifat identitas pada perkalian
   1 adalah bilangan bulat unik sedemikian sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, yang berlaku untuk seluruh a.
5. Sifat invers pada perkalian
   Untuk setiap bilangan bulat a terdapat suatu bilang unik, ditulis $\frac{1}{a}$, sedemikian sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Bilangan $\frac{1}{a}$ dinamakan invers perkalian dari a.
6. Sifat distributive pada penjumlahan dan perkalian
   $$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = ab + ac$$

F. Bilangan rasional

Pada berbagai penyelesaian masalah matematis dibutuhkan penggunaan bilangan yang bersifat resiprokal dan berlawanan. Sifat resiprokal berlaku pada pecahan dan sifat berlawanan (opposite) berlaku pada bilangan bulat. Oleh karena itu dibutuhkan bilangan baru yang dinamakan bilangan rasional yang memadukan sifat pada pecahan dan bilangan bulat.

Bilangan rasional adalah himpunan $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \text{ dan } b \text{ bilangan bulat}, b \neq 0 \right\}$

Contoh bilangan rasional $\frac{4}{3}$, $\frac{-5}{7}, \frac{4}{-9}, \frac{0}{1}, \frac{-7}{-9}, -3\frac{1}{4}, \frac{-13}{4}$ dan $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Operasi pada bilangan rasional berlaku sama sebagaimana pada operasi pada pecahan dan bilangan bulat.

G. Bilangan Riil

Setiap decimal berulang dapat dinyatakan sebagai bilangan rasional $\frac{a}{b}$ di mana *a* dan *b* adalah bilangan bulat. Sehingga bilangan decimal yang tidak berulang bukan merupakan bilangan rasional. Penyelesaian persamaan berperan penting dalam matematika, oleh karena itu dibutuhkan system bilangan yang memungkinkan kita menyelesaikan berbagai jenis persamaan. Sehingga dibutuhkan system bilangan baru yang lebih luas dinamakan system bilangan riil

Definisi

Himpunan bilangan riil, dinotasikan *R*, adalah himpunan seluruh bilangan yang memiliki representasi decimal yang tak terbatas (infinite).

Bilangan riil mencakup seluruh bilangan rasional dan bilangan iirasional. Bilangan rasional adalah himpunan seluruh bilangan yang memiliki representasi decimal yang berulang dan tak terbatas (infinite repeating decimal representations), positif, negative, maupun nol.
Bilangan irrasional adalah himpunan seluruh bilangan yang memiliki representasi decimal yang tak berulang dan tak terbatas (infinite nonrepeating decimal representations).
Contoh bilangan iirasional: $\sqrt{2}, \pi = 3{,}14159$ ...

LATIHAN

1. Jika penjumlahan dua bilangan menghasilkan bilangan genap dan penjumlahannya menghasilkan bilangan ganjil, maka apa yang dapat disimpulkan dari kedua bilangan tersebut?
2. Tentukan tiga pecahan yang lebih besar dari $\frac{2}{5}$ dan kurang dari $\frac{3}{7}$.
3. Sebuah auditorium berisi 315 kursi dan $\frac{7}{9}$ bagiannya sudah terisi. Berapakah banyak kursi yang masih kosong?
4. Harga 1 kg beras pada tahun 2012 di Provinsi NTB adalah Rp. 7.700. Pada tahun 2022, meningkat menjadi Rp. 10.750 per kg. Berapakah persentase peningkatan harga 1 kg selama 10 tahun di provinsi NTB?
5. Nyatakan bentuk decimal berikut dalam bentuk pecahan:

a. $0,\overline{123}$
b. $0,001\overline{78}$

6. Seorang petani menghitung bahwa setiap 100 bibit jagung yang ditanam akan mendapatkan hasil panen 84 tanaman jagung. Jika petani tersebut ingin mendapatkan hasil panen 7200 tanaman jagung, berapakah bibit jagung yang harus dia tanam?
7. Ana menyatakan bahwa untuk bilangan bulat a dan b berlaku $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2$. Apakah pernyataan tersebut selalu benar, tidak pernah benar atau kadangkala benar? Jelaskan alasanmu.
8. Urutkanlah pasangan bilangan rasional berikut:

a. $-\frac{3}{7}, \frac{5}{2}$
b. $-\frac{5}{7}, -\frac{3}{4}$

9. Tentukan apakah decimal berikut merepresentasikan bilangan rasional atau iirasional

a. 0,273
b. 2,718281828…
c. $-15,00\overline{15}$

10. Bilangan π merupakan salah satu contoh bilangan irrasional. Pada prakteknya, $\frac{22}{7}$ digunakan untuk merujuk nilai π. Apakah benar $\pi = \frac{22}{7}$? Jelaskan alasanmu.

BAB II HIMPUNAN

Al Kusaeri

Pada Bab ini membahas tentang konsep himpunan yang terdiri dari pengertian himpunan, cara penyajian himpunan, macam-macam himpunan dan operasi pada himpunan

A. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah sekumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas. Secara mudah himpunan dapat diartikan sebagai koleksi objek-objek yang spesifik. Spesifik di sini berarti dapat dibedakan secara kontras antara himpunan yang satu dengan himpunan yang lain. Spesifik juga dapat diartikan bahwa himpunan tersebut memiliki ketentuan khusus yang dinamakan dengan syarat keanggotaan. Apabila kita minta seorang anak kecil yang belum bisa menghitung untuk mengumpulkan bunga-bunga merah diantara sejumlah bunga-bunga beraneka warna, dan ia dapat mengerjakannya maka dengan demikian ia memperlihatkan menangkap pengertian syarat keanggotaan. Jadi, boleh dikatakan bahwa himpunan merupakan suatu koleksi atas kumpulan objek-objek yang memenuhi syarat keanggotannya (untuk menjadi anggota himpunan tersebut).

Untuk menyatakan sebuah himpunan harus mengikuti aturan-aturat penyajian himpunan, akan tetapi perlu diketahui symbol pembentukan himpunan, yaitu:

- Dilambangkan dengan huruf kapital
- Diapit oleh dua buah kurung kurawal
- Dipisahkan oleh tanda baca koma (,) pada setiap anggota himpunannya.
- Secara umum ditunjukkan seperti berikut: **A = {.........}**

Keanggotaan pada suatu himpunan ditunjukkan dengan cara sebagai berikut:

$x \in \mathrm{B}$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin \mathrm{B}$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

B. Cara Penyajian Himpunan

Mengikuti simbol penulisan himpunan, dalam prakteknya terdapat beberapa cara menyajikan sebuah himpunan, yaitu:

1. Enumerasi (pencacahan)

   Enumerasi adalah penyajian himpunan di mana anggota himpunannya ditunjukkan satupersatu (dicacah)

   Contoh: Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Notasi Pembentuk Himpunan

   Bentuk umum dari Notasi Pembentukan Humpunan yaitu :

   $$\boxed{\mathrm{A} : \{\, x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \,\}}$$

   Contoh:

   A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}, atau

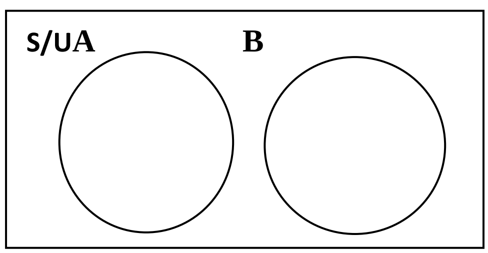
A = { x | $x \in P$, x< 5 } yang ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

3. Diagram Venn

Diagram Ven merupakan salah satu cara untuk menyajikan sebuah himpunan dengan menggambarkannya menggunakan aturan-aturan tertentu, sehingga himpunan yang disajikan Nampak lebih praktis. Diagram ven sangat membantu dalam menyajikan himpunan jika himpunannya sudah lebih komplek dan mengandung hubungan berdasarkan aturan operasi himpunan. Berukt cara menyajika sebuah himpunan dengan menggunakan diagram ven, yaitu:

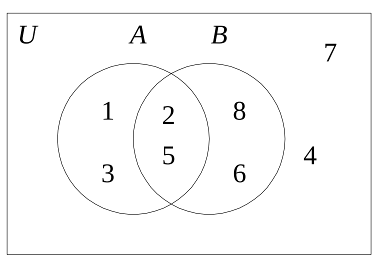
- Angggota semesta pembicaraan berada dalam sebuah kotak persegi
- Ditempatkan symbol S atau U pada pojok kiri atas dalam kotak persegi
- Disimbolkan dengan huruf capital untuk menunjukkan himpunan tertentu
- Dibatasi dengan garis melingkar untuk membatasi himpunan tertentu

Gambar Diagram Venn



Contoh 5.

MisalkanU = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}. Diagram Venn dapat digambar seperti berikut:



4. Simbol-simbol Baku

Simbo-simbol baku berlaku pada himpunan bilangan, symbol-simbol tersebut diberlakukan berdasarkan kesepakatan sehingga menjadi pemahaman bersama untuk digunakan dalam penunjukkannya, symbol-simbol baku tersebut yaitu :

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks
S = himpunan semesta

C. Macam-macam Himpunan

Berikut akan dibahas beberapa jenis himpunan, yaitu:

1. Himpunan Kardinal

Himpunan kardinal adalah jumlah elemen yang terdapat dalam satu himpunan. Misalnya Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh:

a) B = { x | x merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 }, atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka $|B| = 8$

b) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

c) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

2. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota atau himpunan dengan kardinal = 0

Notasi: $\varnothing$ atau {}

Contoh:

a) $E = \{ x \mid x<x \}$, maka $n(E) = 0$

b) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

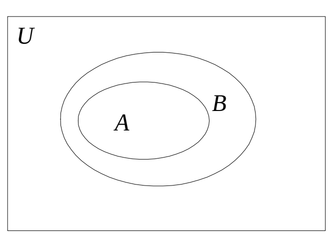
c) A = {x | x adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ }, $n(A) = 0$

3. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*. Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.

Notasi: $A \subseteq B$

Jika Ditunjukkan dengan Diagram Venn dapat dilihat sebagai berikut :



Contoh :

a. $\{ 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

c. $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing\subseteq A$).
(c) Jika $A\subseteq B$ dan $B\subseteq C$, maka $A\subseteq C$

- $\varnothing\subseteq A$ dan $A\subseteq A$, maka $\varnothing$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari *A*.
- $A\subseteq B$ berbeda dengan $A\subset B$
  - a) $A\subset B$: *A* adalah himpunan bagian dari *B* tetapi $A\neq B$.
    A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari *B*.
    Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$
  - b) (ii) $A\subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa *A* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *B* yang memungkinkan $A = B$.

4. Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen *B* dan sebaliknya setiap elemen *B* merupakan elemen *A*. dapat juga dikatakan $A = B$ jika *A* adalah himpunan bagian dari *B* dan *B* adalah himpunan bagian dari *A*. Jika tidak demikian, maka $A\neq B$.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A\subseteq B$ dan $B\subseteq A$

Contoh :

a) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

b) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

c) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A\neq B$

Untuk tiga buah himpunan, *A*, *B*, dan *C* berlaku aksioma berikut:

1) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

2) jika $A = B$, maka $B = A$

3) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

5. Himpunan yang Ekivalen

Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh :

Jika $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

6. Himpunan Saling Lepas

   Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

   $\boxed{\text{Notasi : } A \,//\, B}$

   Contoh : Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

7. Himpunan Kuasa

   Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

   $\boxed{\text{Notasi : } P(A) \text{ atau } 2^A}$

   Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

   Contoh :

   Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

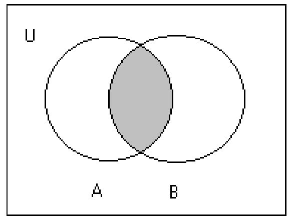
D. Operasi Pada Himpunan

Pada bagian ini, dibahas operasi-operasi yang berlaku pada himpunan. Operasi tersebut hanya dikenakan pada dua himpunan atau lebih, tidak bias dikerjakan hanya pada satu himpunan saja. Kalimat ‘tidak bisa’ di sini tidak berarti sama sekali tidak bisa dilakukan. Maksud dari kalimat ini adalah bahwa operasi yang dikenakan pada dua himpunan yang sama tidak akan memberikan hasil yang berbeda. Jadi, tetap bisa dilakukan namun tidak memberikan manfaat apapun.

1. Irisan (*intersection*)

   Himpunan A Irisan Himpunan B adalah himpunanyang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekaligus berada dalam A muapun B

   $\boxed{\text{Notasi : } A \cap B = \{ x | x \in A \text{ dan } x \in B \}}$



Contoh :

Jika A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {4, 10, 14, 18},

maka A $\cap$ B = {4, 10}

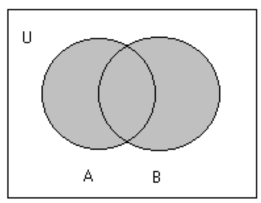
Jika A = { 3, 5, 9 } dan B = { -2, 6 }, maka A $\cap$ B = $\varnothing$.

Artinya: A // B

2. Gabungan (*union*)

Gabungan (*union*) himpunan A dan himpunan B adalah sebuah himpunan yang anggotanya merupakan anggota A atau anggota B atau anggota keduanya.

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



Contoh :

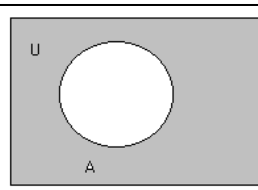
a) Jika A = { 2, 5, 8 } dan B = { 7, 5, 22 }, maka $A \cup B$ = { 2, 5, 7, 8, 22 }

b) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

Jika terdapat sebuah himpunan A, maka Himpunan A Komplemen adalah Humpunan yang merupakan anggota himpunan semesta akan tetapi tidak merupakan anggota himpunan A.

Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh :

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

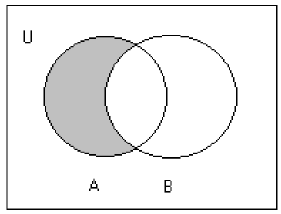
a) jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}

b) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A}$ = { 1, 3, 5, 7, 9 }

4. Selisih (*difference*)

Himpunan A dikurangi (selisih) himpunan B adalah anggota himpunan A yang tidak termasuk anggota himpunan B, begitu juga sebaliknya jika kita melakukan operasi selisih himpuna B – A.

Notasi : $A - B = \{ x | x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh :

a. Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

b. $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda Setangkup (*symetric difference*) dari himpunan A dengan himpunan B, ditulis sebagai A ⊕ B, adalah sebuah himpunan yang anggotanya merupakan anggota gabungan himpunan A dan B, tetapi bukan merupakan anggota irisan himpunan A dan B.

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh :

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Perkalian kartesian himpunan A dan B adalah pasangan berurutan ***a*** dengan ***b***, di mana ***a*** adalah anggota himpunan A dan ***b*** adalah anggota dari himpunan B

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh :

Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

LATIHAN

1. Manakah diantara koleksi/kumpulan berikut yang merupakan himpunan.
   a. Kumpulan siswa-siswi kelas IA MTs NW Kembang Kerang.
   b. Himpunan Guru Matematika Lombok Timur.

c. Himpunan bilangan asli.
d. Kumpulan mahasiswa-mahasiswi yang tempat tinggalnya jauh darikampus.
e. Himpunan pengusaha yang berhasil.
f. Himpunan bilangan yang sangat besar.

2. Tuliskan dalam notasi pembentukan himpunan dan enumerasi himpunan berikut:
   a. Himpunan bilangan ganjil kurang dari 13
   b. Himpunan bilangan ganjil antara 2 dan 12
   c. Himpunan bilangan prima kurang dari 13
   d. Himpunan bilangan prima antara 2 dan 12
   e. C = {3, 6, 9, 12, 15}
3. Berapakah kardinalitas dari himpunan A = { *x* | *x <50, x* □ bilangan Prima}
4. Manakah dari himpunan berikut yang merupakan himpunan kosong:
   A. Himpunan dari bilangan akar negatif a
   B. Himpunan mahasiswa jurusan matematika
   C. Himpunan mahasiswi UIN yang tidak berjilbab
5. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan B={1, 2, 3,4}
6. Diketahui A = {a, b, c}, B = {a, b, d, e, g}, C = {a, b, c, d, e, f}. manakah diantara himpunan tersebut yang mengandung hubungan sebagaihimpunan bagian.
7. Diketahui A = { a, 1, b, 2, c, 3} B = { p, 4, q, 5, r, 6}, Tentukan A + B!
8. Tentukan A + B jika diketahui himpunan:
   A = Huimpunan bilangan prima yang kurang dari 10
   B = Himpunan bilangan komposit yang kurang dari 10
9. Diketahui himpunan-himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:
   A = { x | 0 □ x □ 18, x □ bila Asli yang habis dibagi 3}
   B = { x | 9 □ x □ 19, x □ Bilangan Prima }
   C = { x | -8 □ x □ 7, x □ B }
   Tentukan:
   a. A + (B □ C)
   b. B + (A □ C)
   c. C + (A □ B)
   d. (A □ B) + (A □)
10. Tentukan A – B jika diketahui:
    A = {p, q, r, s, t}
    B = {3, r, 6, s, 9, t}

BAB III LOGIKA MATEMATIKA

Lalu Sucipto

Pada Bab ini membahas tentang konsep logika matematika yang terdiri dari: pernyataan (proporsi), operasi pernyataan, pernyataan majemuk, tautologi dan kontradiksi, serta penarikan kesimpulan.

A. PERNYATAAN (PROPOSISI)

"Ayam jantan itu berkokok".Pada proposisi tersebut memiliki pengertian lain yaitu "Berkokok" menerangkan tentang ayam "ayam jantan".Pengertian menerangkan disebut predikat ***P***dan pengertian yang diterangkan disebut subyek ***S***.

S: ayam jantan;

***P*:** berkokok

Jika kata "itu" atau fungsi menerangkan itu diberi tanda = maka pola proposisi itu ditulis dengan $S = P$

Jika terjadi pengingkaran, maka proposisi yang terbentuk:

"Ayam jantan itu tidak berkokok", dan pola posisinya:$S \neq P$.

Jika terjadi pengakuan bahwa ayam jantan itu memang berkokok, atau ayam itu tidak berkokok, atau ayam jantan itu tidak berkokok, berarti "memang benar ayam jantan itu berkokok" atau tidak berkokok.

Jadi jelas bahwa proposisi (pernyataan) memiliki sifat benar atau salah.

Definisi Pernyataan:

Pernyataan adalah suatu kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah.

1. Kalimat Terbuka, Peubah (Variabel), Konstanta, dan Penyelesaian Kalimat Terbuka (Pengulangan)
    a. Pengertian Kalimat Terbuka
    Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel dan menjadi pernyataan jika variable tersebut diganti konstanta dalam himpunan semestanya.

    Contoh:

    1) Kota L merupakan daerah wisata.

2) $2 + x = 8$

b. Pengertian Variabel

Variabel adalah lambing untuk menunjukkan anggota sembarang dari himpunan semesta.

Contoh:

1) …. + 6 = 1 (…. Adalah variabel)

2) $x - 2 = 5$

c. Pengertian Konstanta

Konstanta adalah lambing untuk menunjukkan anggota tertentu dalam himpunan semesta.

Contoh:

1) Rumah…. di Lombok.

Jika…. diganti dengan Cipto maka Cipto disebut konstanta dalam himpunan semesta manusia. Kebenaran pernyataan "Rumah Cipto di Lombok" tergantumg realitasnya.

2) ….+ 6 = 11

Jika …. dengan 3 maka pernyataan 3 + 6 = 11 bernilai salah dan 3 disebut konstanta.

3) $x - 2 = 5$

Jika x diganti dengan 7 maka pernyataan 7 – 2 = 5 bernilai benar dan 7 disebut konstanta.

4) $y + 1 < 5$

Jika himpunan semestanya adalah bilangan asli dan y diganti dengan 1,2, dan 3 maka pernyataan bernilai benar dan 1,2, dan 3 disebut konstanta.

d. Himpunan Penyelesaian Suatu Kalimat Terbuka

Contoh 1:

$2x - 1 < 5; x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Kalimat tersebut menjadi pernyataan yang benar jika x diganti 0, 1, dan 2

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {0, 1, 2}.

Contoh 2:

$x^2 + 5x - 24 = 0$

Kalimat tersebut menjadi pernyataan yang benar jika x diganti -8 dan 3

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { -8, 3 }.

Dari contoh-contoh diatas dapat disimpulkan bahwa:

- *Penyelesaian suatu kalimat terbuka* adalah konstanta-konstanta pengganti variabel yang menyebabkan kalimat terbuka tersebut menjadi pernyataan yang benar.
- Himpunan yang memuat semua penyelesaian yang mungkin disebut *himpunan penyelesaian.*

2. Sistem Lambang Logika Proporsional

No. Urut	Operator		Arti dalam bahasa sehari-hari
	Nama	Lambang	
1	Negasi	~	Tidak, bukan
2	Konjungsi	$\wedge$	Dan, tetapi, meskipun, walaupaun
3	Disjungsi	$\vee$	Atau
4	Implikasi	$\Rightarrow$	Jika … maka …
5	Biimplikasi	$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika … maka …

3. Ingkaran Atau Negasi Suatu Pernyataan

Jika p adalah suatu pernyataan maka ingkarannya dinotasikan sebagai $\sim p$ atau $-p$. Apabila pernyattan p bernlai benar, maka pernyattan $\sim p$ bernilai *salah*. Sebaliknya bila pernyataan p bernilai *salah*, maka pernyataan $\sim p$ bernilai *benar*.

Contoh 1:

p: Azam memakai baju putih

$\sim p$: Tidak benar bahwa Azam memakai baju putih, atau

~*p*: Azam tidak memakai baju putih.

Nilai kebenaran pernyataan *p* tergantung realitas, jika *p* bernilai benar,

Maka ~*p* bernilai salah atau sebaliknya.

Contoh 2:

p: 3 + 2 = 7 …………………………. (S)

~*p*: 3 + 2 ≠ 7 ………………………….. (B)

Nilai kebenaran Negasi disajikan dalam tabel kebenaran dibawah ini.

p	~*p*
B	S
S	B

B. OPERASI PEERNYATAAN

1. Konjugsi

Konjungsi dua pernyataan *p* dan *q* bernilai benar hanya jika kedua komponennya bernilai benar.

Nilai kebenaran konjungsi disajikan dalam tabel kebenaran dibawah ini.

P	*q*	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Kata-kata yang membentuk konjungsi selain *dan* adalah *meskipun, tetapi,sedangkan,, sambil, juga, walaupun.*

2. Disjungsi

Jika pernyataan *p* dan *q* dihubungkan dengan kata hubung *atau* maka pernyataan*p* atau *q* disebut *disjungsi*.

Nilai dan Tabel Kebenaran Disjungsi

a. Disjungsi inklusif dua pernyataan *p* dan *q*, yaitu $p \vee q$, yaitu $p \vee q$ bernilai benar jika salah satu atau kedua dari pernyataan *p* dan *q* bernilai benar.

b. Disjungsi eksklusif dua pernyataan *p* dan *q* bernilai benar hanya jika salah satu dari pernyataan *p* dan *q* bernilai benar.

Nilai kebenaran disjungsi disajikan dalam tabel kebenaran dibawah ini.

		Disjungsi inklusif	Disjungsi eksklusif
P	*q*	$p \vee q$	$p \veebar q$
B	B	B	S
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	S

Menentukan Nilai Kebenaran Kalimat $p \vee q$

Contoh:

Tentukan nilai *x* agar kalimat $x^2 - 4 = 0 \vee 1 - (-1) = 0$ bernilai salah.

Jawab:

$p(x)$: $x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 2 \vee x = -2$

q: $1 - (-1) = 0$ ....(S)

Maka kalimat $p(x) \vee q \equiv$ S jika $p(x)$ bernilai salah

X	$p(x)$	q	$p(x) \vee q$
$x = \pm 2$ $x = \pm 2$	B S	S S	B S

Jadi, agar $x^2 - 4 = 0 \vee 1 - (-1)$ bernilai salah maka $p \neq \pm 2$.

3. Implikasi

Implikasi dua pernyataan $p \Rightarrow q$ bernilai salah hanya jika p bernilai benar disertai q bernilai salah.

Nilai kebenaran implikasidisajikan dalam tabel kebenaran dibawah ini.

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Menentukan Nilai Kebenaran Kalimat $p(x) \Rightarrow q$

Contoh 1:

Diketahui $p(x)$: $x^2 - 1 = 0$ dan q: $2 \times 3 = 6$

Tentukan x agar $p(x) \Rightarrow q$ bernilai benar.

Jawab:

Oleh karena q bernilai benar, maka untuk $p(x)$ bernilai benar atau salah, implikasi $p(x) \Rightarrow q$ tetap bernilai benar.

x	$p(x)$	q	$p(x) \Rightarrow q$
$x = \pm 1$	B S	B B	B B

$x = \pm 1$			

Jadi, $p(x) \Rightarrow q$ atau ($x^2 - 1 = 0$) $\Rightarrow$ ($2 \times 3 = 6$) bernilai benar untuk semua $x \in R$

Contoh 2:

Tentukan x agar ($x^2 - 4 \leq 0$) $\Rightarrow$ ($2 \times 3 \neq 6$) bernilai salah

Jawab:

$p(x)$: $x^2 - 4 = 0$

($x - 2$)($x + 2$) ≤ 0

+ + + + + ○ – – – – – ○ + + + + + +

$-2 \leq x \leq 2$

q: $2 \times 3 \neq 6$ (S)

Karena q bernilai salah, maka agar implikasi $p(x) \Rightarrow q$ bernilai salah, $p(x)$ harus bernilai benar(lihat tabel kebenaran implikasi baris kedua)

x	$p(x)$	q	$p(x) \Rightarrow q$
$-2 \leq x \leq 2$	B	S	S

Jadi, implikasi ($x^2 - 4 \leq 0$) $\Rightarrow$ ($2 \times 3 \neq 6$) bernilai salah untuk $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$

a. Implikasi Berbentuk $p(x) \Rightarrow q(x)$

$p(x)$ dan $q(x)$ masing-masing adalah suatu kalimat terbuka

1) misalkan himpunan penyelesaian dari $p(x)$ adalah P dan himpunan penyelesaian $q(x)$ adalah Q, maka jika $P \subset Q$ maka $p(x) \Rightarrow q(x)$ bernilai benar
2) Implikasi berbentuk $p(x) \Rightarrow q(x)$ yang selalu bernilai benar disebut *Implikasi Logis*
3) cara menentukan nilai kebenaran $p(x) \Rightarrow q(x)$ sebagai berikut:

(i) cari nilai x yang memenuhi $p(x)$ sehingga memenuhi $q(x)$, atau

(ii) tentukan himpunan penyelesaian $p(x)$ dan $q(x)$ seperti point 1

Contoh:

Jika $x = 2$ maka $x^2 = 4$

$p(x)$: $x = 2 \rightarrow$ Himpunan penyelesaian $P = \{2\}$

$q(x)$: $x^2 = 4$

$x = \pm 2 \rightarrow$ himpunn penyelesaian $Q = \{ -2, 2 \}$

karena $\{2\} \subset \{-2, 2\}$ atau $P \subset Q$ maka $(x = 2) \Rightarrow (x^2 = 4)$ bernilai benar.

b. Implikasi logis

$p(x)$ implikasi logis $q(x)$ jika dan hanya jika untuk setiap x memenuhi $p(x)$ juga memenuhi $q(x)$.

Contoh :

Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ implikasi logis p

jawab :

harus ditunjukkan bahwa $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ adalah tautologi

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Tautologi

Dapat ditunjukkkan bahwa $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ selalu bernilai benar untuk semua kemungkinan (pada kolom kelima dari tabel di atas) sehingga $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ suatu tautologi.

4. Biimplikasi

Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis dengan lambang $p \Leftrightarrow q$. Biimplikasi disebut pula implikasi dwi arah atau bikondisional.

Lambang $p \Leftrightarrow q$, dibaca:

a. p jika dan hanya jika q
b. p syarat perlu dan cukup bagi q
c. q syarat perlu dan cukup bagi p
d. jika p, maka q, dan jika q, maka p
e. p ekuivalen q

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$, bernilai benar bila nilai kebenaran pernyataan p dan q bernilai sama. Bila nilai kebenaran pernyatan p dan $q$tidak sama maka pernyataan biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ bernilai salah.

Tabel kebenaran dari pernyataan biimplikasi $p \Leftrightarrow q$, ditunjukkan berikut ini:

P	*Q*	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

Misalkan pernyataan p: 3 bilangan prima (B) dan pernyataan

q : 8 bilangan genap (B)

maka $p \leftrightarrow q$: 3 bilangan prima jika dan hanya jika 8 bilangan genap (B)

misalkan pernyataan p: $2^5 = 10$ (S), dan pernyataan

q: ${}^2\log 100 = 2$ (S)

maka $p \leftrightarrow q$: $2^5 = 10$ jika dan hanya jika ${}^2\log 100 = 2$ (B)

C. PERNYATAAN MAJEMUK

1. Pernyataan Majemuk Yang Ekuivalen

Dua pernyataan majemuk dinyatakan ekuivalen jika kedua pernyataan majemuk tersebut memiliki nilai kebenaran yang sama. Sedangkan untuk mengetahui 2 pernyataan majemuk tersebut apakah ekuivalaen atau tidak dapat diselidiki dengan tabel kebenaran. Pernyataan majemuk P ekuivalen dengan pernyataan majemuk Q ditulis dewngan lambing $P \equiv Q$.

Contoh:

Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa:

a. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b. $p \rightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

Jawab:

Menggunakan table kebenaran:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	S	S	S
S	B	B	B	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel dapat diketahui bahwa nilai kebenaran $p \Rightarrow q$ sama dengan nilai kebenaran

$\sim p \vee q$, begitu pula nlai kebenaran $p \Leftrightarrow q$ sama dengan $q \Leftrightarrow p$

Dengan demikian terbukti bahwa :

$$\boxed{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \\ p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p \end{array}}$$

2. Negasi Dari Pernyataan Majemuk

a. Negasi Konjungsi dan Negasi Disjungsi

Negasi dari $(p \wedge q)$ adalah $\sim (p \wedge q)$ atau $(\sim p \vee \sim q)$

Negasi dari ($p \vee q$) adalah ~($p \vee q$) atau (~$p \wedge$~q)

Hali ini dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel Negasi Konjungsi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Dari tabel pertama terlihat bahwa nilai kebenaran ~($p \wedge q$) sama dengan nilai kebenaran (~$p \vee$~q), sedangkan pada tabel kedua nilai kebenaran ~($p \vee q$) sama dengan nilai kebenaran (~$p \wedge$ ~q), hal ini menunjukkan bahwa:

$$\boxed{\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)}$$

Contoh:

Hari ini hujan deras dan terjadi banjir

Jawab:

Negasi dari pernyataan tersebut adalah tidak benar hari ini hujan deras dan terjadi banjir. Kalimat ini senilai dengan hari ini tidak hujan deras atau tidak terjadi banjir.

b. Negasi dari Implikasi

Negasi dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim(p \Rightarrow q)$ atau $(p \wedge \sim q)$

Hal ini dapat ditunjukkan dengan tabel kebenaran sebagai berikut:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	S	S

Jadi, dari tabel di atas terlihat bahwa nilai kebenaran $\sim(p \Rightarrow q)$ dan $p \wedge \sim q$ bernilai sama, hal ini menunjukkan bahwa:

$$\boxed{\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)}$$

Contoh:

Jika terjadi gempa maka air laut pasang

Jawab:

Negasi dari kalimat tersebut adalah tidak benar bahwa jika terjadi gempa maka air laut pasang. Atau terjadi gempa dan air laut tidak pasang.

c. Negasi dari Biimplikasi

Negasi dari $(p \Leftrightarrow q)$ adalah $\sim(p \Leftrightarrow q)$ atau $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Negasi di atas dapat ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	B	B	B
S	S	B	B	B	S	S	S	S

Hal ini menunjukkan bahwa negasi dari $p \Leftrightarrow q$ adalah $\sim(p \Leftrightarrow q)$ atau $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

jadi

$$\boxed{\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)}$$

Contoh:

Pertandingan sepak bola ditunda jika dan hanya jika hujan lebat

Jawab:

Negasi dari kalimat tersebut adalah pertandingan sepak bola ditunda dan tidak hujan lebat atau hujan lebat dan pertandingan sepak bola ditunda.

D. TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Tautologi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar bagaimanapun nilai kebenaran dari pernyataan pembentuknya .

Kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai salah bagaimanapun nilai kebenaran pernyataan pembentuknya.

Sedangkan apabila bukan tautology maupun kontradiksi disebut Kontingensi.

Contoh 1:

Tunjukkan bahwa Pernyataan berikut merupakan sebuah tautologi $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$

Jawab:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel di atas nilai kebenaran dari pernyataan $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$ selalu bernilai benar. Jadi $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$ merupakan tautology.

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa Pernyataan berikut merupakan sebuah kontradiksi $(\sim p \wedge q) \wedge p$

Jawab:

p	q	$\sim p$	$(\sim p \wedge q)$	$(\sim p \wedge q) \wedge p$
B	B	S	S	S
B	S	S	S	S
S	B	B	B	S
S	S	B	S	S

Dari tabel di atas nilai kebenaran dari $(\sim p \wedge q) \wedge p$ selalu bernilai salah jadi $(\sim p \wedge q) \wedge p$ merupakan pernyataan yamg kontradiksi.

E. KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

Dari implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dibentuk implikasi yang lain yaitu:

$q \Rightarrow p$ dinamakan konvers dari $p \Rightarrow q$

$\sim p \Rightarrow \sim q$ dinamakan invers dari $p \Rightarrow q$

$\sim q \Rightarrow p$ dinamakan kontraposisi $p \Rightarrow q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Jadi dapat disimpulkan bahwa suatu implikasi ekuivalen dengan kontraposisinya.

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$

Contoh:

Jika matahari terbit, maka ayam berkokok.

Jawab:

Konversnya adalah jika ayam berkokok maka matahari terbit.

Inversnyaadalah jika matahari tidak terbit, maka ayam tidak berkokok

Kontraposisinya adalah jika ayam jantan tidak berkokok, maka matahari tidak terbit.

F. PENARIKAN KESIMPULAN

Untuk menarik kesimpulan diperlukan premis yang bernilai benar

Kemudian dengan cara tertentu ditarik kesimpulan yang dinamakan konklusi. Penarikan kesimpulan dari premis tersebut disebut argumentasi. Argumentasi dikatakan valid jika konjungsi dari premisnya berimplikasi dengan konklusi dan merupakan tautology.

Beberapa prinsip kesimpulan yang valid diantaranya:

1. Prinsip Modus Ponen

Premis 1 : $p \Rightarrow q$ (B)

Premis 2: p (B)

Konklusi : $\therefore q$ (B)

P	Q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Jadi penarikan kesimpulan dengan prinsip modus ponen merupakan penarikan kesimpulan yang sah.

2. Prinsip Modus Tolens

Premis: $p \rightarrow q$ (B)

Premis: $\sim q$ (B)

Konklusi: $\therefore \sim p$ (B)

P	Q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

3. Prinsip Silogisme

Premis 1: $p \Rightarrow q$ (B)

Premis 2: $q \Rightarrow r$ (B)

P	Q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow$r	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow$r$)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow$r$)) \Rightarrow (q \Rightarrow$r$)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Konklusi: $p \Rightarrow r$ (B)

Terlihat bahwa dengan penarikan kesimpulan dengan prinsip silogisme sah / valid

G. PERNYATAAN BERKUANTOR

Kuantor ada 2 macam yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial.

Kuantor universal merupakan pernyataan yang berlaku semua atau setiap.

Lambang kuantor adalah $\forall$ (x). $p(x)$ dibaca "untuk semua x berlaku $p(x)$.

Kuantor eksistensial merupakan pernyataan yang berlaku sekurang-kurangnya ada satu unsur kuantor eksistensial dilambangkan $\exists(x)$. $p(x)$ dibaca ada x, bersifat $p(x)$

Contoh:

a. $\forall(x), x \in R, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
b. $\exists(x), x \in R, x + 4 = 7$
Jawab:

a. Benar, karena untuk semua x bilangan real berlaku $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
b. Benar, karena ada $x = 3$, sehingga $3 + 4 = 7$

Soal-Soal Latihan

1. Nilai kebenaran dari $\sim p \wedge q$ adalah …
2. Negasi dari pernyataan "x lebih dari y" adalah …
   Ingkaran dari kalimat. "jika hujan lebat maka budi sakit pilek", adalah
3. Kontraposisi dari kalimat "jika harga barang naik maka rakyat mengeluh" adalah ….
4. Invers dari implikasi: "jika a < b maka $a^2 - b^2 < 0$ adalah …
5. Konvers dari implikasi: "jika matahari terbit, maka ayam berkokok" adalah …
   urutan nilai kebenaran dari: $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow \sim r$ adalah …
6. Diketahui:
   Premis 1: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

   Premis 2: $\sim r$

   Kesimpulan yang sah dari kedua permis diatas adalah …
7. Negasi dari: $(\exists x \in R).(x^2 - 2x - 15 < 0) \Rightarrow (-5 < x < 3)$ adalah …
8. nilai kebenaran dari pernyataan: jika ia bersalah (melanggar undang-undang) maka ia dihukum adalah …

BAB IV RELASI DAN FUNGSI

Maulidin

Pada Bab ini membahas tentang konsep relasi yang terdiri dari: definisi relasi, representasi relasi, relasi invers, operasi pada relasi dan komposisi relasi. Serta dibahas pula konsep fungsi yang terdiri dari: definisi fungsi, daerah asal dan daerah hasil, fungsi ganjil dan genap, operasi pada fungsi dan sifat-sifat pada fungsi.

A. Relasi

1. Definisi relasi

Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Untuk menyatakan hubungan antara elemen yang ada pada himpunan A dan B digunakan himpunan pasangan terurut. Himpunan pasangan terurut yang dimaksud berupa perkalian kartesian antara himpunan A dan B.

Perkalian kartesian (cartesian products) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut yang mungkin tertentu di mana komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B. Hal ini dapat dinotasikan sebagai: $A \times B = \{(a,b)|a \in A \; dan \; b \in B\}$

Definisi 1.1

$Relasi\ biner\ R\ antara\ \ A\ dan\ B\ adalah\ himpunan\ \ bagian\ dari\ A \times B.$ relasi biner R dinotasikan sebagai $R \subseteq (A \times B)$

Contoh 1

Misalkan $A = \{2,3,5\}$ dan $B = \{2,6,9,10,15\}$ jika R didefinisikan sebagai relasi dari A ke B dengan $(a,b) \in R$ jika a factor prima dari b, Tentukan R

Jawab:

Ambil $2 \in A$ maka 2 faktor prima dari 2
2 faktor prima dari 6
2 faktor prima dari 10
Ambil $3 \in A$ maka3 faktor prima dari 6
3 faktor prima dari 9
3 faktor prima dari 15
Ambil $5 \in A$ maka5 faktor prima dari 10
5 faktor prima dari 15
Dengan demikian diperoleh
R = $\{(2,2),(2,6),(2,10)(3,6)(3,9)(3,15)(5,10)(5,15)\}$

Daerah asal dan daerah hasil dari sebuah relasi bisa saja merupakan himpunan yang sama, dengan kata lain relasi hanya didefinisikan pada satu himpunan. Misalkan relasi pada himpunan P, maka $(x,y) \in R$ di mana $x,y \in P$

Definisi 1.2

Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$

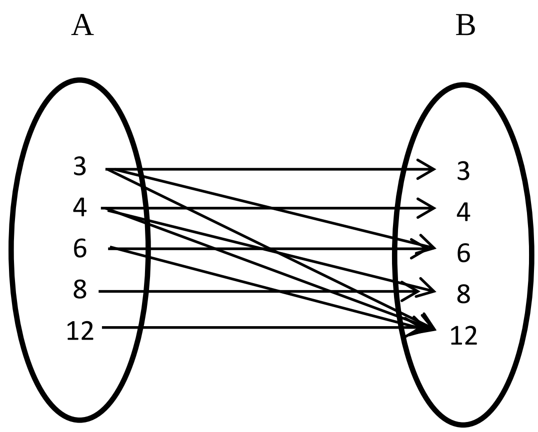
Contoh 2

Misalkan R adalah relasi pada A $\{3,4,6,8,12\}$ yang didefinsikan oleh $(x, y) \in R$ jika x membagi y

Tentukan anggota R

Jawab

Dengan menggunakan diagram panah, relasi R dapat digambarkan sebagai berikut:



R =$\{(3,3)(3,6)(3,12)(4,4)(4,8)(4,12)(6,6)(6,12)(8,8)(12,12)\}$

2. Representasi relasi

Relasi dapat direpresentasikan dengan berbagai macam cara, misalnya dengan himpunan pasangan terurut sebagaimana telah diuraikan sebelumnya. Selain itu, relasi dapat dinyatakan atau direpresentasikan pula dengan tabel, matriks, maupun graf berarah. Kali ini akan dibahas representasi relasi dalam bentuk matriks.

Misalkan R adalah relasi $A = \{a_1, a_2, \ldots\ a_m\}\ dan\ B = \{b_1, b_2, \ldots\ b_n\}.$ Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_0]$.

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & \quad b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \ldots m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Yang dalam hal ini

$$m_0 = \begin{cases} 1 & ,(a_1, b) \in R \\ 0 & ,(a_1, b) \notin R \end{cases}$$

Dengan kata lain, elemen matriks pada posisi (*i*, *j)* bernilai 1 jika a_i dihubungkan dengan b_j dan bernilai 0 jika a_i tidak dihubungkan dengan b_j. Matriks representasi relasi merupakan contoh matriks *zero-one*.

3. Relasi invers

Apabila terdapat relasi R dari himpunan A ke himpunan B, maka dapat dibuat relasi baru dari himpunan B ke himpunan A dengan cara membalik urutan dari setiap pasangan terurut di dalam R.

Definisi 1.3

Misalkan *R* adalah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*. Inversi dari relasi *R*, dilambangkan denganR^{-1}, adalah relasi dari *B* ke *A* yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b,a)/(a,b) \in R\}$$

Contoh 3

Misalkan P ={2,3,5} dan Q ={2,6,9,10,15}jika didefinsikan relasi R dari P ke Q dengan $(p,q) \in R$ jika p habis membagi q maka tentukan R^{-1}

Jawab

Langkah awal yang dilakaukan adalah menentukan R

R= $\{(2,2)(2,6)(2,10)(3,6)(3,9)(3,15)(5,10)(5,15)\}$ selanjutnya, R^{-1} didefinsikan sebagai invers dari relasi R yaitu relasi dari Q dan P dengan $(q,p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipata dari p

Sehingga diperoleh

$R^{-1} = \{(2,2)(6,2)(10,2)(6,3)(9,3)(15,3)(10,5)(15,5)\}$

4. **Operasi pada relasi**

Pada relasi berlaku operasi irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup sebagaimana yang berlaku pada himpunan

Contoh 4

Misalkan $A = \{p,q,r\}$ dan B =$\{p,q,r,s\}$

Relasi R_1= $\{(p,p)(q,q)(r,r)\}$ dan relasi $R_2\{(p,p)(p,q)(p,r)(p,s)\}$

adalah relasi dari A ke B. Tentukan $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$, $R_1 \oplus R_2$

Jawab

$R_1 \cap R_2$,$= \{(p,p)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(p,p)(q,q)(r,r)(p,q)(p,r)(p,s)\}$

$R_1 - R_2 = \{(q,q)(r,s)\}$

$R_2 - R_1$, = $\{(p,q)(p,r)(p,s)\}$

,$R_1 \oplus R_2$ = $\{(q,q)(r,r)(p,q)(p,r)(p,s)\}$

5. **Komposisi relasi**

Definisi 3.5.

Misalkan *R* adalah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dan *S* adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C*. Komposisi *R* dan S, dinotasikan dengan S o R adalah relasi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh

$$S\ o\ R$$
$$= \{(a,c) | a \in A, c \in C, dan\ untuk\ beberapa\ b \in B, (a,b) \in R\ dan\ (b,c) \in S\}$$

6. **Sifat-sifat relasi**

Sifat-sifat pada relasi yaitu refleksif, simetri, dan transitif

a. Refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika $(a, b) \in R\ untuk\ setiap\ a\ \in A$

b. Simetri

Relasi R pada himpunan A disebut simetri jika $(a, b) \in R, maka\ (b, a) \in R\ untuk\ semua\ a, b\ \in A$

Relasi R pada himpunan A disebut tak simteri jika $(a, b) \in R, dan\ (b, a) \in R\ maka\ a - b, untuk\ semua\ a, b\ \in A$

c. Transitif

Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika $(a, b) \in R, dan\ (b, a) \in R, maka\ (a, c) \in R\ untuk\ semua\ a, b, c\ \in A$.

Contoh 5

Misalkan P = $\{2,3,4\}$ dan R merupakan relasi yang di defeinisikan pada himpunan P yaitu:

R = $\{(2,2)(2,3)(3,3)(3,4)(4,4)\}$

Apakah R bersifat reflektif?

Jawab:

Karena (2,2) ,(3,3), (4,4) $\in R$ untuk 2,3,4 $\in P$ maka R bersifat reflektif

Contoh 6

Misalkan A = $\{2,3,4\}$ Ddan R menggunakan relasi yang didefinisikan pada himpunan A yaitu :

R = $\{(2,2)(2,3)(3,2)(3,3)(3,4)(4,3)\}$

Apakah R simetri

Jawab

Karena (2,3) dan (3,2) $\in R$; (3,4) (4,3) $\in R$ maka R simetri

Contoh 7

Misalkan A = $\{1,2,3,4,5\}$ dan R merupakan relasi yang terdefinisi pada himpunan A

R = $\{(2,1)(3,1)(3,2)(5,1)(5,2)(5,3)\}$

Apakah R transitif

Jawab

Perhatikan table

(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3,2)	(2,1)	(3,1)
(5,2)	(2,1)	(5,1)
(5,3)	(3,1)	(5,1)
(5,3)	(3,2)	(5,2)

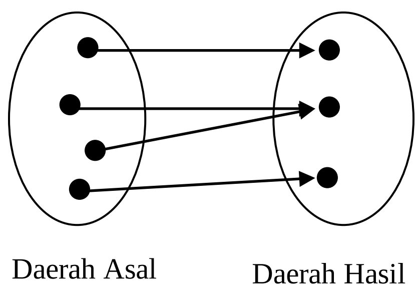
Karena (a, b) dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$ untuk $a, b, c \in A$ maka R transitif

7. **Relasi ekivalen**
Jika sebuah relasi memiliki sifat refleksif, simetri dan transitif maka relasi tersebut dikatakan relasi ekivalen.

B. Fungsi

1. Definisi fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal,** dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut **daerah hasil** (jelajah) fungsi tersebut.



GAMBAR 1

Daerah ini tidak memberikan pembatasan pada himpunan-himpunan daerah asal dan daerah hasil. Daerah asal mungkin terdiri dari himpunan orang dalam kelas kalkulus anda, daerah nilai berupa himpunan angka (A, B, C, D, F) yang akan diberikan, dan aturan padanan adalah prosedur yang dipakai dosen anda dalam memberikan angka.

Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Maka $f(x)$, yang dibaca "f dari x" atau "f pada x", menunjukan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Jadi, jika $f(x) = x^3 - 4$,

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 - h^3 - 4$$

2. Daerah asal dan daerah hasil

Aturan padanan merupakan pusat dari suatu fungsi, tetapi sebuah fungsi belum secara lengkap ditentukan sampai daerah asalnya diberikan. Daerah asal adalah himpunan elemen-elemen pada mana fungsi itu mendapat nilai. Daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai yang diperoleh secara demikian. Misalnya, jika F adalah fungsi dengan aturan $F(x) = x^2 + 1$ dan jika daerah asal dirinci sebagai $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (Gambar 3), maka daerah hasilnya adalah $\{1, 2, 5, 10\}$. Daerah asal dan aturan untuk menentukan daerah hasil tersebut. Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, kita selalu menganggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan riil yang terbesar sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan nilai bilangan riil. Ini disebut daerah asal mula (domain natural).

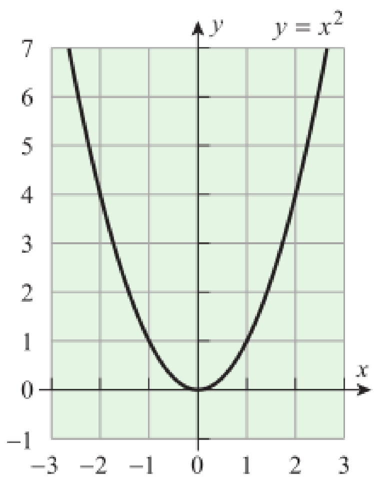
Contoh 8

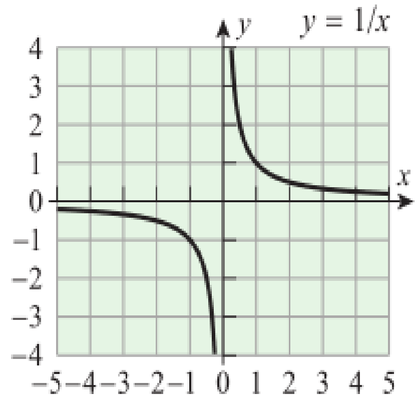
Diketahui fungsi: $f(x) = \frac{x-3}{x}$ $x \neq 0$, tentukan daerah asal fungsi (domain)

Jawab:

Daerah asal fungsi tersebut merupan semua bilangan Real kecuali 0

Contoh 9
Buatlah sketsa grafik-grafik dari:
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = {}^1\!/_x$
Jawab:





3. Fungsi genap dan ganjil

a. Fungsi genap

Jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua x, maka grafik simetris terhadap sumbu y. Karena fungsi yang merinci $f(x)$ sebagai jumlah dari pangkat-pangkat genap x adalah genap.

b. Fungsi ganjil

Jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x, maka grafik simetris terhadap titik asal. Karena fungsi yang memberikan $f(x)$ sebagai jumlah dari pangkat-pangkat ganjil x adalah ganjil.

Contoh 10
Apakah $f(x) = x^2$ adalah fungsi genap?
Jawab***:***
$f(-x) = (-x)^2$

$= (-x)(-x)$

$= x^2$

$= f(x)$

Maka diproleh $f(-x) = f(x)$, maka $f(x) = x^2$ adalah fungsi genap

Contoh 11
Apakah $f(x) = x^3 - x$ adalah fungsi ganji
Jawab:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)$$
$$= -x^3 + x$$
$$= -(x^3 - x)$$
$$= -f(x)$$

Maka diproleh $f(-x) = -f(x)$, maka $f(x) = x^3 - x$ adalah fungsi ganjil

4. Operasi pada fungsi

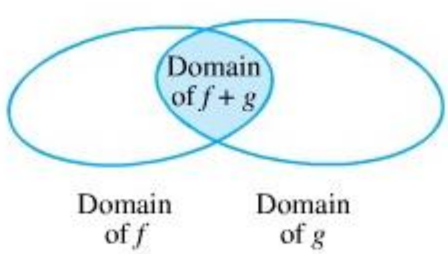
Operasi yang berlaku pada fungsi adalah operasi jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi, dan pangkat.
Misalkan fungsi f dan g dengan rumus

$$f(x) = \frac{x-3}{2}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Kita dapat membuktikan sebuah fungsi baru $f + g$ dengan cara memberikan nilai pada $(x) + g(x) = (x-3)/2 + \sqrt{x}$; yakni,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$

Tentu saja kita harus sedikit hati-hati mengenai daerah asal. Jelas x harus berupa sebuah bilangan di mana f maupun g berlaku. Dengan kata lain, daerah asal $f + g$ adalah irisan dari daerah asal f dan g



Selain fungsi $f + g$ kita juga proleh fungsi-fungsi baru yakni $f - g$, $f.g$, dan f/g diperkenalkan dengan cara analog. Dengan anggapan bahwa f dan g mempunyai derah asal alami, kita proleh sebagi berikut:

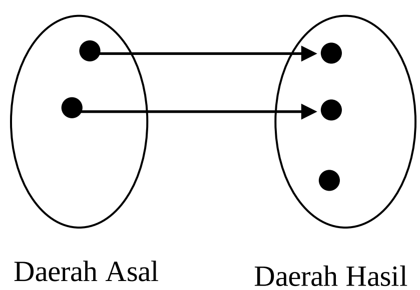
Rumus	**Daerah asal**
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x-3}{2}+\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x-3}{2}-\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\dfrac{x-3}{2}+\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$

5. Sifat fungsi

Berdasarkan fenomena yang terjadi pada kodomain/bayangan, fungsi terdiri atas tiga bagian yakni fungsi satu-satu (injektif), fungsi pada(surjektif), dan korespondensi satu-satu(bijektif).

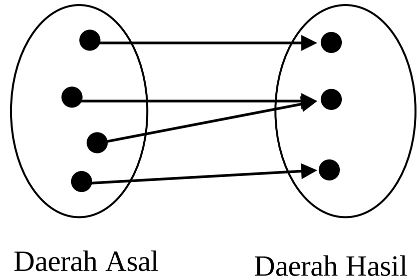
a. Fungsi satu-satu

Fungsi f dikatakan satu-satu (into) atau injektif jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan yang sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A maka $f(a) \neq f(b)$ apabila $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$



GAMBAR 2

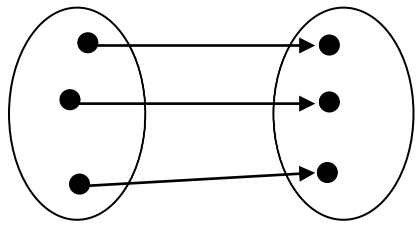
b. Fungsi f dikatakan pada (onto) atau surjektif jika setiap elemen himpunan Bmerupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A . Dengan kata lain, seluruh elemen B merupakan jelajah dari f



GAMBAR 3

c. Korespondensi satu-satu

Fungsi f dikatakan berkorespondensi satu-satu atau bijektif jika f fungsi satu-satu dan fungsi pada daerah asal tepat memiliki satu bayangan di daerah hasil.



GAMBAR 4

LATIHAN

Kerjakan soal latihan berikut dengan benar

1. Tuliska n anggota dari relasi Rpada $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika $x^2 \geq y$.
2. Untuk tiap relasi pada $\{1, 2, 3, 4\}$ berikut, tentukan apakah ia refleksif, setangkup, tak-setangkup, dan menghantar.
   a) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
   b) $\{(2,4), (4,2)\}$
   c) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
   d) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$
3. Misalkan Radalah relasi $\{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1)\}$ dan Sadalah relasi $\{(2,1), (3,1), (3,2), (4,2), (4,2)\}$. Tentukan $S\ o\ R$ dan $R\ o\ S$.
4. Misalkan $R = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ dan $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4)\}$ adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan
   a) $R \cup S$
   b) $R \cap S$
   c) $R - S$
   d) $S - R$
   e) $R \oplus S$
5. Misalkan Radalah relasi pada himpunan pasangan terurut dari bilangan bulat positif sedemikian sehingga $((a, b), (c, d)) \in R$ jika dan hanya jika $ad = bc$. Tunjukkan bahwa Radalah relasi kesetaraan.
6. Cari daerah asal alami dalam masing-masing kasus.
   a. f(x)= (4-x^2)/(x2-x-6)
   b. G(y)= √((y+ 〖1)〗 ^(-1))
   c. ∅ (μ)=|2μ+3|
   d. F (t) =t^(2/3)-
7. Misalkan f(x)=(ax+b)/(cx-a). Buktikan bahwa f(f(x))=x asalkan x^2+bc≠0 dan x≠a/c

BAB V ALJABAR

Kristayulita

Aljabar dikembangkan oleh Al-Khawarizmi merupakan seorang ahli di bidang matematika, astronomi, geografi, dan astrologi yang berasal dari Persia. Beliau dikenal sebagai penemu aljabar dan angka nol (0). Nama asli dari Al Khawarizmi adalah Muhammad Ibn Musa Al Khawarizmi. Al Khwarizmi lahir dan berkembang pada masa pemerintahan Kekhalifahan Abbasiyah saat berpusat di Baghdad (762-1258 M). Pada masa itu, perkembangan Islam dalam ilmu pengetahuan sangat pesat. Pada masa Khalifah Harun Al-Rasyid (786-809 M), Baghdad dikenal sebagai pusat peradaban sekaligus sentra ilmu pengetahuan. Beliau dilahirkan di Bukhara, hidup di Khawarizm(sekarang Khiva), Usbekistan pada tahun 194 H / 780 M dan meninngal tahun 266 H / 850 M di Baghdad. Al Khawarizmi sebagai guru aljabar di Eropa. Al-Khawarizmi juga dikenali dengan nama Abu Abdullah Muhammad bin Ahmad bin Yusoff, di dunia Barat Al-Khawarizmi dikenali sebagai al-Khawarizmi, al-Cowarizmi, al-Ahawizmi, al-Karismi, al-Goritmi, al-Gorismi, dan beberapa ejaan lainnya.

Beliau pernah memperkenalkan angka-angka India dan cara-cara perhitungan angka India pada dunia Islam. Al Khawrizmi merupakan ahli matematika yang memperkenalkan aljabar dan hisab pertama kali. Beliau juga banyak mempelajari dan menghasilkan konsep-konsep matematika yang popular dan masih berlaku sampai sekarang.

Aljabar (Algebra) adalah core matematika. Pada abad 21, karya Al Khawarizmi diterjemahkan oleh Gerhard of Germano dan Robert of Chaster dalam bahasa Eropa. Pada tahun 820 M, karya yang berjudul " Hisab al jibra wa al muqabalah" yang muncul sebelumnya dan istilah aljabar belum diperkenalkan. Buku **Al-Jabar** (*Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*) merupakan buku yang diterbitkan pertama kali berisi penyelesaian sistimatk dari linear dan notasi kuadrat. Karya ini membuat Al Khawarizmi dijuluki sebagai Bapak Aljabar. Buku ini membawa kontribusi dalam kebahasan dan kata Aljabar diambil dari kata al-jabr yang terdapat dalam bukunya. Buku al-jabr merupakan revolusi yang sangat besar dalam bidang matematika. Al Khawarizmi berhasil melakukan integrasi konsep-konsep geometri dari matematika yunani kuno ke dalam konsep matematika yang baru. Hasil pemikiran Al Khawarizmi menghasilkan sebuah teori simultan yang membuat bilangan rasional, irrasional dan besara-besaran geometri dijadikan sebagai objek-objek aljabar.

Al Khawarizmi diperkirakan wafat tahun 850 M. Karya beliau tidak hanya di bidang matematika, banyak hasil pemikiran beliau berpengaruh pada bidang ilmu pengetahuan lainnya. Salah satu conto di bidang geografi, beliau menyempurnakan peta Ptolemeus dengan judul *Kitāb ṣūrat al-Arḍ* dan menurut Paul Gallez, hal ini sangat bermanfaat untuk menentukan posisi kita dalam kondisi yang buruk.

Al Khawarizmi juga banyak memberikan pengaruh pada perkembangan ilmu pengetahuan dunia, diantaranya :

1. Menemukan konsep aljabar yang kita kenal sekarang melalui buku Al-Jabr yang berisi mengenai persamaan linear dan kuadrat.
2. Orang yang pertama menjelaskan dan mempopulerkan kembali penggunaan angka nol (0) serta mengenalkan sistem notasi desimal dan tanda pengalian dua.
3. Memperkenalkan tanda negatif pada bilangan.
4. Membuat tabel perhitungan astronomi guna mengukur jarak dan kedalaman bumi. Tabel ini juga menjadi dasar untuk penelitian di bidang astronomi.
5. Model pembuatan peta dunia yang dituliskan dalam buku ṣūrat al-Arḍ yang digunakan para ahli geografi barat dalam menggambar peta.
6. Menemukan konsep alat penunjuk waktu dengan bayang sinar matahari dalam buku sundials.
7. Menemukan konsep dasar algoritma melalui pembahasan aturan-aturan melakukan aritmatika menggunakan bilangan Hindu-Arab dan solusi sistematis.

Pada bab ini akan dibahas materi aljabar terkait persamaan linear satu variabel dan pertidaksamaan linear satu variabel. Sebelum mempelajari persamaan linear satu variabel dan pertidaksamaan linear satu variabel, kita harus memahami pengertian kalimat pernyataan, kalimat tertutup, dan kalimat terbuka.

1. Kalimat Pernyataan

Dalam matematika ada beberapa jenis-jenis kalimat yang sudah diketahui, seperti : kalimat berita, kalimat perintah, dan kalimat tanya. Ada beberapa contoh tentang kalimat-kalimat tersebut. Pernahkah kamu menjawab pertanyaan Bapak atau Ibu guru ? Jika pernah, bagaimana jawaban yang Anda kemukakan itu ? Benar atau salah?

Jika Anda menjawab dengan lengkap, sebaiknya jawabannya berupa kalimat.

Sebagai contoh : " Berapa banyak siswa di kelasmu ? "

Contoh jawabannya adalah " Banyak siswa di kelas saya ada 40 orang.

Perhatikan kalimat berikut ini :

a. Banyak pemain sepak takraw dalam satu tim ada 3 orang
b. Mata uang negara Amerika Serikat adalah Dollar
c. Kubus merupakan bangun ruang
d. 23 merupakan bilangan prima
e. $-5 > -10$

f. $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}=\frac{23}{40}$
g. Bilangan ganjil dikalikan dengan bilangan genap hasilnya adalah bilangan ganjil

Dari beberapa contoh di atas, kalimat yang merupakan kalimat yang benar atau kalimat yang salah? Suatu kalimat yang ***sudah*** bisa ditentukan benar atau salahnya dinamakan **kalimat pernyataan**.

Kalimat benar atau kalimat salah disebut *pernyataan atau kalimat tertutup.*

a. Kalimat *yang salah* adalah kalimat yang menyatakan hal-hal yang tidak sesuai dengan kenyataan/ keadaan yang berlaku umum.
b. *Kalimat yang benar* adalah kalimat yang menyatakan hal-hal yang sesuai dengan keadaan, kenyataan yang berlaku umum.
c. Kalimat yang bernilai benar atau salah disebut *kalimat tertutup* atau sering disebut *pernyataan.*

2. Kalimat Terbuka

Perhatikan kalimat berikut yang dinyatakan dalam suatu masalah:

Suatu hari Ricki mambawa sebuah tas yang berisi buku. Sebelum tas dibuka Ricki berkata pada temannya ”banyak buku dalam tas ada 9 buah”. Bagaimana pendapatmu tentang ucapan Ricki? benar atau salah ?

Perhatikan kalimat ” *banyak buku dalam tas ada 9 buah*”

Apakah anda dapat menentukan kalimat itu benar atau salah?

Kalimat yang diucapkan Ricki dapat ditentukan kalimat itu benar atau salah. Kalimat yang diucapkan Ricki belum bisa ditentukan nilai kebenarannya seblum kita melakukan pengecekan pada tas yang dimiliki oleh Ricki. Setelah kita memeriksa tas Ricki untuk memastikan jumlah buku yang ada dalam tas tersebut, ada dua kemungkinan yaitu ada 9 buku dalam tas Ricki yang bisa kita nilai kalimat bernilai benar da nada buku yang tidak berjumlah 9 buah yang bisa kita nilai kalimat salah.

Contoh: “10 *ditambah suatu bilangan hasilnya* 16”

Kalimat pada contoh tersebut, kita tidak dapat menentukan kalimat tersebut benar atau salah, kaarena kata “suatu bilangan” dalam kalimat tersebut belum diketahui. Kalimat tersebut akan bernilai benar atau salah tergantung pada berapa nilai yang diberikan pada “*suatu bilangan*”. Jika kita mengganti nilai “*suatu bilangan*” dengan bilangan 6 maka kalimat tersebut akan bernilai benar, karena 10 ditambah 6 sama dengan 16. Sebaliknya jika kita mengganti nilai "*suatu bilangan*" dengan 3 maka kalimat tersebut akan bernilai salah, karena 10 ditambah 3 sama dengan 13. Kalimat yang belum bisa ditentukan benar atau salahnya dinamakan kalimat terbuka. Dalam matematika, kalimat "*suatu bilangan*" yang belum ditentukan disebut variabel atau peubah. Variabel atau peubah disimbolkan dengan huruf kecil x, y, a, n atau bentuk yang lain. Jika "*suatu bilangan*" dganti dengan x, kalimat "10 *ditambah suatu bilangan hasilnya* 16" dapat ditulis menjadi $10 + x = 16$.

Perhatikan kalimat berikut :

a. $x - 6 = 15$
b. $3 + x = 10$

Belum dapat mengatakan kalimat itu benar atau salah, sebab nilai (x) belum diketahui. Bila lambang (x) diganti dengan lambang bilangan cacah, barulah itu dapat dikatakan kalimat itu benar atau salah. Jika (x) diganti dengan "15" , kalimat itu bernilai salah ; tetapi bila (x) diganti dengan 21 , kalimat itu bernilai benar. Lambang (x) dapat pula diganti menggunaan huruf-huruf kecil dalam abjad lainnya, yaitu ; $a, b, c,$ ... x,y,z dari bentuk diatas

$x - 6 = 15$ (kalimat terbuka)
$15 - 6 = 15$ (kalimat pernyataan bernilai salah)
$21 - 6 = 15$ (kalimat pernyataan bernilai benar)
$3 + 7 = 10$ (kalimat pernyataan bernilai benar)

Huruf x pada $x - 6 = 15$ dan $3 + x = 10$ disebut *variabel* (peubah), sementara 6, 15, 3, dan 10 disebut konstanta.

a. Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat variabel dan belum dapat diketahui nilai kebenarannya.
b. Variabel (peubah) adalah lambang (simbol) pada kalimat terbuka yang dapat diganti oleh sebarang anggota himpunan yang telah ditentukan
c. Konstanta adalah lambang yang menyatakan suatu bilangan

3. Penyelesaian Kalimat Terbuka

Setiap kalimat terbuka memuat variabel yang dapat diganti dengan satu atau beberapa anggota yang telah ditentukan. Pengganti dari variabel yang membuat kalimat terbuka menjadi kalimat bernilai benar disebut penyelesaian.

Contoh :

a. $x + 12 = 22,$

Pengganti x yang benar adalah 10.

Jadi, penyelesaian dari kalimat terbuka tersebut adalah $x = 10$

b. Diketahui x adalah bilangan ganjil dan x adalah koefisien pada bilangan $1a$, $2b$, $3c$, $4d$. Tentukan nilai x yang memenuhi !

Pengganti x yang benar adalah 1 dan 3.

Jadi, penyelesaiannya adalah 1 dan 3.

A. Persamaan Linear Satu Variabel

1. Pengertian Kesamaan

Kesamaan adalah kalimat pernyataan yang memuat hubungan sama dengan (=). Artinya, kalimat tersebut sudah jelas nilai kebenarannya baik benar ataukah salah.

Contoh :

a. $5 + 6 = 9$. (kesamaan yang bernilai salah)

b. $7 - 4 = 3$. (kesamaan yang bernilai benar)

Akan tetapi, tidak semua kesamaan tidak memiliki variabel, atau dengan kata lain, tidak semua kalimat terbuka yang memuat hubungan sama dengan (=) merupakan persamaan. Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

a. $x - 4 = x - 4$

b. $3x + 6 = x + x + x + 6$

Pada contoh di atas yaitu, $x - 4 = x - 4$ dan $3x + 6 = x + x + x + 6$ merupakan sebuah kesamaan, karena jika *x* diganti dengan sebarang bilangan, maka selalu diperoleh kalimat benar. Dengan demikian $x - 4 = x - 4$ dan $3x + 6 = x + x + x + 6$ bukan kalimat terbuka, karena merupakan kalimat benar atau disebut **kesamaan**.

2. Pengertian Persamaan Linear Satu Variabel

Perhatikan kalimat terbuka $a - 3 = 7$.

Kalimat terbuka tersebut dihubungkan oleh tanda sama dengan (=). Selanjutnya, kalimat terbuka yang dihubungkan oleh tanda sama dengan (=) disebut *persamaan.*

Persamaan dengan satu variabel berpangkat satu disebut *persamaan linier satu variabel*.

Jika a pada persamaan $a - 3 = 7$ diganti dengan $a = 10$ maka persamaan tersebut bernilai benar. Adapun jika a diganti bilangan selain 10 maka persamaan a–3=7 bernilai salah. Dalam hal ini, nilai $a = 10$ disebut penyelesaian dari persamaan linier $a - 3 = 7$. Selanjutnya, himpunan penyelesaian dari persamaan linier $a - 3 = 7$ adalah {10}.

Masalah 1 :

Sherly membeli pensil sebanyak 20 buah.

a. Sesampai dirumah, adiknya meminta beberapa pensil, ternyata pensilnya sisa 17 buah, berapa pensil yang diminta adiknya ?
b. Jika Sherly membutuhkan 8 pensil, dan sisanya dibagikan rata kepada keempat adiknya. Berapa pensil yang diterima oleh masing- masing adiknya ?

Pada masalah di atas :

a. Jika banyak pensil yang diminta oleh adik Sherly dimisalkan x buah, maka diperoleh kalimat : $20 - x = 17$

Manakah variabel atau peubah pada kalimat itu ?

- Ada berapa variabelnya ?
- Apakah $20 - x = 17$ merupakan kalimat terbuka ?
- Pada kalimat $20 - x = 17$ mengunakan tanda hubung " = "
- Pada kalimat $20 - x = 17$ pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu.

Kalimat terbuka yang menggunakan tanda hubung " = " disebut **persamaan**. Jika pangkat tertinggi dari variabel suatu persamaan adalah **satu** maka persamaan itu disebut **persamaan linear.** Persamaan linear yang hanya memuat satu variabel disebut **persamaan linear satu variabel (PLSV).** Jadi $20 - x = 17$ merupakan salah satu contoh PLSV

b. Jika banyak pensil yang diperoleh masing- masing adik Sherly dimisalkan n, maka diperoleh persamaan $8 + 4n = 20$

- Jika n diganti dengan 5, maka kalimat itu menjadi : $8 + 4(5) = 20$ dan bernilai salah
- Jika n diganti dengan 3, maka kalimat itu menjadi : $8 + 4(3) = 20$ dan bernilai benar

Pengganti n supaya $8 + 4n = 20$ menjadi benar adalah 3.

Pengganti dari variabel (peubah) sehingga persaman menjadi benar disebut Penyelesaian persamaan, sedangkan himpunan yang memuat semua penyelesaian disebut himpunan penyelesaian.

1. **Penyelesaian Persamaan Linear Satu Variabel**

Misalkan, Deny ingin menjawab secara mencongkak soal persamaan linear satu variabel 3x = 9 dengan x anggota bilangan asli. Dia mengganti x dengan 3 sehingga kalimat terbuka $3x = 9$ menjadi benar.

$3x = 9 \Rightarrow 3 \ . \ 3 = 9$, $x = 3$ adalah penyelesaian/ jawaban PLSV 3*x*=9. Jadi himpunan penyelesaian dari $3x = 9$ adalah {3}.

Penyelesaian suatu persamaan linear satu variabel adalah bilangan pengganti dari variabel pada daerah definisi persamaan yang membuat persamaan menjadi pernyataan yang benar.

a. Menyelesaikan Persamaan dengan Cara Substitusi

Menyelesaikan persamaan dengan cara substitusi artinya menyelesaikan persamaan dengan cara **mengganti *variabel*** dengan bilangan-bilangan yang telah ditentukan, sehingga persamaan tersebut menjadi **kalimat benar**.

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari persamaan $2x - 1 = 5$

Jawab :

Untuk $x = 1.$ maka $2 \times 1 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Untuk $x = 2.$ maka $2 \times 2 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Untuk $x = 3.$ maka $2 \times 3 - 1 = 5$ (merupakan kalimat **benar**).

Untuk $x = 4.$ maka $2 \times 4 - 1 = 5$ (merupakan kalimat salah).

Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 3$

b. Menyelesaikan Persamaan dengan Cara Menambah atau Mengurangi Kedua Ruas dengan Bilangan yang Sama

Perhatikan kesamaan-kesamaan berikut ini !

a. $3 + 4 = 7$ (kalimat **benar**)
$3 + 4 + 10 = 7 + 10$ (kedua ruas ditambah 10)
$17 = 17$ (kalimat **benar**)

b. $5 + 6 = 11$ (kalimat **benar**)
$5 + 6 - 3 = 11 - 3$ (kedua ruas dikurangi 3)
$8 = 8$ (kalimat **benar**)

Ternyata kesamaan tetap bernilai benar jika kedua ruas *ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama*.

Selanjutnya perhatikan persamaan-persamaan berikut ini !

a. $x + 6 = 10$
$x + 6 - 6 = 10 - 6$ (kedua ruas dikurangi 6)

$x - 0 \quad = 4$

$x \quad\quad = 4$

Pengecekkan $x + 6 = 10$

Untuk $x = 4$, maka $4 + 6 = 10$ (kalimat **benar**).

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 4$.

b. $x - 7 = -12$

$x - 7 + 7 = -12 + 7$ (kedua ruas ditambah 7)

$x - 0 \quad = -5$

$x \quad\quad = -5$

Pengecekkan $x - 7 = -12$

Untuk $x = -5$, maka $-5 - 7 = -12$ (kalimat **benar**).

Jadi penyelesaiannya adalah $x = -5$.

c. Menyelesaikan Persamaan dengan Mengalikan atau Membagi Kedua Ruas Persamaan dengan Bilangan yang Sama

Perhatikan kesamaan-kesamaan berikut!

1) $3 \times 7 = 21$ (kalimat benar)

$3 \times 7 \times 2 = 21 \times 2$ (kedua ruas dikalikan 2)

$42 = 42$ (kalimat **benar**)

2) $2x \times 5 = 20$

$\frac{1}{5} \times 2x \times 5 = \frac{1}{5} \times 20$ (Kedua ruas dikali $\frac{1}{5}$)

$2x = 4$

$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 4$ (Kedua ruas dikali $\frac{1}{2}$)

$x = 2$

Pembuktian:

$2x \times 5 = 20$

Untuk $x = 2$, maka $2(2) \times 5 = 20$

$4 \times 5 = 20$

$20 = 20$ (kalimat **benar**)

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 2$.

Ternyata kalimat kesamaaan tetap bernilai benar jika kedua ruas dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama.

d. Grafik Penyelesaian Persamaan dengan satu Variabel

Pada garis bilangan, grafik penyelesaian dari suatu persamaan dinyatkan dengan noktah atau titik. Perhatikan penyelesaian persamaan-persamaan berikut beserta grafiknya!

$$2x-1=5$$

$$2x-1+1=5+1 \qquad \text{(kedua ruas ditambah 1)}$$

$$2x=6$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \qquad \text{(kedua ruas dibagi 2)}$$

$$x=3 \qquad \text{(kalimat \textbf{benar})}$$

Penyelesaiannya adalah $x=3$.

Pembuktian :

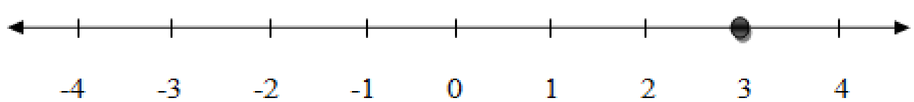
$$2x-1=5$$

Untuk $x=3$, maka $2(3)-1=5$

$$5=5 \qquad \text{(kalimat \textbf{benar})}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x=3$.

Grafik penyelesaian dari persamaan di atas adalah:



e. Menyelesaikan Persamaan Bentuk Pecahan

Persamaan bentuk pecahan adalah persaman yang variabelnya memuat pecahan, atau bilangan konstantanya berbentuk pecahan atau keduanya memuat pecahan.

Untuk penyelesaian persamaan bentuk pecahan dengan cara yang lebih mudah, terlebih dahulu merubah persamaan tersebut menjadi persamaan lain yang ekuivalen tetapi tidak lagi memuat pecahan. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mengalikan kedua ruas persamaan dengan Kelipatan Persekutuan Terkecil (**KPK**) dari penyebut-penyebutnya.

Selain itu, persamaan bentuk pecahan dapat juga deselesaikan tanpa mengubah bentuk persamaan.

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari persamaan $\frac{2}{5}(3x-2)=6$.

Jawab:

$$\frac{2}{5}(3x-2)=6$$

$$5\times\frac{2}{5}(3x-2)=5\times 6 \qquad \leftarrow\text{- - - Kedua ruas dikalikan 5}$$

$$2(3x-2)=30$$

$$6x-4=30$$

$$6x-4+4=30+4 \qquad \leftarrow\text{- - - Kedua ruas ditambah 4}$$

$$6x = 34$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{34}{6} \leftarrow \text{- - - kedua ruas dibagi 6}$$

$$x = 5\frac{4}{6}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $5\frac{4}{6}$

4. Penerapan Persamaan dalam Kehidupan

Untuk menyelesaian soal-soal dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk cerita, maka langkah-langkah berikut dapat membantu mempermudah penyelesaian.

a. Jika memerlukan diagram (sketsa), misalnya untuk yang berhubungan dengan geometri, buatlah diagram (sketsa) berdasarkan kalimat cerita itu.
b. Menerjemahkan kalimat cerita menjadi kalimat matematika dalam bentuk persamaan.
c. Menyelesaikan persamaan tersebut.

Contoh:

1. Umar dan Ali adalah kakak beradik. Hari ini Ali berulang tahun yang ke-6. Saat ini usia Umar 10 tahun lebih tua dari pada umur Ali. Barapakah usia Umar saat ini?

   Jawab :

   Usia Umar lebih tua dari usia Ali.
   Usia Ali saat ini adalah 6 tahun.
   Dimisalkan usia Umar saat ini adalah x tahun.
   Maka,
   x = Usia Umar saat ini
   $x - 10$ = Usia Ali saat ini
   x = Usia Ali saat ini
   Sehingga,

   $$x - 10 = 6$$

   $$x - 10 + 10 = 6 + 10 \quad \text{(kedua ruas ditambah 10)}$$

   $$x = 16$$

   Jadi, umur Umar saat ini adalah 16 tahun.

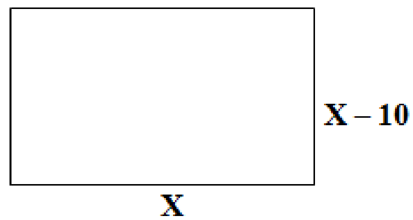
2. Jodi memiliki kolam ikan didepan rumahnya berbentuk persegi panjang. Lebar kolam ikan tersebut 10 cm lebih pendek dari pada panjangnya. Jika keliling kolam ikan 3,8 m, ditanya luas kolam ikan tersebut.

   Jawab :

Misalkan panjang kolam ikan = X

Maka, lebar kolam Ikan = $X - 10$,

Maka, gambar yang tampak:



Model matematika adalah $p = X$ dan $l = X - 10$

Sehingga

$K = 2\,(p + l)$

$380 = 2\,(x + x - 10)$

Penyelesaian :

$K = 2\,(p + l)$

$380 = 2\,(x + x - 10)$

$380 = 2\,(2x - 10)$

$380 = 4x - 20$

$380 + 20 = 4x - 20 + 20$ (Kedua ruas ditambah 20)

$400 = 4x$

$x = 100$

Jadi, panjang kolam tersebut adalah 100 cm².

Luas $= p\,, l$

$= x\,(x - 10)$

$= 100\,(100 - 10)$

$= 100\,, 90$

$l = 9000\ cm^2$

Jadi, luas kolam tersebut adalah 9000 cm² atau 0,9 m².

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian persamaa berikut dengan peubah pada himpunan bilangan bulat.

1. $4x + 9 = 3x + 7$

$\leftrightarrow\ 4x + 9 - 9 = 3x + 7 - 9$ (Tiap ruas dikurangi 9)

$\leftrightarrow\ 4x = 3x - 2$

$\leftrightarrow\ 4x - 3x = 3x - 3x - 2$ (Tiap ruas dikurangi $3x$)

$\leftrightarrow\ x = -2$

HP = $\{-2\}$

2. $3c + 9 = 6c - 6$

$\leftrightarrow\ 3c + 9 - 9 = 6c - 6 - 9$ (Tiap ruas dikurangi 9)

$\leftrightarrow\ 3c = 6c - 15$

$\leftrightarrow\ 3c - 6c = 6c - 6c - 15$(Tiap ruas dikurangi $6c$)

$\leftrightarrow\ -3c = -15$

$\leftrightarrow \frac{-3c}{-3} = \frac{-15}{-3}$ (Tiap ruas dibagi – 3)

$\leftrightarrow\ c = 5$

HP = $\{5\}$

Latihan

Kerjakan soal-soal berikut ini di buku tugasmu

1. Tentukan yang merupakan persamaan linier satu variabel dan berikan alasan nya.
   a) $x + y + z = 20$
   b) $3x^2 + 2x - 5 = 0$
   c) $x + 9 = 12$
   d) $3a - 6 = 7 + a$
   e) $2x + y = 1$
   f) $3x = 1$
   g) $3xy + 2 = 5$
   h) $\frac{1}{3}(2y - 8) = 4$
2. Tentukan himpunan penyelesaian dibawah ini.
   a) $9 - 3r = 6$
   b) $q + 7 = 12$
   c) $7a = 3a + 8$
   d) $2x + 9 = 3x + 11$
   e) $2a - 1 = 3a - 5$
   f) $1 = 9 + x$
   g) $4 + p = 3$
   a. 2 – z = z – 3

B. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Dalam kehidupan sehari-hari, tentu kalian pernah mendengar kalimat-kalimat seperti berikut.

- Berat badan Hanifa lebih dari 50 kg.
- Salah satu syarat menjadi anggota TNI adalah badannya tidak kurang dari 165 cm.
- Sebuah bus mahasiswa Unsri dapat mengangkut tidak lebih dari 35 orang.

1. Pengertian Ketidaksamaan

Suatu ketidaksamaan selalu ditandai dengan salah satu tanda hubung berikut.

"<" untuk menyatakan *kurang dari*.
">" untuk menyatakan *lebih dari*.
" ≤ " untuk menyatakan *tidak lebih dari* atau *kurang dari atau sama dengan*.
" ≥ " untuk menyatakan *tidak kurang dari* atau *lebih dari atau sama dengan*.

Kalimat terbuka yang menggunakan tanda hubung : <, >, ≤, atau ≥ merupakan **pertidaksamaan.** Pertidaksamaan yang memuat satu variabel dan pangkat variabelnya adalah satu disebut **pertidaksamaan linier satu variabel.**

Contoh **:**

a. 3 kurang dari 5 ditulis $3 < 5$
b. 8 lebih dari 4 ditulis $8 > 4$
c. x tidak lebih dari 9 ditulis $x \leq 9$
d. dua kali y tidak kurang dari 16 ditulis $2y \geq 16$

2. Pengertian Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Misal a, b adalah bilangan real, dengan $a \neq 0$,

Pertidaksamaan Linear Satu Variabel (PtLSV) adalah kalimat terbuka yang memiliki sebuah variabel yang dinyatakan dengan bentuk:

$ax + b > 0$ atau $ax + b < 0$ atau $ax + b \leq 0$ atau $ax + b \geq 0$.

Masalah 1

Dalam kehidupan sehari-harinya, Beni menemukan kalimat seperti berikut:

Siswa yang ikut remedial adalah siswa yang nilainya kurang dari 6.

a) Nilai matematika Beni adalah 5. Apakah Beni ikut remedial? Mengapa? Berikan alasanmu.
b) Nilai matematika Beni adalah 7. Apakah Beni ikut remedial? Mengapa? Berikan alasanmu.

c) Nilai matematika Beni adalah 6. Apakah Beni ikut remedial? Mengapa? Berikan alasanmu.

Alternatif Penyelesaian

Kalimat “Siswa yang ikut remedial adalah siswa yang nilainya kurang dari 6” berarti siswa harus mengikuti remedial jika nilainya di bawah 6. Kata *“di bawah 6”* memberikan batasan harus lebih rendah dari nilai 6, nilai 6 dan di atas nilai 6 tidak termasuk. Langkah-langkah mengubah kalimat di atas menjadi model matematika kita lakukan sebagai berikut:

a) Misalkan b adalah nilai siswa.
b) Ubah kata ‘kurang dari’ ke dalam simbol matematika yaitu: $<$.
c) Model matematikanya adalah $b < 6$.

Dari alternatif pemecahan masalah di atas kita temukan hal-hal berikut:

a. 4 (empat) buah model matematika yang menggunakan simbol $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. Keempat simbol (tanda) ini merupakan tanda ketidaksamaan. Pembacaan simbol-simbol ini adalah:
   $<$: kurang dari
   $\leq$: kurang dari sama dengan
   $>$: lebih dari
   $\geq$: lebih dari sama dengan
b. Model matematika yang dibentuk memiliki masing-masing satu buah variabel.
c. Pangkat masing-masing variabelnya adalah 1.

Jika keempat model matematika yang kita temukan adalah contoh pertidaksamaan linear satu variabel.

3. Sifat-Sifat Pertidaksamaan

Sifat- sifat pertidaksamaan adalah :

a. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
b. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
c. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif , maka akandiperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik.

d. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaikannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang .

4. **Menentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu variable**

a. Jika kedua ruas pertidaksamaan ditambah atau dikurang dengan sebuah bilangan maka tanda pertidaksamaan tetap.

Contoh : Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $4 + x > 1$?

Jawab :

$4 + x > 1$

$4 - 4 + x > 1 - 4$ *(kedua ruas dikurangi 4)*

$x > -3$

Jadi, tanda pertidaksamaan tetap

b. Jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan sebuah bilangan positif maka tanda pertidaksamaan tetap.

Contoh : Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $4 - 2x < 8$?

Jawab :

$2x < 8$

$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$ *(kedua ruas bibagi 2)*

$x < 4$

Jadi, tanda pertidaksamaan tetap

c. Jika kedua ruas pertidaksamaan dikali atau dibagi dengan sebuah bilangan negatif maka tanda pertidaksamaan harus diubah (< menjadi >, ≤ menjadi ≥, dan sebaliknya).

Contoh : Berapakah nilai x yang memeuhi pertidaksamaan $-2x \geq 30$?

Jawab :

$-2x \geq 30$

$-\frac{2x}{2} \geq \frac{30}{2}$ *(kedua ruas dibagi 2)*

$-x \geq 15$ *(Kedua ruas dibagi -1)*

$x \leq -15$

Jadi, tanda pertidaksamaan harus diubah

Masalah 2

Pak Fredy memiliki sebuah mobil box pengangkut barang dengan daya angkut tidak lebih dari 500 kg. Berat Pak Fredy adalah 60 kg dan dia akan mengangkut kotak barang yang setiap kotak beratnya 20 kg.

a. Berapa kotak paling banyak dapat diangkut Pak Fredy dalam sekali pengangkutan?
b. Jika Pak Fredy akan mengangkut 110 kotak, paling sedikit berapa kali pengangkutan kotak itu akan habis?

Agar masalah di atas dapat kita selesaikan, terlebih dahulu kita ubah ke dalam bentuk model matematika.

Langkah-langkah mengubahnya adalah:

Misalkan: $x\ =$ banyaknya kotak barang yang diangkut dalam mobil box.

Mengubah kata 'tidak lebih' ke dalam simbol matematika yaitu: ≤

Sehingga model matematikanya adalah: $20x + 60 \leq 500$

Berat satu kotak = 20 kg

Berat $= 20 \times x\, kg = 20\, x$

Berat Pak Fredy = 60

Berat keseluruhan = $20\, x + 60$

Paling banyak kotak yang dapat diangkut pak Fredy dalam sekali pengangkutan adalah nilai *x* paling besar pada penyelesaian pertidaksamaan $20x + 60 \leq 500$. Mengapa? Berdiskusilah dengan temanmu.

Penyelesaian pertidaksamaan ini kita lakukan sebagai berikut.

$20x + 60 \leq 500$

$20x + 60 - 60 \leq 500 - 60$ *(kedua ruas dikurang 60)*

$20x \leq 440$ *(kedua ruas dibagi 20)*

$x \leq 22$

x paling besar yang memenuhi pertidaksamaan $x \leq 22$ adalah 22. Maka kotak yang dapat diangkut pak Fredy dalam sekali pengangkutan paling banyak adalah 22 kotak.

Pengangkutan kotak paling sedikit dapat terjadi jika Pak Fredy mengangkut 22 kotak pada setiap pengangkutan. Apakah kamu setuju? Berdiskusilah dengan temanmu.

Banyak pengangkutan paling sedikit = $\frac{110}{22}$ = 5 kali.

Sehingga banyak pengangkutan paling sedikit untuk mengangkut barang sebanyak 110 kotak adalah 5 kali pengangkutan.

Contoh :

Tentukanlah nilai yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini.

a. $2x - 6 \geq 8x + 5$

b. $\frac{3x-1}{4} < \frac{x}{2} - 1$

Alternatif Penyelesaian :

a.

$$\begin{aligned}
2x - 6 &\geq 8x + 5 \\
2x - 6 + 6 &\geq 8x + 5 + 6 \\
2x &\geq 8x + 11 \\
2x - 8x &\geq 8x - 8x + 11 \\
-6x &\geq 11 \\
x &\leq -\frac{11}{6}
\end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2x - 6 \geq 8x + 5$ adalah $x \leq -\frac{11}{6}$

b.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{4} &< \frac{x}{2} - 1 \\
4\left(\frac{3x-1}{4}\right) &< 4\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\
3x - 1 &< 2x - 4 \\
3x - 1 + 1 &< 2x - 4 + 1 \\
3x &< 2x - 3 \\
3x - 2x &< 2x - 2x - 3 \\
x &< -3
\end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{3x-1}{4} < \frac{x}{2} - 1$ adalah $x \leq -3$

Pengganti variabel dari suatu pertidaksamaan, sehingga menjadi pernyataan yang benar disebut penyelesaian dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Contoh :

Periksalah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $4x - 2 > 3x + 5$

$4x - 2 > 3x + 5$

$\leftrightarrow 4x - 2 + 2 > 3x + 5 + 2$ (Tiap ruas ditambah 2)

$\leftrightarrow 4x < 3x + 7$

$\leftrightarrow 4x - 3x < 3x + 7 - 3x$ (Tiap ruas dikurangi $3x$)

$\leftrightarrow x < 7$

Karena nilai x yang memenuhi adalah lebih dari 7, maka himpunan penyelesaian dari $4x - 2 > 3x + 5$ adalah $\{8. 9. 10. , , , \}$

Latihan

Jika variabel pada himpunan tersebut bilangan bulat. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier satu variabel berikut,.

a. $3(x - 4) > 5(x - 1)$
b. $4 \leq x + 5 \leq 8$
c. $2(z - 5) > 2(3 - 6z) + 3$
d. $7k < 5k + 4$
e. $2x + 1 < 4x - 5$
f. $3(p - 7) > 2(p - 5)$
g. $-7 < y + 8 \leq 10$
h. $(y - 5) + 6 < (4 - 3y)$
i. $-7u > 5u - 4$
j. $4s + 2 < 2s - 5$

BAB VI FUNGSI INVERS DAN FUNGSI KOMPOSISI

Erpin Evendi

Pada Bab ini membahas tentang konsep invers dan fungsi komposisi yang terdiri dari: aljabar fungsi, fungsi komposisi dan fungsi invers.

A. Aljabar Fungsi

Jenis operasi aljabar sering dijumpai dalam himpunan bilangan real, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan perpangkatan. Operasi aljabar pada bilangan real dapat diterapkan pada aljabar fungsi, yaitu jika diketahui fungsi f (x) dan g (x), dan n bilangan rasional.

Operasi aljabar pada fungsi ditetapkan sebagai berikut :

1. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Selisih fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
4. Pembagian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $$(x)\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
5. Perpangkatan fungsi f (x) dengan bilangan n ditulis:
   $f^n(x) = \{f(x)\}^n$

Contoh :

Diketahui fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus f (x) = 2x – 10 dan g (x) = $\sqrt{2x-1}$. Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut:

$(f + g)(x)$ d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$(f - g)(x)$ e. $f^3(x)$

$(f \times g)(x)$

Jawab :

a. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) adalah
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 10 + \sqrt{2x-1}$

b. Selisih fungsi f (x) dan g (x) adalah

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 10 - \sqrt{2x-1}$

c. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) adalah

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x - 10)(\sqrt{2x-1}) = 2x\sqrt{2x-1} - 10\sqrt{2x-1}$

Pembagian fungsi f (x) dengan g (x) adalah

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x-1}}$$

d. Perpangkatan fungsi f (x)

$f^3(x) = \{f(x)\}^3 = (2x - 10)^3 = 8x^3 - 160x^2 + 800x - 1000$

B. Fungsi Komposisi

Dari dua buah fungsi f(x) dan g(x) dapat dibentuk fungsi baru dengan menggunakan operasi komposisi. Operasi komposisi dilambangkan dengan o (dibaca : komposisi atau bundaran).Fungsi baru yang dapat dibentuk dengan operasi komposisi itu adalah :

a. (f o g) (x) dibaca : f komposisi g(x) atau f(g(x))

b. *(g o f) (x) dibaca : g komposisi f(x) atau g(f(x))*

Dimisalkan fungsi g : A → B ditentukan dengan y = g (x) dan f : B → C ditentukan dengan y = f (x), maka Fungsi komposisi f dan g ditentukan dengan: h(x) = (f o g) (x) = f (g(x)). Begitu juga sebalikanya dimisalkan fungsi f : A → B ditentukan dengan y = f (x) dan g : B → C ditentukan dengan y = g (x), maka Fungsi komposisi g dan f ditentukan dengan h (x) = (g o f) (x) = g (f (x))

Misal fungsi f : R → R dan g : R → R ditentukan dengan rumus f (x) = 4x – 1 dan g (x) = 3x.

Tentukan : a. (f o g) (x) b. (g o f) (x)

Jawab :

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(3x)$
$= 4(3x) - 1$
$= 12x - 1$

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(4x - 1)$
$= 3(4x - 1)$
$= 12x - 3$

Syarat fungsi komposisi (f o g) (x) sebagai berikut:

1. Irisan daerah hasil fungsi g dan f bukan himpunan kosong.

$\mathbf{R_g \cap D_f \neq \phi}$

2. Daerah asal fungsi (f o g) (x) merupakan himpunan bagian dari daerah asal fungsi g.

   $\mathbf{D_{(f\ o\ g)} \subseteq D_g}$
3. Daerah hasil fungsi komposisi (f o g) (x) merupakan himpunan bagian dari daerah hasil fungsi f.

   $\mathbf{R_{(f\ o\ g)} \subseteq R_f}$

Contoh :

Terdapat fungsi f : R → R dan g : R → R yang ditentukan oleh persamaan berikut, di mana:

f (x) = 3x + 1 dan g (x) = $\sqrt{x}$

Tentukan hasil dari :

a. (f o g) (x)
b. (g o f) (x)
c. Daerah asal (f o g) (x) dan daerah hasil (f o g) (x)
d. Daerah asal (g o f) (x) dan daerah hasil (g o f) (x)

Jawab :

Daerah asal f (x) = 3x + 1 adalah D_f : {x | x ∈ R} dan daerah hasil R_f : {y | y ∈ R}. adapun daerah asal dari fungsi g (x) = $\sqrt{x}$ adalah D_g : {x | x ≥ 0, x ∈ R} dan daerah hasilnya adalah R_g : {y | y ≥ 0, y ∈ R}. maka hasil dari:

a. (f o g) (x) = f (g (x)) = f ($\sqrt{x}$) = 3 $\sqrt{x}$ + 1
b. (g o f) (x) = g (f (x)) = g (3x + 1) = $\sqrt{3x+1}$
c. Daerah asal (f o g) (x) = $D_{(f\ o\ g)}$ = {x | x ≥ 0, x ∈ R}

   Daerah hasil (f o g) (x) = $R_{(f\ o\ g)}$ = {y | y ≥ 1, y ∈ R}

   Tampak bahwa $D_{(f\ o\ g)} = D_g$ dan $R_{(f\ o\ g)} \subset R_f$
d. Daerah asal (g o f) (x) = $D_{(g\ o\ f)}$ = {x | x ≥ -1/3 , x ∈ R}

   Daerah hasil (g o f) (x) = $R_{(g\ o\ f)}$ = {y | y ≥ o, y ∈ R}

   Tampak bahwa $D_{(g\ of)} \subset D_f$ dan $R_{(g\ o\ f)} = R_g$

Menyelesaiakn fungsi komposisi dapat juga dalam bentuk di mana fungsi komposisi dan salah satu fungsi yang lain diketahu dan kita akan menentukan nilai fungsi yang lainnya. Misalkan diketahui fungsi Misal fungsi komposisi (f o g) (x) = -3x + 4 dan f (x) = x + 1. Tentukan fungsi g(x).

Jawab :

$(f \circ g)(x) = -3x + 4$

$f(g(x)) = -3x + 4$

$(g(x)) + 1 = -3x + 4$

$g(x) = -3x + 4 - 1$

$g(x) = -3x + 3$

Jadi fungsi $g(x) = -3x + 3$

Contoh lain, terdapat fungsi komposisi (f o g) (x) = 2+3x dan fungsi g (x) = x + 2. Tentukan fungsi f (x).

Jawab :

(f o g) (x) = 2+3x

f (g (x)) = 2+3x

f (x + 2) = 2+3x

f (x + 2) = 2+ 3x

f(x) + 2 = 2+ 3x

f (x) = 2 + 3x- 2

f (x) = 3x

C. FungsiInvers

Invers dari fungsi f yang dinyatakan dalam bentuk pasanagn berurutan f: A → B dengan f : {(a,b) | a ∈ A dan b ∈ B} adalah f^{-1} : B → A sehingga : f^{-1} : {(b,a) | b ∈ B dan a ∈ A}. Ketika invers suatu fungsi merupakan fungsi maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

Misalkan himpunan A: {a, b, c, d} dan himpunan B : {1, 3, 4}. Selanjutnya Fungsi f : A → B ditentukan oleh f : {(-2,1), (-1,1), (0,3), (1,4)}. Carilah invers fungsi f.

Jawaban : Invers fungsi f adalah f^{-1} = B → A ditentukan oleh : f^{-1} : {(1,-2), (1,-1), (3,0), (4,1)}.

Beberapa cara untuk menentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$ jika fungsi f (x) diketahui yaitu:

1. Rubah persamaan y = f(x) dalam bentuk f sebagai fungsi y.
2. Bentuk x sebagai fungsi y pada langkah 1 dan dinamakan dengan $f^{-1}(y)$.
3. Rubah y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk memperoleh bentuk fungsi invers $f^{-1}(x)$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah rumus fungsi invers fungsi f (x).

Misalkan Fungsi berikut adalah pemetaan dari R ke R. tentukan rumus inversnya

a. f (x) = 3x + 4
b. f (x) = 3x – 2

Jawab :

1. f (x) = 3x + 4

   y = f (x) = 2x + 2

   x = $\frac{y-2}{2}$

   x = f^{-1}(y) = $\frac{y-2}{2}$

   f^{-1}(x) = $\frac{x-2}{2}$

2. f (x) = 3x – 6

   y = f (x) = 3x – 6

   x = $\frac{y+6}{3}$

   x = f-1(y) = $\frac{y+6}{3}$

   f-1(x) = $\frac{x+6}{3}$

LATIHAN

1. Fungsi f dan g ditentukan oleh rumus

   f (x) = x + 1 dan g (x) = $\frac{1}{2x-1}$

   Tentukan :

   a. (f + g) (x) dan (f + g) (3)
   b. (f – g) (x) dan (f – g) (2)
   c. (f x g) (x) dan (f x g) (2)
   d. $\left(\frac{f}{g}\right)$ (x) dan $\left(\frac{f}{g}\right)$ (1)
   e. f^2 (x) dan f^2 (2)

2. Fungsi f : R → R dan g : R → R ditentukan dengan rumus :

3. f (x) = x^2 + 3 dan g (x) = $\frac{2}{x+2}$

   a. Tentukan daerah asal fungsi f dan g
   b. Tentukan (f o g) (x) dan (g o f) (x)
   c. Tentukan daerah asal dan hasil fungsi (f o g) (x)
   d. Tentukan daerah asal dan hasil fungsi (g o f) (x)

4. Tentukan rumus fungsi invers f^{-1}(x), fungsi berikut :

f (x) = 2x – 1

f (x) = - ½ x + 4

$f(x) = {}^{1}/_{3}(x - 3)$

$f(x) = 2(x - 2)$

BAB VII PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Nurhardiani

Sub bab ini membahas tentang pengertian persamaan kuadrat, menemukan akar-akar persamaan kuadrat, diskriminan persamaan kuadrat, pengertian dari pertidaksamaan kuadrat, menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat.

Pengertian Persamaan Kuadrat

Persamaan Kuadrat adalah suatu pernyataan matematika terbuka yang menyatakan hubungan sama-dengan $(=)$ serta memuat satu variabel dengan pangkat positif dan tertinggi yaitu 2.Persamaan kuadrat memiliki bentuk umum, yaitu: $ax^2 + bx + c = 0$, dengan syarat a, b, dan c adalah bilangan riil dan $a \neq 0$. Keterangan dari bentuk umum persamaan kuadrat, x adalah variabel atau peubah, a adalah koefisien dari x^2, b adalah koefisien dari x, dan c adalah konstanta.

Contoh :

1. $\mathbf{3x^2 + 13x - 10 = 0}$, berdasarkan bentuk umum persamaan kuadrat contoh tersebut memenuhi syarat. Artinya persamaan tersebut memiliki, $a = 3 \neq 0$ adalah koefisien dari x^2, $b = 13$ adalah koefisien dari x , dan $c = -10$ adalah konstanta. Kemudian 3, 13, dan -10 adalah anggota bilangan riil.
2. $\mathbf{x^2 - 4 = 0}$. nilai $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$, Jika $b = 0$ maka bentuk persamaannya menjadi $ax^2 + c = 0$. Persamaan kuadrat dengan bentuk ini dinamakan **persamaan kuadrat sempurna**.
3. $\mathbf{2x^2 + 4x = 0}$. nilai $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$, Jika $c = 0$ maka bentuk persamaannya menjadi $ax^2 + bx = 0$. Persamaan kuadrat dengan bentuk ini dinamakan **persamaan kuadrat tak lengkap.**

Menemukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Cara mudah dalam **menyelesaikan persamaan kuadrat** adalah menentukan solusi atau pengganti variabel yang berupa nilai, sehingga persamaan tersebut bernilai benar.Nilai-

nilai yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut merupakan penyelesaian dari persamaan kuadrat yang dikenal dengan **akar persamaan kuadrat**.

Ada beberapa cara dalam menemukan akar-akar persamaan kuadrat, yaitu:

1. Memfaktorkan
2. Melengkapkan kuadrat sempurna (diubah bentuk menjadi kuadrat sempurna)
3. Menggunakan rumus akar kuadrat

A. Menemukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Cara Memfaktorkan

Untuk menemukan akar-akar persamaan kuadrat dapat menggunakan cara pemfaktoran. Pemfaktoran atau faktorisasi adalah menyatakan penjumlahan suku-suku bentuk aljabar menjadi bentuk perkalian faktor-faktor. Memfaktorkan persamaan kuadrat dengan cara membuat persamaan kuadrat menjadi perkalian dua persamaan linear. Cara ini memanfaatkan salah satu sifat yang berlaku dalam bilangan riil. Sifat itu dapat dinyatakan sebagai berikut:

Jika $a\,,\ b\ \in\ R$ (a dan b anggota himpunan bilangan riil) dan berlaku $a \times b = 0$. Maka nilai $a\ =\ 0$ atau nilai $b\ =\ 0$. Dengan syarat berikut:

1. Jika dimaknai nilai $a\ =\ 0$ dan nilai $b\ \neq\ 0$
2. Jika dimaknai nilai $b\ =\ 0$ dan nilai $a\ \neq\ 0$
3. Jika dimaknai nilai $a\ =\ 0$ dan nilai $b\ =\ 0$

Contoh soal dan pembahasan:

Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat berikut ini $\boldsymbol{x^2\ -\ 3x\ -\ 10\ =\ 0}$

Jawab:

Diketahui : $x^2\ -\ 3x\ -\ 10\ =\ 0$

Mencari akar-akar persamaan kuadrat dengan mengubah bentuk persamaan di atas, menjadi :$(x\ -\ 5)\ (x\ +\ 2)\ =\ 0$ (memfaktorkan dengan menggunakan salah satu sifat perkalian dua bilangan riil) dengan asumsi $(x\ -\ 5)\ =\ a$ dan $(x\ +\ 2)\ =\ b$

Sehingga menghasilkan nilai:$(x\ -\ 5)\ =\ 0$ atau $(x\ +\ 2)\ =\ 0$, $x\ =\ 5$ atau $x\ =\ -2$

Jadi, Penyelesaian atau akar-akarnya adalah $x_1 = 5$ dan $x_2 = -2$. Dalam bentuk himpunan penyelesaian dituliskan dengan, $HP = \{5, -2\}$.

B. Menemukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna (Diubah Bentuk Menjadi Kuadrat Sempurna)

Dalam menemukan akar-akar persamaan kuadrat melalui cara melengkapkan kuadrat sempurna dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengubah persamaan kuadrat semula menjadi bentuk berikut:$(x + p)^2 = q$ dengan syarat $q \geq 0$.
2. Menentukan akar – akar persamaan kuadrat$(x + p) = \pm\sqrt{q}, \quad x = \pm\sqrt{q} - p$

Contoh soal dan pembahasan:

Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat berikut ini $\boldsymbol{x^2 - 4x - 2 = 0}$

Jawab:

Langkah pertama :

Mengubah persamaan kuadrat semula menjadi bentuk persamaan kuadrat sempurna seperti berikut $(x + p)^2 = q$ dengan syarat $q \geq 0$.

$$x^2 - 4x - 2 + \mathbf{4} - \mathbf{4} = 0$$

$$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) - 2 - \mathbf{4} = 0$$

$$(x - 2)^2 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 6$$

Langkah kedua :

Menemukan akar – akar persamaan kuadrat$(x + p) = \pm\sqrt{q}$, $x = \pm\sqrt{q} - p$

$$(x - 2) = \pm\sqrt{6}$$

$$(x - 2) = \sqrt{6}\; atau\; (x - 2) = -\sqrt{6}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{6}\; atau\; x_2 = 2 - \sqrt{6}$$

Jadi, akar-akar penyelesaian persamaan kuadrat di atas adalah x_1 = 2 + √6 dan x_2 = 2 - √6.

Ditulis $HP = \{2 + \sqrt{6},\ 2 - \sqrt{6}\}$.

E. Menemukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Rumus Akar Kuadrat

Misalkan, a, b, dan c merupakan bilangan real dan $a \neq 0$. Maka, akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ditentukan oleh:

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} = \tfrac{0}{a}$$, kedua ruas dikali $\frac{1}{a}$

$$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{0}{a} - \frac{c}{a}$$

$$\leftrightarrow x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 = -\tfrac{c}{a} + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2$$, kedua ruas ditambah $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ untuk mengubah menjadi persamaan kuadrat sempurna

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\leftrightarrow x_{1.2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boldsymbol{x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Contoh soal dan pembahasan:

Carilah akar-akar dari persamaan kuadrat berikut ini $x^2 - 6x + 8 = 0$

Jawab:

Diketahui : berdasarkan persamaan kuadrat, maka diperoleh nilai $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$

$$x_{1.2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Jadi, akar-akarnya adalah $x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$ dan $x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Ditulis $HP = \{2, 4\}$.

F. Diskriminan Persamaan Kuadrat

Diskriminan adalah suatu nilai yang menjadi penentu sifat-sifat dari akar suatu persamaan kuadrat. Jadi jenis akar dari persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan cara mengetahui nilai diskriminan atau dapatdinotasikan dengan $\boldsymbol{D}$**.** Bentuk umum persamaan Diskriminan adalah $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac.}$

Jenis - jenis akar persamaan kuadrat berdasarkan nilai diskriminan sebagai berikut:

1. Jika nilai diskriminan lebih besar dari 0, $D > 0$, maka persamaan kuadrat mempunyai dua akar real yang berlainan.
    a. Jika *D* berbentuk kuadrat sempurna, maka **kedua akarnya rasional**.
    b. Jika *D* tidak berbentuk kuadrat sempurna, maka **kedua akarnya irrasional**.
2. Jika $D = 0$ maka akar persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang sama (akar kembar) real dan rasional.
3. Jika $D < 0$ maka persamaan kuadrat tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real (imajiner).

Contoh soal dan pembahasan:

Carilah nilai diskriminan dari persamaan kuadrat berikut ini $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Jawab:

Diketahui : $2x^2 - 5x + 2 = 0$, dengan nilai sebagai berikut:$a = 2, b = -5, c = 2$

Maka nilai diskriminannya adalah:

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-5)^2 - 4(2)(2)$$
$$D = 25 - 16$$
$$D = 9$$

Karena nilai $D > 0$ dan $D = 9 = 3^2$ berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat $2x^2 - 5x + 2 = 0$ mempunyai dua akar real yang berlainan dan rasional.

G. Jumlah dan Hasil Kali Akar - Akar Persamaan Kuadrat

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenari cara menemukan akar - akar persamaan kuadrat. Sedangkan pada pembahasan sub-bab ini akan menghitung jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat. Berdasarkan rumus akar kuadrat, memiliki akar-akar penyelesaian sebagai berikut $\boldsymbol{x_1} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dan $\boldsymbol{x_2} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

.

Maka rumus hasil jumlah akar-akar persamaan kuadrat adalah:

$$\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a},$$

sedangkan rumus hasil kali akar-akar persamaan kuadrat adalah:

$$\boldsymbol{x_1} \,.\, \boldsymbol{x_2} = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

H. Pengertian Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan Kuadrat didefinisikan sebagai suatu pernyataan matematika terbuka yang dihubungan dengan simbol pertidaksamaan ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$) serta memuat satu variabel dengan pangkat positif dan tertinggi yaitu 2.Pertidaksamaan kuadrat memiliki bentuk umum, yaitu: $ax^2 + bx + c > 0$ atau $ax^2 + bx + c < 0$ atau $ax^2 + bx + c \leq 0$ atau $ax^2 + bx + c \geq 0$dengan syarat a, b, dan c adalah bilangan riil dan $a \neq 0$. Keterangan dari bentuk umum pertidaksamaan kuadrat, x adalah variabel atau peubah, a adalah koefisien dari x^2, b adalah koefisien dari x,dan c adalah konstanta.

I. Menyelesaikan Pertidaksamaan dengan Menggunakan Garis Bilangan

Sub bab ini dibahas cara menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dengan menggunakan garis bilangan. Secara umum penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$ dapat ditentukan dengan menggunakan diagram garis bilangan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukanlah **pembuat nol yaitu akar-akar persamaan kuadrat** dengan cara mengubah tanda pertidaksamaan hingga menjadi “sama dengan”.
2. Gambarlah **pembuat nol pada garis bilangan**, Lalu tentukan tanda masing-masing interval dengan cara mensubstitusi sembarang bilangan yang ada pada tiap interval ke persamaan pada ruas kiri. Tulis $(+)$ jika hasil substitusi layak positif dan tulis $(-)$ jika hasil substitusi layak negatif. Tanda untuk setiap interval yaitu selalu memutar-seling

$(+)(-)(+)$ atau $(-)(+)(-)$, kecuali jika akar-akar yang didapat sama (kembar). Jika akar yang didapat berbeda, cukup cari tanda pada satu interval saja, sisa sisa yang ditulis berbeda-seling mengikuti pola diatas. Dahulukan interval yang memuat angka nol agar perhitungan lebih mudah (jika nol bukan pembuat nol)

3. Tentukanlah daerah penyelesaian atau arsiran.Untuk ketidaksamaan $">"\ atau\ "\geq"$, daerah penyelesaian yang berada pada interval bertanda positif $(+)$. Untuk pertidaksamaan "$<$" $atau$ "$\leq$", daerah pernyelesaian yang berada pada interval bertanda negatif $(-)$.
4. Tulis sebuah penyelesaian, yaitu interval yang memuat daerah penyelesaian. Himpunan penyelesaian ada pada ujung-ujung interval

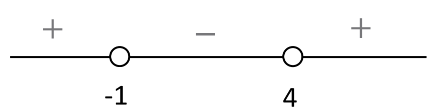
Sebagai contoh, temukan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat $x^2 - 3x - 4 > 0$ berikut.

Langkah - langkah yang diperlukan sebagai berikut:

1. Tentukanlah **pembuat nol yaitu akar-akar persamaan kuadrat** dengan cara mengubah tanda pertidaksamaan hingga menjadi "sama dengan"

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x + 1)(x - 4) = 0$$
$$x = -1\ atau\ x = 4$$

2. Gambarlah **pembuat nol pada garis bilangan**.



Kita harus menentukan tanda-tanda dalam interval untuk nilai-nilai x selain -1 dan 4, misalnya:

- $x = -2$ maka nilai dari $x^2 - 3x - 4 = (-2)^2 - 3(-2) - 4 = 6$ sehingga tanda dalam interval adalah $x < -1$, x anggota bilangan positif, atau $x > 0$.
- $x = 1$ maka nilai dari $x^2 - 3x - 4 = (1)^2 - 3(1) - 4 = -6$ sehingga tanda dalam interval $-1 < x < 4, 1, atau\ x < 0$
- $x = 5$ maka nilai dari $x^2 - 3x - 4 = (5)^2 - 3(5) - 4 = 6$ sehingga tanda dalam interval $x > 4, x\ bilangan\ positif, atau\ x > 0$.

3. Berdasar tanda-tanda interval, maka yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 3x - 4 > 0$ adalah $x < -1$ atau $x > 4$.

4. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{x | x < -1 \; atau \; x > 4, x \epsilon R\}$.

LATIHAN

1. Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat dari $5x^2 + 13x = 6$ dan hitunglah nilai Diskriminan dari persamaan kuadrat tersebut!
2. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah α dan β. Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya (α+2) dan (β+2)!
3. Persamaan $(m-1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar riil. Tentukan nilai m yang memenuhi!
4. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa $(p-q)^2 = \frac{b^2-4ac}{a^2}$!
5. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat $x.(3x+1) < (x+1)^2 - 1$!

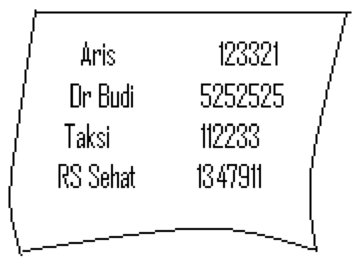
BAB VIII BARISAN DAN DERET

Samsul Irpan

Pada Bab ini membahas tentang konsep barisan dan deret yang terdiri dar: barisan bilangan, beberapa pola bilangan, deret, penerapan pola barisan dan deret.

A. Barisan Bilangan

Perhatikan contoh nomor telpon berikut



Kontrol dokter rutin seminggu sekali merupakan contoh lainnya. Bila kontrol pertama adalah tanggal 2, maka kontrol-kontrol berikutnya dapat dijadwal, yaitu tanggal 9, 16, 23, dst.

Contoh nomor-nomor telepon di atas ini mudah diingat karena masing-masing mempunyai pola bilangan tertentu. Suatu obyek yang berpola akan memberi kemudahan tertentu.

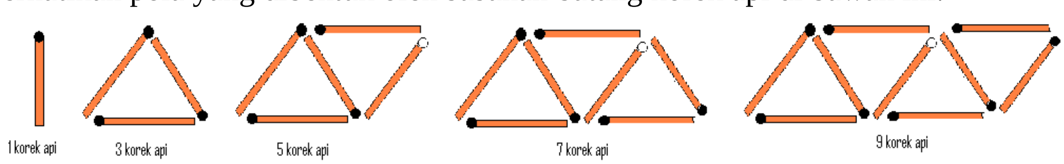
Contoh lain adalah masalah petumbuhan bakteri berikut ini merupakan satu contoh pertumbuhan berpola. Suatu bakteri berkembang biak dengan membelah diri menjadi 2 setiap menit. Setelah dua menit menjadi 4, setelah tiga menit menjadi 8, dan setelah empat menit menjadi 16. Jumlah perkembangan bakteri itu setiap menit membentuk barisan 2, 4, 8, 16, 32, . . .Dengan mengenali pola perkembangannya "*dua kali setiap menit*", maka dapat ditentukan dengan mudah berapa jumlah bakteri setiap waktunya.

Pada bagian berikut ini akan disajikan beberapa contoh pola bilangan beserta aturan pembentukkannya.

B. Beberapa pola bilangan

Pola Bilangan Ganjil

Perhatikan pola yang dibentuk oleh susunan batang korek api di bawah ini.



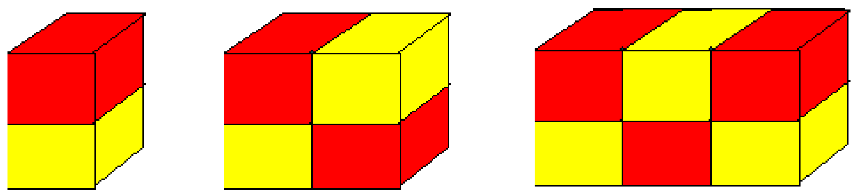
Pola susunan batang korek api ini dapat dinyatakan sebagai barisan

1, 3, 5, 7, 9, . . .

Aturan pembentukannya adalah " ditambah 2". Dengan aturan ini, maka dua suku berikutnya adalah 11 dan 13.

Pola Bilangan Genap

Perhatikan pola yang dibentuk oleh susunan lego di bawah ini.



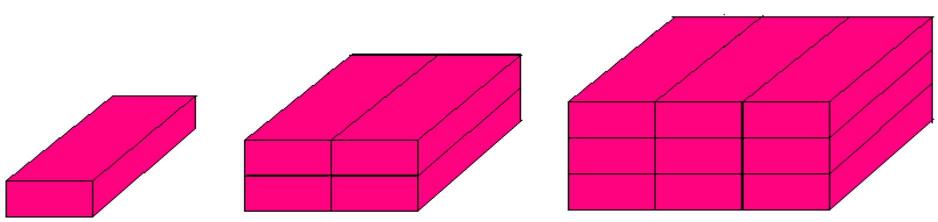
Pola sususan lego ini dapat dinyatakan oleh barisan

2, 4, 6, . . .

Aturan pembentukannya adalah "*ditambah 2*". Dua suku berikutnya, sesuai aturan ini, adalah 8 dan 10.

Pola Bilangan Persegi

Pola susunan batu bata di bawah ini



dapat dinyatakan sebagai barisan

1, 4, 9, . . .

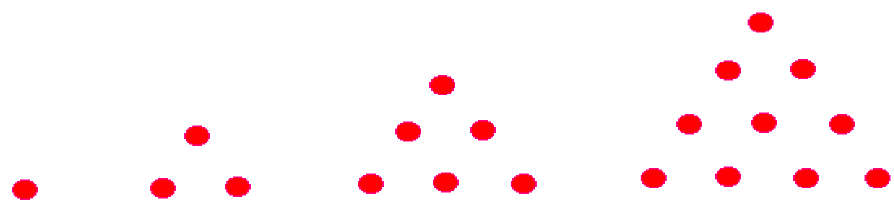
Aturan pembentukannya adalah "kuadrat dari posisi pola". Sehingga, dua suku berikutnya adalah 16 dan 25.

Pola bilangan Segitiga

Barisan bilangan segitiga adalah

1, 3, 6, 9, . . .

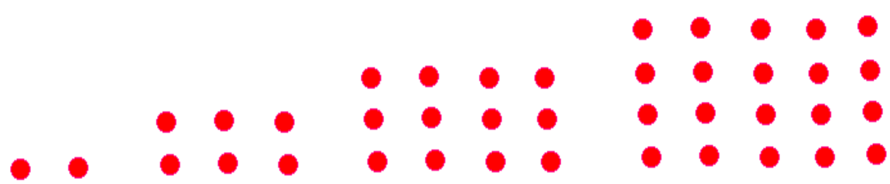
Barisan ini dapat digambarkan dalam pola titik yang membentuk segitiga berikut ini :



Aturan pembentukannya adalah " *tambahkan secara berurutan dengan 2, 3, 4, dan seterusnya*". Sehingga, dengan menambahkan 5 dan 6 pada suku sebelumnya, dua suku berikutnya adalah 15 dan 21.

Pola Bilangan persegi panjang

Pola susunan titik berikut ini:



menyatakan barisan persegi panjang, yaitu

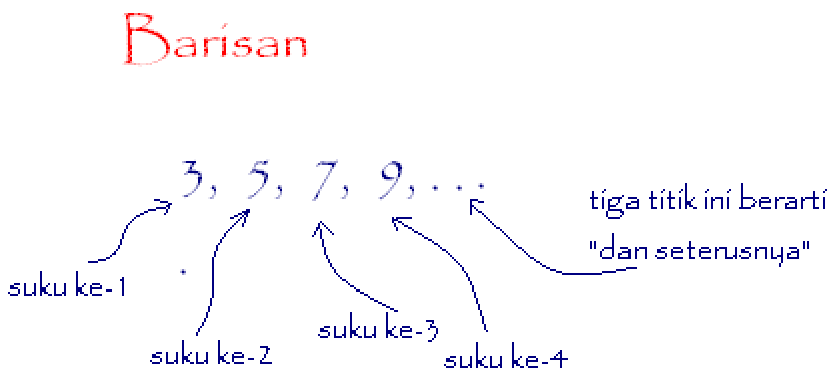
2, 6, 12, 20, . . .

Tiap suku barisan ini merupakan "hasil kali dua bilangan asli berurutan".

Dua suku berikutnya adalah 30 dan 42.

Pola-pola bilangan di atas adalah beberapa contoh pola bilangan yang telah dikenal secara umum. Tentu masih banyak lagi pola bilangan yang lain, termasuk diantaranya pola bilangan yang dapat kita susun sendiri.

Pola-pola di atas ada yang dapat dibentuk barisan bilangan. Barisan adalah sekumpulan bilangan yang tersusun dalam urutan tertentu dan dibentuk menurut aturan tertentu. Setiap bilangan yang menjadi unsur dari barisan disebut suku. Bilangan pertama disebut suku pertama, bilangan kedua disebut suku kedua, dan begitu seterusnya. Perhatikan ilustrasi berikut ini.



Bila suku-suku dari suatu barisan berlanjut terus, barisan itu disebut barisan tak hingga. Dan bila tidak demikian, yaitu berhenti pada satu suku tertentu, disebut barisan hingga.

Contoh

- 0, 1, 2, 3,4, 5, … adalah barisan takhingga, disebut barisan bilangan bulat tak negatip
- 1, 2, 3, 4, 5, … adalah barisan takhingga, disebut barisan bilangan asli.
- 0, 1, 2, 3, 4 adalah barisan hingga dengan 5 suku
- 1, 3, 5, 7 adalah barisan hingga dari 4 bilangan ganjil positip yang pertama
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . adalah barisan takhingga yang memiliki pola “ *suatu suku adalah jumlah dari dua suku sebelumnya*”, barisan seperti ini disebut **barisan Fibonachi**. Sehingga dua suku berikutnya adalah 13 dan 21.

Pada barisan urutan adalah penting dan mempunyai makna. Meskipun bilangan-bilangan penyusunnya sama tapi karena urutannya berbeda, kedua barisan berikut ini

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

2, 1, 4, 3, 6, 5, . . .

adalah berbeda. Urutan ini pula yang membedakan barisan dari himpunan. Pada barisan urutan diperhatikan, sedangkan pada himpunan urutan tak diperhatikan. Dua barisan diatas adalah berbeda, tetapi himpunan { 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .} dan {2, 1, 4, 3, 6, 5, . . .} adalah sama.

Untuk mengindikasikan tentang urutan pada barisan, pada notasi untuk suku barisan umumnya digunakan indeks. Suku ke-n dari barisan dilambangkan dengan $\mathbf{u_n}$. u_1 menyatakan suku ke-1, u_2 menyatakan suku ke-2, dan seterusnya. Sebagai contoh, pada barisan

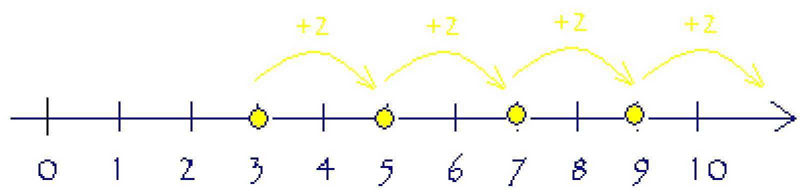
1, 3, 5, 7, …

$u_1 = 1$, $u_2 = 3$, dan $u_3 = 5$.

Selain urutan, hal penting dari barisan adalah aturan atau pola bilangan yang menyusun barisan tersebut. Mengenali pola bilangannya akan memungkinkan untuk menemukan rumus umum untuk suku ke-n. Rumus ini akan memberikan satu cara mudah untuk menentukan nilai dari setiap suku pada barisan tersebut.

Contoh:

Barisan 3, 5, 7, 9, … berawal dengan 3 dan melompat 2 setiap kali.



Aturan "*berawal dengan 3 dan melompat 2 setiap kali*" belum memberikan cara bagaimana memperoleh suku ke-10, suku ke-100, atau suku ke-n dengan n sebarang. Diperlukan rumus suku-n dengan n di dalamnya.

Berikut ini akan diberikan satu ilustrasi bagaimana menemukan rumus suku ke-n dari barisan pada contoh di atas. Pertama, kita lihat suku barisan itu bertambah 2 setiap kali, sehingga bisa diduga bahwa rumus suku ke-n mungkin "2 x n". Selanjutnya kita periksa rumus ini.

Memeriksa rumus: 2n

n	Suku	Memeriksa rumus
1	3	2n = 2x1 = 2

2	5	2n = 2x2 = 4
3	7	2n = 2x3 = 6

Nilai yang dihasilkan sudah mendekati, yaitu masing-masing kurang 1, sehingga kita rubah rumusnya menjadi 2n + 1.

Memeriksa rumus: 2n + 1

n	Suku	Memeriksa rumus
1	3	2n + 1 = 2x1 + 1 = 3
2	5	2n + 1 = 2x2 + 1 = 5
3	7	2n + 1 = 2x3 + 1 = 7

Hasilnya sesuai, sehingga rumus suku ke-n untuk barisan 3, 5, 7, 9, … adalah 2n + 1, atau dapat dinyatakan dengan $u_n = 2n + 1$.

C. Deret

Pada suatu permasalahan tertentu, dari suatu pola bilangan terkadang tidak cukup hanya memperoleh rumus suku ke-n barisan bilangannya, tetapi lebih lanjut ingin diketahui jumlah n suku pertamnya. Misalnya, pada kasus penataan kursi dalam beberapa baris, di mana jumlah kursi pada setiap baris mengikuti pola tertentu. Maka disamping ingin diketahui jumlah kursi pada suatu baris tertentu, juga ingin diketahui jumlah kursi dari baris terdepan sampai dengan baris tersebut. Untuk kepentingan yang kedua ini, perlu dibicarakan tentang deret.

Deret adalah jumlah suku-suku yang berurutan dari suatu barisan.

Bila u_1, u_2, u_3, u_4, u_5,. . .satu barisan, jumlah n suku pertama dilambanglan dengan S_n , sehingga jumlah 1 suku, 2 suku, 3 suku pertamanya masing-masing adalah

$$S_1 = u_1$$

$S_2 = u_1 + u_2$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$

Dan secara umum, jumlah na suku pertamannya adalah

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 + . . . + u_{n.}$

Contoh:

Pada barisan bilangan persegi, yaitu 1, 4, 9, . . . maka beberapa jumlah suku pertamanya adalah

$S_1 = 1 = 1$

$S_2 = 1 + 4 = 5$

$S_3 = 1 + 4 + 9 = 14$

$S_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

$S_5 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$

Dari contoh ini juga terlihat bahwa pada dasarnya deret dari suatu barisan juga merupakan barisan, yaitu berbentuk

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, . . .$

yang pada contah di atas adalah barisan 1, 5, 14, 30, 55, . . .

D. Penerapan Barisan dan Deret Bilangan

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan barisan dan deret bilangan. Dalam masalah seperti ini, menemukan pola atau rumusnya adalah menjadi kunci untuk dapat menyelesaikan masalah tersebut. Cara induksi bisa dijadikan alternatif untuk menemukan pola atau rumus tersebut.

Contoh:

Dalam suatu aula, sejumlah kursi ditata dalam beberapa baris. Pada baris pertama terdapat 20 kursi. Setiap baris berikutnya memuat dua kursi lebih banyak dari baris sebelumnya. Jika dalam aula tersebut ada 20 baris kursi, maka (a) berapakah banyaknya orang yang dapat duduk di kursi di baris ke 20, dan (b) berapakah banyaknya orang yang dapat duduk di kursi di aula tersebut.

Penyelesaian:

- Terlebih dahulu dihitung banyak kursi untuk baris pertama, kedua dan ketiga, dan kemudian digunakan untuk merumuskan banyak kursi pada baris ke-n melalui cara induksi, seperti disajikan dalam tabel berikut:

n	Banyak kursi pada baris ke-n	Pola
1	20 = 20	20 = 20 + 0 = 20 + 2(1 – 1)
2	20 + 2 = 22	22 = 20 + 2 = 20 + 2(2 – 1)
3	22 + 2 = 24	24 = 20 + 4 = 20 + 2(3 – 1)
4	24 + 2 = 26	26 = 20 + 6 = 20 + 2(4 – 1)
…	……	20 + 2(n – 1)
n	u_n	

Diperoleh banyaknya kursi pada baris ke-n adalah 20 + 2(n – 1). Sehingga, banyaknya kursi pada baris ke 20 adalah 20 + 2(20 – 1) = 58 kursi.

- Terlebih dahulu dihitung banyak kursi untuk 1, 2, 3, dan 4 baris terdepan, dan kemudian digunakan untuk merumuskan banyak kursi pada baris ke-n melalui cara induksi, seperti disajikan dalam tabel berikut

n	Banyak kursi pada n baris terdepan	Pola
1	20 = 20	20 = 1(20 + 0) = 1(19 + 1)
2	20 + 22 = 42	42 = 2(20 + 1) = 2(19 + 2)
3	42 + 24 = 66	66 = 3(20 + 2) = 3(19 + 3)
4	66 + 26 = 92	92 = 4(20 + 3) = 4(19 + 4)
…	……	
n	S_n	4(19 + n)

Dari tabel di atas terlihat bahwa banyaknya kursi pada n baris terdepan adalah 4(19 + n).

LATIHAN

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1. Untuk masing, masing barisan berikut ini, tuliskan tiga suku berikutnya!
   a. 4, 7, 10, 13, ...
   b. 1, 8, 27, 64, ...
   c. ½, 1, $\frac{3}{2}$, 4, ...
2. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan berikut ini!
   a. 7, 12, 17, 22, ...
   b. 0, 3, 8, 15, ...
   c. 3, 9, 27, 81, ...
3. Tentukan lima suku pertama dari barisan dari aturan suku ke-n berikut! Kemudian buatlah deretnya!
   a. 3n – 2
   b. $n^2 + 1$
   c. 4^n

BAB IX

GEOMETRI

Sofyan Mahfudy

Pada Bab ini membahas tentang konsep geometri yang mencakup: titik, sinar, sudut dan bangun datar (segitiga dan segiempat).

Geometri Dasar: Titik, Garis, Sudut dan Bangun Datar

Dalam struktur geometri modern, terdapat istilah-istilah yang telah disepakati dan menjadi pedoman bagi semua orang yang ingin mempelajari geometri.
Istilah-istilah dalam Geometri antara lain adalah:

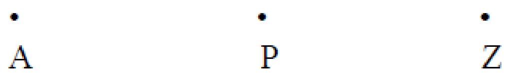
1) Unsur yang tidak didefinisikan (unsur primitif)
2) Unsur yang didefinisikan
3) Aksioma atau postulat
4) Teorema

Unsur yang tidak didefinisikan atau pengertian pangkal adalah konsep primitif yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya. Dalam Geometri, unsur yang tidak didefinisikan (*undefined terms of Geometry*) meliputi titik (*point*), garis (*line*), dan bidang (*plane*). Apabila kita (misalnya) memaksakan untuk membuat suatu definisi untuk unsur primitif tersebut, maka akan terjadi pendefinisian yang berulang. Misalnya kita (memaksakan) membuat definisi untuk titik. Titik adalah sesuatu yang menempati tempat. Maka kita harus mendefiniskan lagi apa itu "sesuatu yang menempati tempat". Selanjutnya "sesuatu yang menempati tempat" (misalnya) didefinisikan "noktah yang terletak pada bidang". Selanjutnya kita perlu mendefinisikan tentang apa itu "noktah", dan seterusnya. Sehingga dalam suatu definisi terdapat definisi lagi dan seterusnya sehingga akan berputar atau berulang. Oleh karena itu, semua konsep yang memiliki sifat demikian dimasukkan ke dalam kategori unsur yang tidak terdefinisi atau unsur primitif.

Titik (*Point*)

Dalam geometri, titik adalah konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran, tidak mempunyai berat, atau tidak mempunyai panjang, lebar, atau ketebalan. Titik hanya memiliki kedudukan/letak (*a point has position only*). Titik adalah ide atau gagasan abstrak yang hanya ada dalam benak orang yang memikirkannya. Untuk melukiskan atau menggambarkan titik diperlukan simbol atau model. Representasi titik adalah berupa noktah (*dot*).

Gambar atau model sebuah titik biasanya diberi nama. Nama untuk sebuah titik umumnya menggunakan huruf kapital yang diletakan dekat titik tersebut, misalnya seperti contoh di bawah ini adalah titik A, titik P, dan titik Z.



Melukis atau menggambar sebuah titik dapat menggunakan ujung benda, misalnya dengan ujung pensil, pena, jangka, atau kapur yang ditekan pada bidang tulis atau permukaan kertas atau papan tulis. Apabila anda menekankan ujung pensil pada permukaan kertas maka dot/noktah hitam yang membekas pada permukaan kertas tersebut adalah titik. Namun, perlu diingat bahwa dot/noktah dapat mereprsentasikan/mewakili suatu titik tetapi sebenarnya bukan suatu titik. Sama seperti dot/noktah pada suatu map (peta) yang dapat mewakili suatu daerah/tempat/lokasi tetapi bukan merupakan lokalitas. Sebuah dot/noktah tidak seperti titik, ia memiliki ukuran sementara titik tidak memiliki ukuran/dimensi.

Garis (*Line*)

Garis adalah ide atau gagasan abstrak yang bentuknya memanjang ke dua arah, tidak terbatas atau tidak bertitik akhir, dan tidak memiliki lebar atau ketebalan (*a line has length but has no width or thickness*). Mengambar model garis misanya dapat dilakukan dengan membuat goresan alat tulis pada bidang tulis, kertas, atau papan tulis dengan bentuk yang lurus. Model garis diberi tanda anak panah pada kedua ujungnya yang menandakan bahwa garis tersebut memanjang kedua arah (tidak mempunyai titik akhir). Suatu garis ditunjukkan dengan huruf kapital dari dua titiknya atau dengan huruf kecil. Garis AB dilambangkan/dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{AB}$).

Sinar Garis (*ray*)

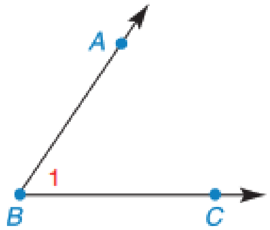
Sinar garis adalah kumpulan titik yang merupakan gabungan dari titik tertentu pada suatu garis dan semua titik pada garis itu yang terletak pada pihak yang sama (pada arah yang tidak berlawanan) dari titik tertentu tersebut. Lambang dari sinar garis yang titik pangkalnya A dan salah satu titik yang lainnya adalah B adalah $\overrightarrow{AB}$.

Ruas atau segmen Garis (*line segment*)

Ruas garis adalah himpunan titik dari suatu garis yang terdiri dari titik A dan B dan titik-titik yang terletak antara titik A dan B tersebut. Titik A dan titik B disebut titik-titik ujung ruas garis. Perlu diingat ruas garis AB dilambangkan dengan $\overline{AB}$.

Sudut (*angle*)

Sudut (notasi $\angle$) adalah gabungan dua sinar garis yang titik pangkalnya bersekutu/berserikat

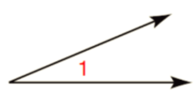


Sudut di atas dapat disebut $\angle$ABC atau $\angle$CBA atau $\angle$B atau $\angle$1. $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ disebut sisi sudut B (*side of the angle B*). B disebut titik sudut (*vertex of the angle*). Ukuran sudut adalah merupakan fungsi dari himpunan sudut ke himpunan bilangan riil R. Selanjutnya ukuran $\angle$A dinotasikan dengan $u\angle A$ atau $m\angle A$ yang terletak diantara 0 dan 180. Dalam prakteknya, kita sering menggunakan satuan sudut dengan satuan derajat. Misalnya $u\angle B = 60^o$

Jenis-jenis sudut berdasarkan ukurannya

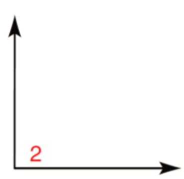
a. Sebuah sudut yang memiliki ukuran kurang dari 90^o disebut dengan sudut lancip (*acute angle*)

   $m\angle 1 = 23°$

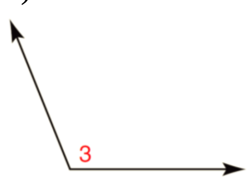
b. Jika ukuran suatu sudut tepat 90^o, maka sudut tersebut merupakan sudut siku-siku (*right angle*)

   $m\angle 2 = 90°$

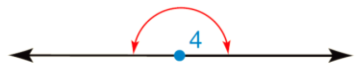
c. Jika ukuran suatu sudut antara 90^o and 180^o, maka sudut tersebut merupakan sudut tumpul (*obtuse angle*)

   $m\angle 3 = 112°$

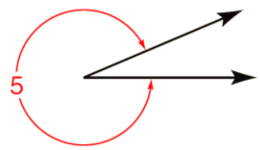
d. Suatu sudut dengan ukuran tepat 180º disebut dengan sudut lurus (*straight angle*). Atau sudut lurus adalah sudut yang sisi-sisinya (kaki-kaki sudutnya) membentuk sinar garis yang berlawanan atau garis lurus (*a straight line*)

$m\angle 4 = 180°$

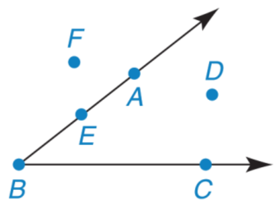


e. Sudut reflek (*reflex angle*) adalah sudut dengan ukuran antara 180º and 360º

$m\angle 5 = 337°$

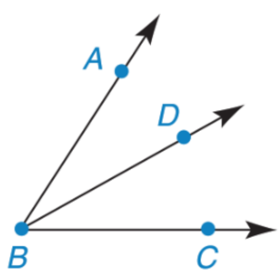


Kedudukan titik terhadap suatu sudut



Gambar menunjukkan ∠ABC dengan titik-titik D, E, dan F. Titik D terletak di interior ∠ABC. Titik E terletak pada ∠ABC. Titik F terletak di eksteriror ∠ABC.

Postulat: Jika titik D terletak pada interior sudut ABC (sebagaimana gambar di bawah), maka $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$



Definisi: Dua sudut adalah bersisian (*adjacent*) jika keduanya memiliki titik sudut yang sama dan kaki sudut bersama yang terletak diantara keduanya.

Pada gambar di atas ∠ABD dan ∠DBC adalah bersisian (*adjacent*), sedangkan ∠ABC dan ∠ABD tidak bersisian. Berikan alasan mengapa ∠ABC dan ∠ABD tidak bersisian

Definisi: Dua sudut disebut kongruen jika keduanya memiliki ukuran (besar) sudut yang sama Jika ∠A memiliki ukuran yang sama dengan ∠B, maka ∠A kongruen dengan ∠B (dinotasikan dengan ∠A ≅∠B. Sehingga pernyataan ∠A ≅∠B memiliki arti $m\angle A = m\angle B$

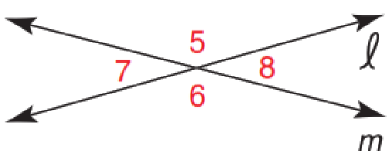
Definisi: Dua sudut disebut berkomplemen (*complementary*) jika jumlah ukuran keduanya adalah 90^o. Sudut yang menjadi pasangan pada sudut-sudut yang berkomplemen disebut sebagai komplemen (*complement*) sudut yang lainnya.
Contoh: Diketahui $m\angle P = 65^o$ dan $m\angle Q = 25^o$. Maka $\angle P$ dan $\angle Q$ kita sebut sudut-sudut yang berkomplemen. Selanjutnya $\angle P$ kita sebut sebagai komplemen $\angle Q$ dan sebaliknya $\angle Q$ merupakan komplemen $\angle P$.

Definisi: Dua sudut disebut bersuplemen (*supplementary*) jika jumlah ukuran keduanya adalah 180^o. Sudut yang menjadi pasangan pada sudut-sudut yang berkomplemen disebut sebagai komplemen (*supplement*) sudut yang lainnya.
Contoh: Diketahui $m\angle P = 105^o$ dan $m\angle Q = 75^o$. Maka $\angle P$ dan $\angle Q$ kita sebut sudut-sudut yang bersuplemen. Selanjutnya $\angle P$ kita sebut sebagai suplemen $\angle Q$ dan sebaliknya $\angle Q$ merupakan suplemen $\angle P$.

Latihan (Problem 1)
Buktikanlah masing-masing pernyataan (**Teorema**) berikut:

1. Jika dua sudut berkomplemen pada sudut yang sama, maka keduanya kongruen
2. Jika dua sudut bersuplemen pada sudut yang sama, maka keduanya kongruen
3. Jika dua sudut berkomplemen pada dua sudut yang kongruen, maka keduanya kongruen
4. Jika dua sudut bersuplemen pada dua sudut yang kongruen, maka keduanya kongruen

Definisi: Sudut bertolak belakang (*vertical angle*) adalah dua sudut yang terbentuk dari dua garis saling berpotongan, dengan kedudukan tidak bersisian atau posisi yang berlawanan.
Pergatikan gambar berikut!

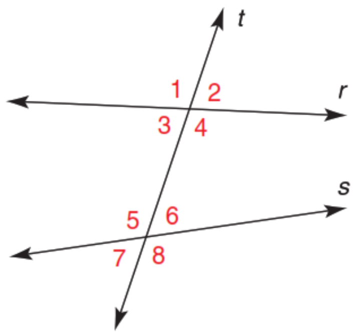


Dari gambar di atas tersebut, $\angle 5$ bertolak belakang dengan $\angle 6$ dan $\angle 7$ bertolak belakang dengan $\angle 8$

Teorema: "Besar sudut dari sudut-sudut yang bertolak belakang ada kongruen"
Bukti Teorema tersebut sebagai **Latihan untuk pembaca (Problem 2)**
Petunjuk: Gunakan kaidah sudut-sudut yang saling bersuplemen.

Garis Transversal

Garis transversal adalah sebuah garis yang memotong dua (atau lebih) garis lainnya pada titik yang berlainan. Garis-garis tersebut terletak pada bidang yang sama.



Pada gambar di atas, garis t adalah garis transversal untuk garis r dan s. Sudut yang terbentuk antara r dan s disebut sudut dalam (*interior angles*) → ∠3, ∠4, ∠5, ∠6. Sedangkan di luar r dan s disebut sudut luar (*exterior angles*) → ∠1, ∠2, ∠7, ∠8

Dari gambar di atas, pasangan sudut sehadap (*corresponding angles*) adalah ∠1 dan ∠5; ∠2 dan ∠6; ∠3 dan ∠7; ∠4 dan ∠8

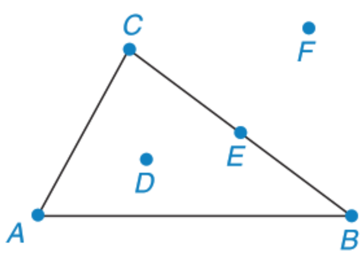
Pasangan sudut dalam berseberangan (*alternate interior angles*) adalah ∠3 dan ∠6; ∠4 dan ∠5

Pasangan sudut luar berseberangan (*alternate exterior angles*) adalah ∠1 dan ∠8; ∠2 dan ∠7

Bangun datar

Segi tiga

Suatu segitiga (disimbolkan dengan △) adalah gabungan tiga segmen garis yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak kolinear (tidak segaris)



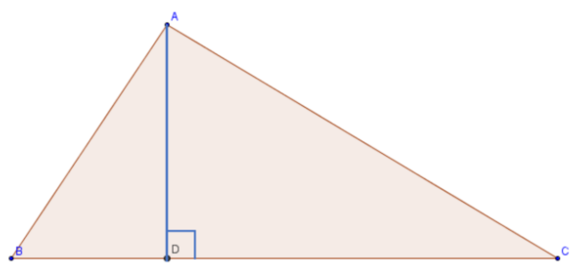
Pada gambar di atas, masing-masing titik A, B, dan C disebut titik sudut △ ABC (*vertex of triangle*). Segmen-segmen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$ disebut sisi-sisi △ ABC (*side of triangle*). Titik D berada di interior △ ABC, titik E terletak pada △ ABC, dan titik F terletak di eksterior △ ABC

Garis-garis istimewa pada segitiga

Garis-garis istimewa pada segitiga merupakan garis (sebenarnya segmen garis) pada segitiga yang memiliki karakteristik khusus. Garis-garis istimewa pada segitiga ini antara garis tinggi, garis bagi, garis berat, dan garis sumbu.

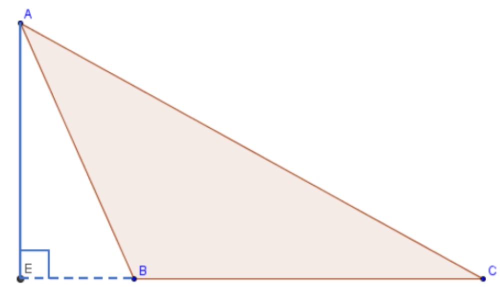
Garis tinggi segitiga (*altitude of triangle*)

Garis tinggi segitiga adalah segmen garis yang menghubungkan titik sudut pada segitiga dengan proyeksi titik tersebut pada sisi (atau perpanjangan sisi) di hadapannya. Boleh juga dikatakan, garis tinggi adalah segmen garis yang ditarik dari titik sudut suatu segitiga tegak lurus dengan sisi (atau perpanjangan sisi) dihadapannya. Setiap segitiga memiliki 3 garis tinggi yang konkuren (ketiganya berpotongan di satu titik).



$\overline{AD}$ garis tinggi $\triangle ABC$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

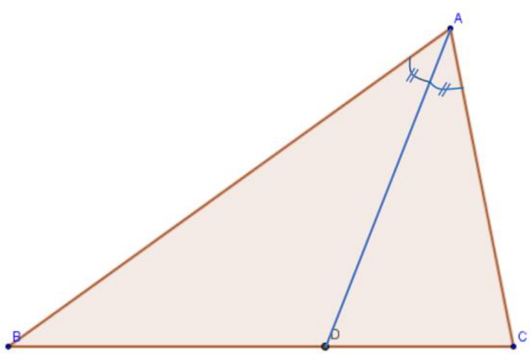


$\overline{AE}$ garis tinggi ΔABC

$\overline{AE} \perp$ perpanjangan $\overline{CB}$

Garis bagi segitiga (*angle bisector of triangle*)

Garis bagi segitiga adalah segmen garis yang membagi sudut suatu segitiga sama besar (kongruen) dan terhubung dengan sisi di hadapannya. Setiap segitiga memiliki 3 garis bagi yang konkuren (ketiganya berpotongan di satu titik).

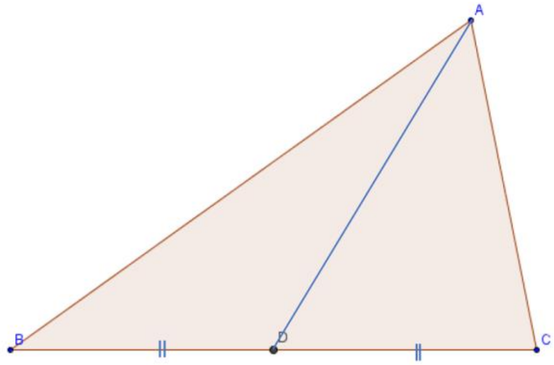


$\overline{AD}$ garis bagi $\triangle ABC$

Sehingga $\angle BAD \cong \angle DAC$

Garis berat (*medians*)

Garis berat adalah segmen garis yang menghubungkan titik suatu sudut segitiga dengan titik tengah sisi di hadapannya. Setiap segitiga memiliki 3 garis berat yang konkuren (ketiganya berpotongan di satu titik).

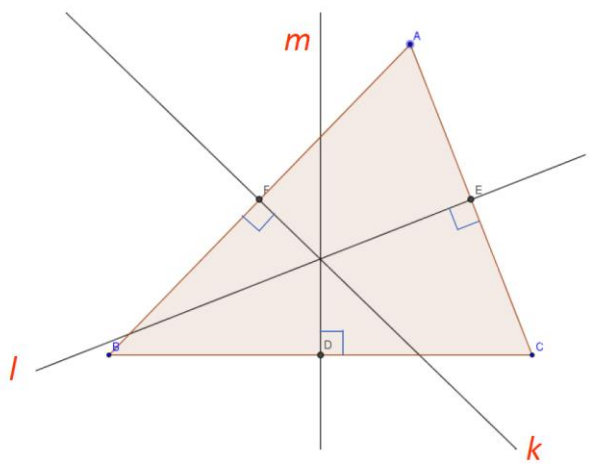


$\overline{AD}$ garis berat $\triangle ABC$

Sehingga $\overline{BD} \cong \overline{DC}$

Garis sumbu (*perpendicular bisector*)

Garis sumbu adalah garis yang melalui titik tengah sisi segitiga dan tegak lurus dengannya
Setiap segitiga memiliki 3 garis sumbu yang konkuren (ketiganya berpotongan di satu titik).



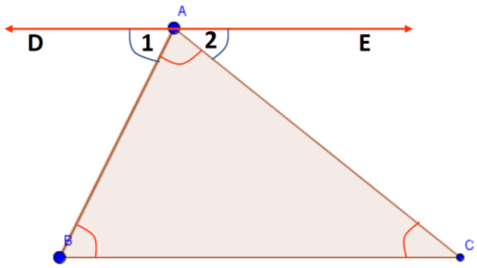
k, *l*, dan *m* garis sumbu $\triangle ABC$ sehingga $\overline{BD} \cong \overline{DC}$; $\overline{CE} \cong \overline{EA}$; dan $\overline{AF} \cong \overline{FB}$

$k \perp \overline{AB}$; $l \perp \overline{AC}$ dan $m \perp \overline{BC}$

Beberapa Teorema pada Segitiga

Teorema: Pada sembarang $\triangle ABC$, buktikan bahwa $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^o$

Bukti:



Dapat dikonstruksi $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ [melalui sebuah titik di luar garis dapat dibuat sebuah garis sejajar garis yang diberikan-postulat 10]

Diperoleh $\angle 1 \cong \angle B$ dan $\angle 2 \cong \angle C$ [jika 2 garis sejajar dipotong transversal, maka sudut2 dalam berseberangannya kongruen]

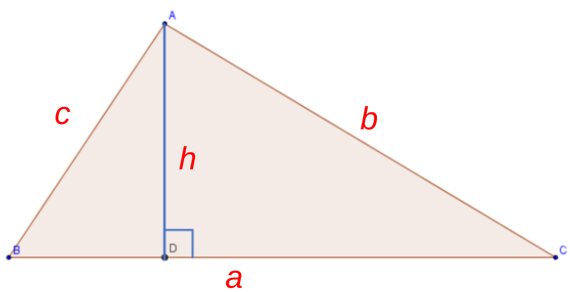
Sehingga $m\angle 1 = m\angle B$ dan $m\angle 2 = m\angle C$ [definisi 2 sudut yang kongruen]

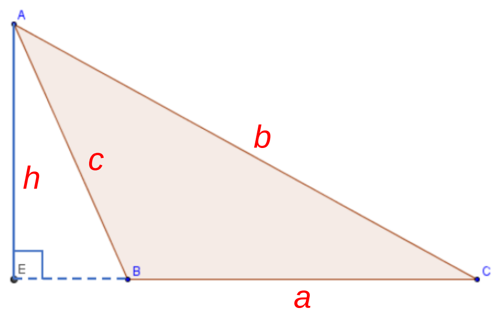
Padahal $m\angle 1 + m\angle A + m\angle 2 = 180^o$ [$\angle$DAE sudut lurus]

$m\angle B + m\angle A + m\angle C = 180^o$ [substitusi]

Terbukti

Luas Segitiga





Luas$\triangle$ABC = $\frac{1}{2}ah$

Keliling $\triangle$ABC = $a + b + c$

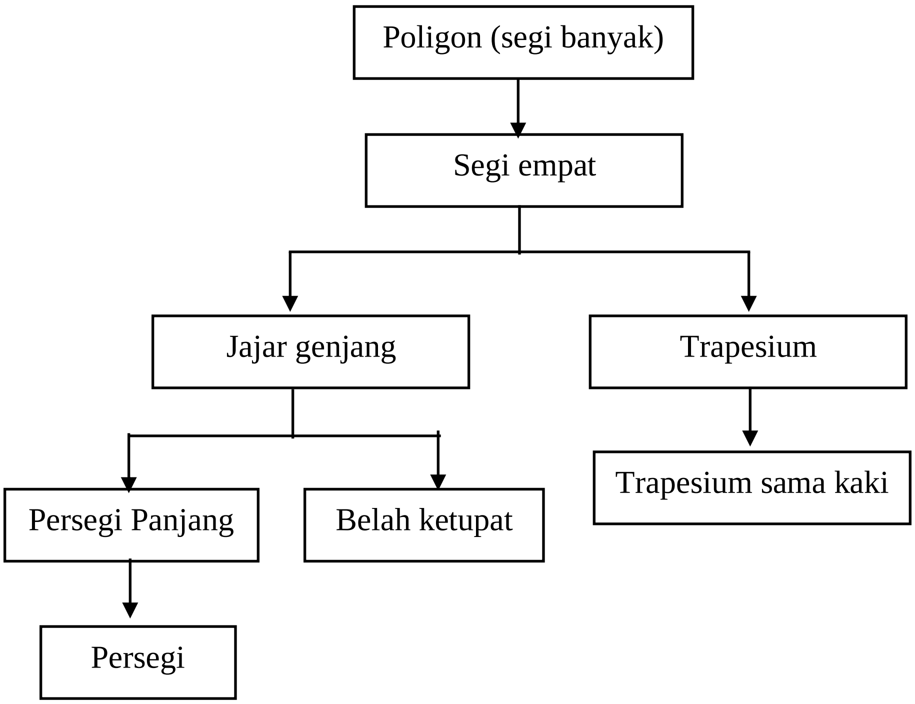
Teorema Pythagoras

"Pada segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring (*hypotenuse*) adalah sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi siku-sikunya"

Bukti: Bukti Teorema Pythagoras cukup banyak dan salah satunya menjadi Latihan bagi pembaca yaitu pada **Problem 3**

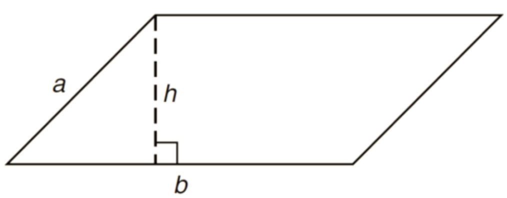
Segi empat

Suatu segi empat adalah poligon yang bersisi empat. Alur pada diagram berikut menunjukkan pendefinisian objek-objek dasar geometri bidang berbentuk segiempat.



Definisi segi empat, rumus luas dan kelilingnya

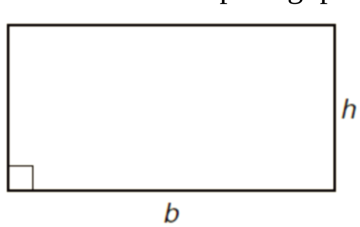
a. Jajar genjang (*parallelogram*) adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sejajar Perhatikan sketsa jajar genjang di bawah ini!



Rumus untuk keliling (K) dan luas (L) jajar genjang adalah

$K = 2a + 2b$ dan $L = bh$

b. Persegi panjang (*rectangle*) adalah jajar genjang yang salah satu sudutnya siku-siku Perhatikan sketsa persegi panjang di bawah ini!

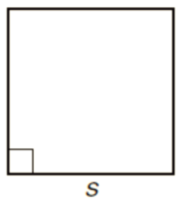


Rumus untuk keliling (K) dan luas (L) persegi panjang adalah

$K = 2b + 2h$ dan $L = bh$

c. Persegi atau bujur sangkar (*square*) adalah persegi panjang dengan dua sisi yang bersisihan kongruen

Perhatikan sketsa persegi panjang di bawah ini!

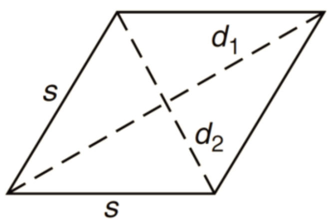


Rumus untuk keliling (K) dan luas (L) persegi adalah

$K = 4s$ dan $L = s^2$

d. Belah ketupat (*rhombus*) adalah jajar genjang dengan dua sisi bersisihannya kongruen

Perhatikan sketsa belah ketupat di bawah ini!

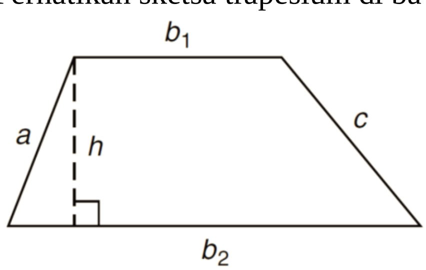


Rumus untuk keliling (K) dan luas (L) belah ketupat adalah

$K = 4s$ dan $L = \frac{1}{2}d_1 d_2$

e. Trapesium (*trapezoid*) adalah segi empat yang mempunyai satu dan hanya satu pasang sisi yang sejajar

Perhatikan sketsa trapesium di bawah ini!



Rumus untuk keliling (K) dan luas (L) trapesium adalah

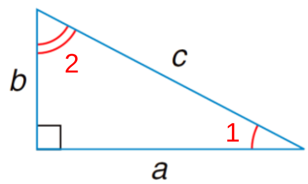
$K = a + b_1 + c + b_2$ dan $L = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

Latihan

Problem 3

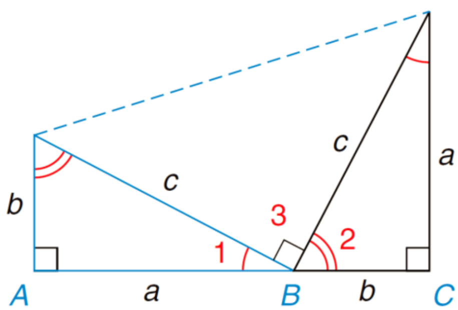
Jawab dan lengkapilah bukti Pythagoras berikut dengan menggunakan konsep hubungan sudut dan luas

Langkah 1



Diberikan segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b, c sebagaimana gambar di atas. Bagaimana hubungan antara $\angle 1$ dan $\angle 2$? (apakah saling bersuplemen atau saling berkomplemen?)
Berikan alasan atau argumentasi matematis terhadap jawaban Anda!

Langkah 2



Selanjutnya dengan mentransformasi segitiga sebagaimana gambar di atas (titik A, B, C segaris/*collinear*), maka buktikan bahwa $\angle 3$ merupakan sudut siku-siku!

Langkah 3

Dengan melihat konstruksi pada Langkah 2, terbentuk suatu Trapesium siku-siku. Selanjutnya dengan menggunakan konsep luas Trapesium lengkapilah titik-titik berikut!

Luas Trapesium $= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

$= \frac{1}{2}(\ldots + \cdots)(a + b)$

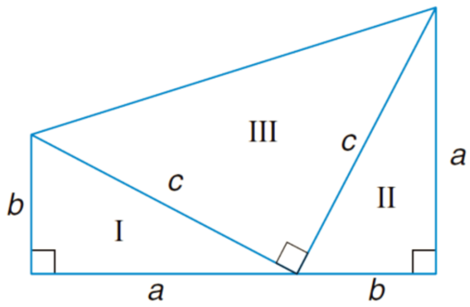
$= \frac{1}{2}(\ldots + b)^2$

$= \frac{1}{2}(a^2 + \ldots + b^2)$

$= \frac{1}{2}a^2 + \cdots + \cdots$

Langkah 4

Konstruksi pada Langkah 2 disajikan kembali dengan sketsa/konstruksi berikut. Selanjutnya dengan menggunakan konsep luas segitiga lengkapilah titik-titik berikut!



Luas Trapesium = Luas △I + Luas △II + Luas △III

$$= \frac{1}{2}\, ab + \dots + \dots$$

$$= ab + \dots$$

Langkah 5

Luas Trapesium pada Langkah 3 sama dengan Luas Trapesium Langkah 4, sehingga diperoleh

$\frac{1}{2}a^2 + \cdots + \cdots = ab + \dots$

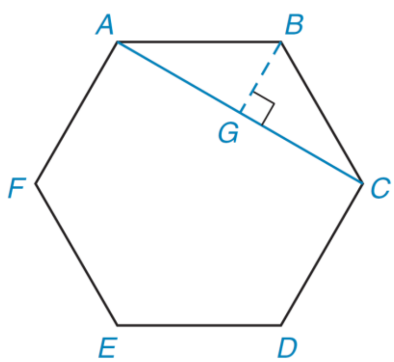
$$\frac{1}{2}a^2 + \cdots = \cdots$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Terbukti

Problem 4

Diberikan segi enam beraturan ABCDEF sebagaimana gambar di bawah ini. Jika panjang sisi segi enam tersebut adalah 6 cm dan AC adalah diagonal, maka tentukan luas segi AFEDC.

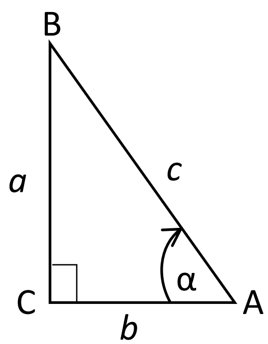


BAB X TRIGONOMETRI

Kiki Riska Ayu Kurniawati

Trigonometri merupakan nilai perbandingan sisi-sisi pada sebuah segitiga sembarang maupun segitiga siku-siku. Adapun keenam perbandingan trigonometri yaitu sinus (sin α), kosinus (cos α), tangen (tan α), kosekan (cosec α), sekan (sec α) dan kotangen (cot α). Pada pembahasan disini, akan lebih banyak dibicarakan terkait segitiga siku-siku, terutama unsur-unsur pada segitiga siku-siku yang terkait langsung dengan perbandingan trigonometri.

A. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-siku



Gambar di samping adalah segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah *a*, panjang sisi di hadapan sudut B adalah *b*, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah *c*.

Perhatikan sudut α!

Sisi *a* disebut sisi siku-siku di depan sudut α atau juga biasa disebut proyektor

Sisi *b* disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudut α atau juga biasa disebut proyeksi

Sisi *c* (sisi miring) disebut hipotenusa atau juga biasa disebut proyektum

Berdasarkan keterangan tersebut, didefinisikan 6 (enam) perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut.

1. $\sin\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat (berimpit) sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{a}{b}$

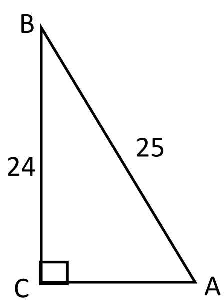
4. $\csc\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$

5. $\sec\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{c}{b}$

6. $\cot\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$

Contoh 1.

Pada gambar berikut segitiga siku–siku ABC dengan panjang a= 24 dan c= 25.



Tentukan perbandingan trigonometri untuk fungsi sin α, cos α, dan tan α.

Penyelesaian:

Nilai b dihitung dengan teorema Pythagoras

$b = \sqrt{25^2 - 24^2}$

$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49} = 7$

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{24}{25}$

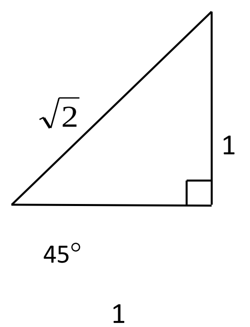
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{7}{25}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{24}{7}$

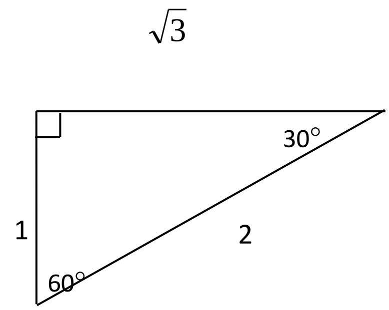
B. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa

Sudut istimewa adalah sudut yang perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator, yaitu sudut 0°, 30°, 45°,60°, dan 90°. Sudut-sudut istimewa yang akan dipelajari adalah 30°, 45°,dan 60°.

Untuk mencari nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa digunakan segitiga siku-siku seperti gambar berikut.



Gambar 1.a. Sudut Istimewa



Gambar 1.b. Sudut Istimewa

Dari gambar 1.a dapat ditentukan:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Selanjutnya, dari gambar 1.b dapat ditentukan:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka tabel nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa disajikan pada tabel berikut.

Perbandingan Trigonometri	*Sudut-sudut istimewa*				
	0^0	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

Contoh 2.

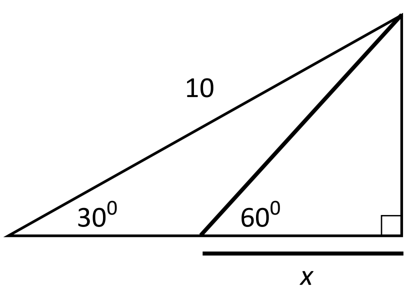
1. $\sin 30° + \cos 45° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin 45° \tan 60° + \cos 45° \cot 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$

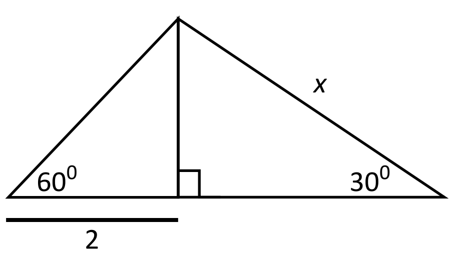
$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6} = \frac{4}{6}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

3. Hitunglah nilai x pada gambar berikut.

a.



b.



Penyelesaian:

a. $\sin \alpha = \frac{y}{10}$

$\sin 30° = \frac{y}{10}$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{10}$$

$2y = 10 \rightarrow y = 5$

selanjutnya $\tan 60° = \frac{y}{x}$

$\sqrt{3} = \frac{5}{x}$

$x = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b. $\tan \alpha = \frac{y}{2}$

$\tan 60° = \frac{y}{2}$

$\sqrt{3} = \frac{y}{2}$

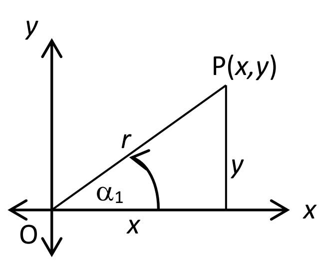
$y = 2\sqrt{3}$

Selanjutnya $\sin 60° = \frac{y}{x}$

$\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$

$x = 2$

C. Perbandingan Trigonometri suatu Sudut di Berbagai Kuadran



Gambar 2.

P adalah sembarang titik di kuadran I dengan koordinat (x,y). OP adalah garis yang dapat berputar terhadap titik asal O dalam koordinat kartesius, sehingga ∠XOP dapat bernilai 0° sampai dengan 90°. Perlu diketahui bahwa

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ dan } r > 0$$

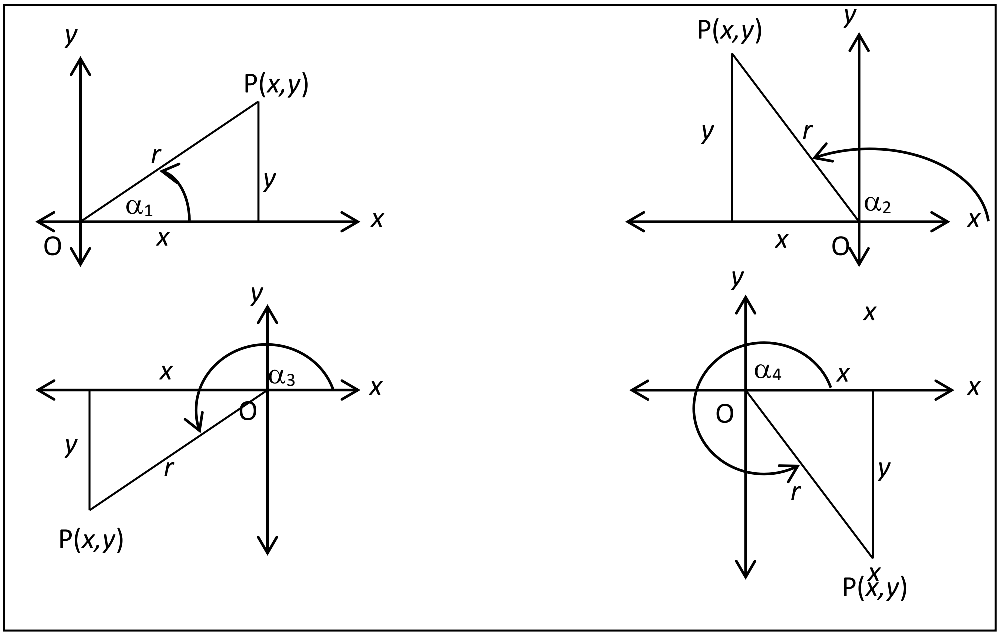
Berdasarkan gambar tersebut, ketiga perbandingan trigonometri baku dapat didefinisikan dalam absis (x), ordinat (y), dan panjang OP (r) sebagai berikut:

1. $\sin \alpha = \frac{\text{ordinat P}}{\text{panjang OP}} = \frac{y}{r}$

2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{absis P}}{\text{panjang OP}} = \dfrac{x}{r}$

3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{ordinat P}}{\text{absis P}} = \dfrac{y}{x}$

Dengan memutar garis OP maka $\angle$XOP = α dapat terletak di kuadran I, kuadran II, kuadran III atau kuadran IV, seperti tampak pada Gambar 3. berikut.



Gambar 3. titik di berbagai kuadran

Adapun tabel tanda nilai ketiga perbandingan trigonometri di masing-masing kuadran adalah seperti berikut.

Perbandingan Trigonometri	***I***	***II***	***III***	*IV*
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

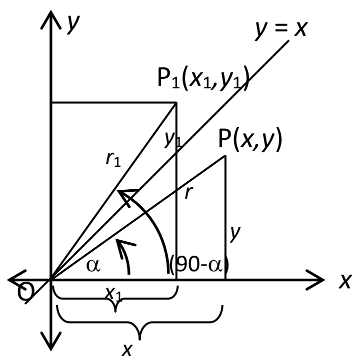
D. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90°\pm\alpha)$, $(180°\pm\alpha)$, $(360°\pm\alpha)$, dan $-\alpha°$. Dua buah sudut yang berelasi ada pemberian nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut $\alpha°$ dengan $(90° - \alpha)$ dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180° - \alpha)$.

Contoh 3.

penyiku sudut 50° adalah 40° dan pelurus sudut 110° adalah 70°.

1) <u>Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan $(90° - \alpha)$</u>



Gambar 4. sudut yang berelasi

Berdasarkan gambar 4.di samping, diketahui

Titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari $P(x,y)$akibat pencerminan garis $y=x$, sehingga diperoleh:

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 90° - \alpha$
b. $x_1 = x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

Dengan menggunakan hubungan tersebut,sehinggadapat diperoleh:

a. $\sin(90° - \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

b. $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

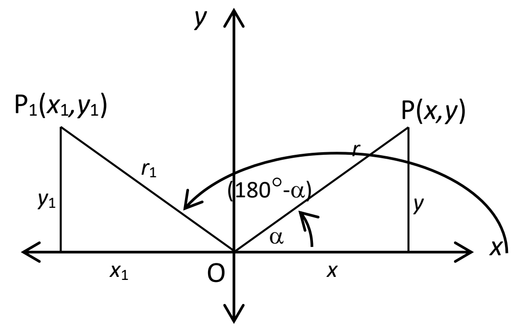
c. $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{x}{y} = \cot\alpha$

Berdasarkan perhitungan tersebut, maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan $(90° - \alpha)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

a. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	d. $\text{cosec}(90° - \alpha) = \sec\alpha$
b. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	e. $\sec(90° - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$
c. $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$	f. $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

2) <u>Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° - α)</u>

Titik $P_1(x_1,y_1)$ pada Gambar 5. di samping adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga



Gambar 6. sudut yang berelasi

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° - \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:

a. $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

b. $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

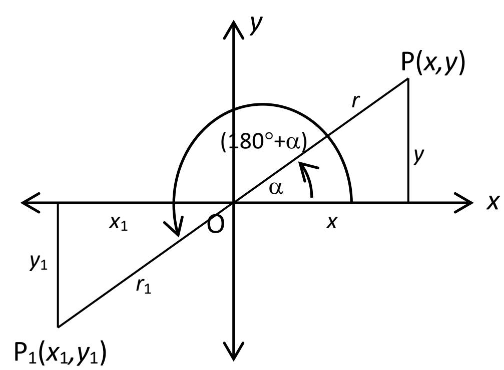
c. $\tan(180° - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{-x} = -\tan\alpha$

Berdasarkan hubungan tersebut, sehingga dapat diperoleh rumus:

a. sin (180° – α) = sin α	d. cosec (180° – α) = cosec α
b. cos (180° – α) = -cos α	e. sec (180° – α) = -sec α
c. tan (180° – α) = -tan α	f. cot (180° – α) = -cot α

3) <u>Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° + α)</u>

Titik $P_1(x_1,y_1)$ pada Gambar 6. di samping adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap garis $y=-x$, sehingga



Gambar 6. sudut yang berelasi

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° + \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:

a. $\sin(180° + \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(180° + \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180° + \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$

Berdasarkan hubungan tersebut, sehingga dapat diperoleh rumus:

a. sin (180° + α) = -sin α	d. cosec (180° + α) = -cosec α
b. cos (180° + α) = -cos α	e. sec (180° + α) = sec α
c. tan (180° + α) = tan α	f. cot (180° + α) = cot α

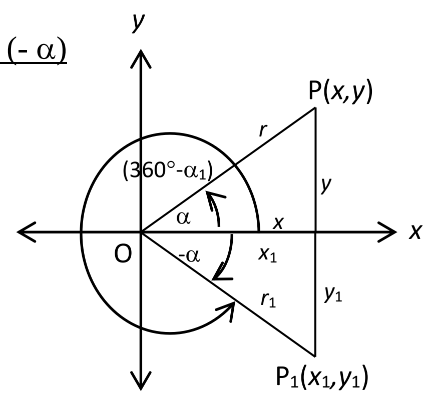
4) <u>Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)</u>

Titik $P_1(x_1,y_1)$ pada Gambar 7. di samping merupakan bayangan dari $P(x,y)$akibat pencerminan terhadap sumbu x, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = -\alpha$

b. $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan



Gambar 7. sudut yang berelasi

a. $\sin(-\alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(-\alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$

c. $\tan(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan\alpha$

Berdasarkan hubungan tersebut, dapat diperoleh rumus:

a. sin (-α) = -sin α	d. cosec (-α) = -cosec α
b. cos (-α) = cos α	e. sec (-α) = sec α
c. tan (-α) = -tan α	f. cot (-α) = -cot α

Sedangkan rumus perbandingan untuk sudut (360° - α) dan α identik dengan rumus sudut negatif, misalnya sin (360°–α) =-sin α

Contoh 4.

1. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ke dalam perbandingan trigonometri sudut komplemennya.
   a. sin 27°
   b. cos 46°
   c. tan 12°
   d. cot 88°
   e. sec 64°
   f. cosec 75°
2. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ke dalam perbandingan trigonometri sudut pelurusnya.
   a. sin 138°
   b. cos 99°
   c. tan 117°
   d. cot 146°
   e. sec 162°
   f. cosec 123°
3. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.
   a. sin 234°
   b. cos 312°
   c. tan 199°
   d. cot 212°
   e. sec 354°
   f. cosec 284°

<u>*Penyelesaian*</u>*:*

1. Sudut komplemen dari:
   a. sin 27° = sin (90° - 63°) = cos 63°
   b. cos 46° = cos (90° - 44°) = sin 44°
   c. tan 12° = tan (90° - 78°) = cot 78°
   d. cot 88° = cot (90° - 2°) = tan 2°
   e. sec 64° = sec (90° - 26°) = cosec 26°
   f. cosec 75° = cosec (90° - 15°) = sec 15°
2. Sudut pelurus dari:
   a. sin 138° = sin (180° - 42°) = sin 42°
   b. cos 99° = cos (180° - 81°) = -cos 81°
   c. tan 117° = tan (180° - 63°) = -tan 63°
   d. cot 146° = cot (180° - 34°) = -cot 34°
   e. sec 162° = sec (180° - 18°) = -sec 18°
   f. cosec 123° = cosec (180° - 57°) = cosec 57°
3. Sudut lancip dari
   a. sin 234° = sin (180° + 54°) = -sin 54°
   b. cos 312° = cos (360° - 48°) = cos 48°
   c. tan 199° = tan (180° + 19°) = tan 19°

d. cot 212° = cot (180° + 32°) = -cot 32°

e. sec 354° = sec (360° - 6°) = sec 6°

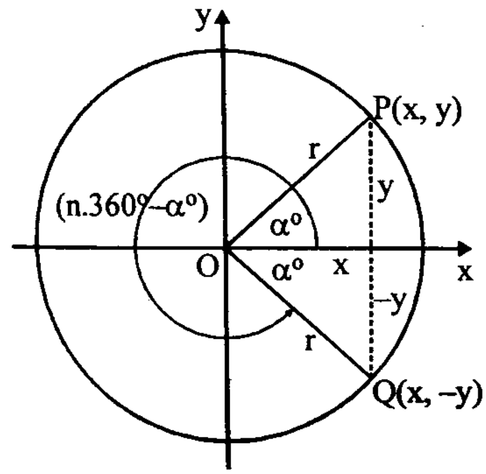
f. cosec 284° = cosec (360° - 76°) = -cosec 76°

E. Rumus Perbandingan Trigonometri untuk Sudut (n.360° - α°) dan Sudut (n.360° + α°)

Perhatikan gambar di samping!

Pada Gambar 8. tersebut dengan memisalkan ∠ POX = α° dan ∠ QOX = (n.360° - α°) dengan n adalah merupakan Z (bilangan bulat) yang mengakibatkan titik Q berada pada kaki sudut yang nilainya (-α°).

Dengan demikian, relasi rumus-rumus untuk perbandingan untuk sudut (n.360° - α°) identik dengan sudut negatif(-α), misalnya sin (n.360°–α°) =-sin α°



Gambar 8.

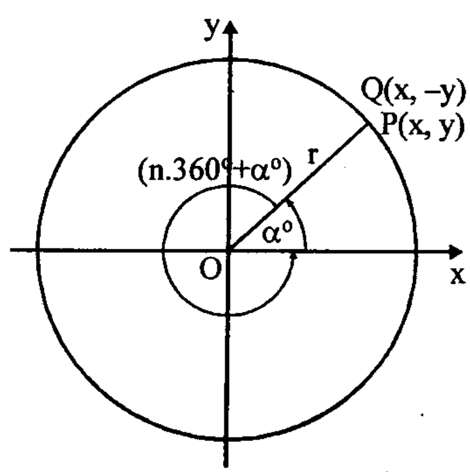
Berdasarkan hubungan tersebut, dapat diperoleh rumus:

a. sin (n.360°–α°) =sin (- α°) = -sin α°
b. cos (n.360°–α°) =cos (- α°) = cosα°
c. tan (n.360°–α°) =tan (- α°) = -tanα°
d. cot (n.360°–α°) =cot (- α°) = -cotα°
e. sec (n.360°–α°) =sec (- α°) = secα°
f. cosec (n.360°–α°) =cosec (- α°) = -cosecα°

Selanjutnya, perhatikan Gambar 9. di samping!

Pada gambar tersebut, ∠ POX = α° dan ∠ QOX = (n.360° +α°) dengan n adalah merupakan Z (bilangan bulat) yang mengakibatkan titik Q berhimpit dengan titik P.

Dengan demikian, rumus-rumus perbandingan untuk sudut (n.360° +α°) = rumus-rumus perbandingan trigonometri untuk sudut (α°).



Gambar 9.

Sehingga berdasarkan hubungan tersebut, dapat diperoleh rumus:

a. $\sin(n.360° + \alpha°) = \sin \alpha°$
b. $\cos(n.360° + \alpha°) = \cos \alpha°$
c. $\tan(n.360° + \alpha°) = \tan \alpha°$
d. $\cot(n.360° + \alpha°) = \cot \alpha°$
e. $\sec(n.360° + \alpha°) = \sec \alpha°$
f. $\text{cosec}(n.360° + \alpha°) = \text{cosec}\ \alpha°$

Contoh 5.

1. Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.
   a. sin 400°
   b. cos 385°
   c. tan 518°
   d. cot 437°
   e. sec 622°
   f. cosec 594°
   g. sin 710°
   h. sin 872°
   i. cos 926°
   j. cos 1.025°
   k. tan 1.369°
   l. tan 1.215°
2. Hitunglah nilai dari perbandingan trigonometri berikut ini.
   a. sin 420°
   b. cos 450°
   c. tan 390°
   d. sin 510°
   e. cos 585°
   f. tan 480°
   g. sin 630°
   h. sin 750°
   i. cos 990°
   j. cos 1.155°
   k. tan 1.485°
   l. tan 2.550°

Penyelesaian:

1. a. $\sin 400° = \sin(1.360° + 40°)$
   $= \sin 40°$

   b. $\cos 385° = \cos(1.360° + 25°)$
   $= \cos 25°$

   c. $\tan 518° = \tan(1.360° + 158°)$
   $= \tan 158°$

		=	tan (180° – 22°)
		=	tan 22°
d.	cot 437°	=	sin (2.360° – 283°)
		=	-sin 283°
		=	-sin (360° – 77°)
		=	sin 77°
e.	sec 622°	=	sec (2.360° – 98°)
		=	-sec 98°
		=	-sec (180° – 82°)
		=	sec 82°
f.	cosec 594°	=	cosec (1.360 + 234°)
		=	cosec 234°
		=	cosec (180° + 54°)
		=	-cosec 54°
g.	sin 710°	=	sin (2.360° – 10°)
		=	-sin 10°
h.	sin 872°	=	sin (2.360° + 152°)
		=	sin 152°
		=	sin (180° – 28°)
		=	sin 28°
i.	cos 926°	=	cos (3.360° – 154°)
		=	-cos 154°
		=	-cos (180° – 26°)
		=	cos 26°

	j.	cos 1.025°	=	cos (3.360° – 55°)
			=	-cos 55°
	k.	tan 1.369°	=	tan (3.360° + 289°)
			=	tan 289°
			=	tan (360° – 71°)
			=	-tan 71°
	l.	tan 1.215°	=	tan (4.360° – 225°)
			=	-tan 225°
			=	-tan (180° + 45°)
			=	-tan 45°
2.	a.	sin 420°	=	sin (1.360° + 60°)
			=	sin 60°
			=	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
	b.	cos 450°	=	cos (1.360° + 90°)
			=	cos 90°
			=	0
	c.	tan 390°	=	tan (1.360° + 30°)
			=	tan 30°
			=	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	d.	sin 510°	=	sin (2.360° – 210°)
			=	-sin 210°
			=	-sin (180° + 30°)
			=	sin 30°

$$= \frac{1}{2}$$

e. cos 585° $= \cos(2.360° – 135°)$

$= -\cos 135°$

$= -\cos(180° – 45°)$

$= \cos 45°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

f. tan 480° $= \tan(1.360 + 120°)$

$= \tan 120°$

$= \tan(180° – 60°)$

$= -\tan 60°$

$= -\sqrt{3}$

g. sin 630° $= \sin(2.360° – 90°)$

$= -\sin 90°$

$= -1$

h. sin 750° $= \sin(2.360° + 30°)$

$= \sin 30°$

$= \frac{1}{2}$

i. cos 1.035° $= \cos(3.360° – 45°)$

$= -\cos 45°$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

j. cos 1.125° $= \cos(3.360° + 45°)$

$= \cos 45°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$

k. tan 1.395° $=$ tan (4.360° – 45°)

$=$ -tan 45°

$=$ -1

l. tan 2.550° $=$ tan (7.360° + 30°)

$=$ tan 30°

$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$

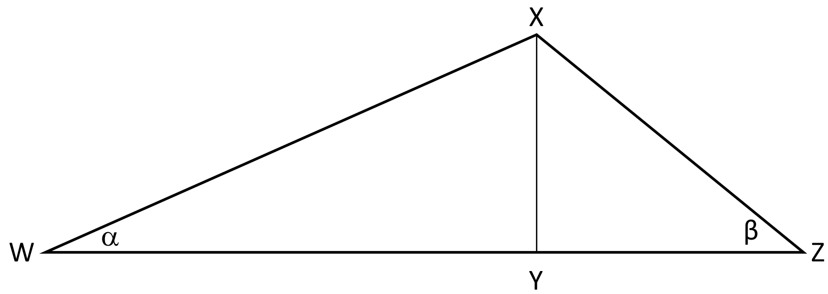
LATIHAN

1) Nyatakan perbandingan trigonometri berikut ke dalam perbandingan trigonometri sudut lancip.
   a) sin 463°
   b) cos 687°
   c) tan 830°
   d) cot 1.327°
   e) sec 992°
   f) cosec 718°
   g) sin 1.589°
   h) sin 2.706°
   i) cos 1.227°
   j) cos 1.104°
   k) tan 2.011°
   l) tan 1.201°
2) Sederhanakan bentuk berikut.
   a) $\frac{\cos(90° - \alpha°)}{\cos(90° + \alpha°)}$
   b) $\frac{\sin(180° - \alpha°)}{\sin(90° - \alpha°)}$

Tunjukkan bahwa:

3) cos 60° + sin 60° tan 60° = 2
4) $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = \tan 30°$
5) Diketahui ∆ KLM siku-siku di M. Panjang sisi alasnya 6 dan sin ∠ LKM = $\frac{1}{2}$. Tentukan:
   a) panjang kedua sisi lainnya
   b) sin ∠ KLM
   c) cos ∠ LKM
   d) cos ∠ KLM

6) Diketahui Δ XYZ adalah siku-siku sama kaki. Panjang WZ = 34 dan XY = 10.



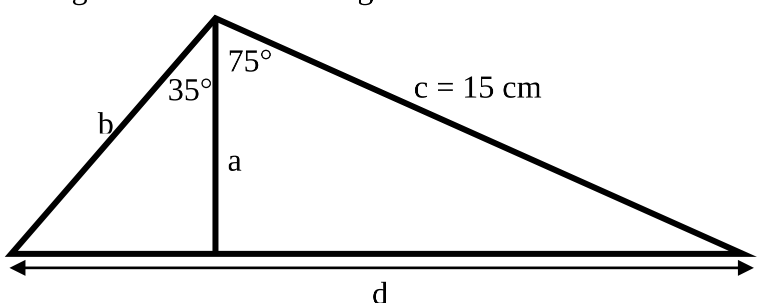
Tentukan:

a) Panjang WX dan XZ

b) sin α, cos α, tan α

c) sin β, cos β, tan β

7) Perhatikan gambar berikut! Hitunglah:



a) panjang a!

b) panjang b!

c) panjang d!

(teliti sampai 3 tempat desimal)

8) Diketahui sin $\gamma° = -\frac{2}{3}$ dan tan $\gamma°$ positif. Tentukanlah cos $\gamma°$, sec $\gamma°$, cosec $\gamma°$, dan cot $\gamma°$!

9) Diketahui tan $\theta° = -\frac{3}{7}$ dan cos $\theta°$ negatif. Tentukanlah sin $\theta°$, cot $\theta°$, sec $\theta°$, dan cosec $\theta°$!

10) Diketahui cos $\beta° = -\frac{2}{3}$, hitunglah sin $\alpha°$, tan $\alpha°$, cot $\alpha°$, sec $\alpha°$, dan cosec $\alpha°$!

BAB XI LIMIT

Ahmad Nasrullah

Pada Bab ini membahas tentang konsep limit yang terdiridari limit fungsi aljabar dan limit fungsi trigonometri,

A. Limit Fungsi Aljabar

Nilai Limit di x = a

Definisi:

Suatu fungsi $\boldsymbol{f(x)}$dikatakan mempunyai suatu limit *L* untuk x menuju *a* (*a* disebut titik limit), yaitu $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x) = L}$,jika untuk setiap $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ada $\boldsymbol{\delta > 0}$ sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{0 < |x - a| < \delta}$ berlaku:

$\boldsymbol{|f(x) - L| < \varepsilon}$

Definisi di atas sama sekali tidak menyinggung tentang nilai $\boldsymbol{f(x)}$di $\boldsymbol{x = a}$. Jadi agar $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)}$ ada, $\boldsymbol{f(x)}$tidak harus terdefinisi di $\boldsymbol{x = a}$.

Sebagai contoh: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \boldsymbol{4},$ tetapi fungsi $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$tidakterdefinisi di $\boldsymbol{x = 1}$

Jika f(a) terdefinisi, nilai limit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Contoh 1

Hitunglah nilai $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+3x}{x+2}$

Jawab

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x}{x + 2} = \frac{3^2 + 3 \,.\, 3}{3 + 2} = \frac{9 + 9}{5} = \frac{18}{5}$$

Jika f(a) $= \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ diselesaikan degan cara berikut.

1) Memfaktorkan pembilang dan penyebut f(x) dengan faktor (x – a) sehingga dapat disederhanakan
2) Mengalikan pembilang dan penyebut degan sekawannya apabila terdapat bentuk akar, lalu disederhanakan
3) Menentukan bentuk turunan pembilang dan penyebut sehingga diperoleh nilai tak tentu (tidak $\frac{0}{0}$)

Nilai Limit Tak Hingga (∞)

Rumus dasar $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ untuk n bilangan positif

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty \ \ jika\, n > m \\ \frac{a_n}{b_m} \ \ jika\, n = m \\ 0 \ \ jika\, n < m \end{cases}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$

Nilainya ditentukan dengan mengalikan $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$ dengan $\left(\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}\right)$ sehingga diperoleh bentuk yang dapat disederhanakan, yang selanjutnya dapat diperoleh nilai tertentu (tidak $\infty-\infty$)

Sifat-Sifat Limit Fungsi

a. $\lim_{x\to c} k = k$

b. $\lim_{x\to c} k \times f(x) = k \times \lim_{x\to c} f(x)$

c. $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c}\ g(x)$

d. $\lim_{x\to c} f(x) \times g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c}\ g(x)$

e. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c}\ f(x)}{\lim_{x\to c}\ g(x)}$, dengansyarat g(x) $\neq$0

f. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

g. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, dengan syarat $\lim_{x\to c} f(x) \geq$ 0untuk n bilangan genap.

h. $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

B. Limit Fungsi Trigonometri

1. Konsep Limit Trigonometri

Perhatikan beberapa limit fungsi berikut.

a. $\lim_{x\to 2\pi} \frac{x^2-2}{x}$

b. $\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\sin x}$

c. $\lim_{x\to 0} \sin x$

d. $lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

e. $\lim_{x\to\pi} \tan x$

f. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

g. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x$

h. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x$

i. $\cos x \lim_{x\to\pi} \mathrm{x}^2$

j. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\tan x}$

k. $\sin 2x \lim_{x\to\pi} \mathrm{x}$

Beberapa limit di atas dapat dikelompokkan menjadi dua kelombok berikut.

a. Kelompok limit fungsi trigonometri

$\lim_{x\to 0} \sin x$, $\lim_{x\to\pi} \tan x$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x$, $\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\sin x}$, $lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x$, dan $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\tan x}$ merupakan limit fungsi trigonometri

b. Kelompok bukan limit fungsi trigonometri

$\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{x^2-2}{x}$, $\cos x$ $\lim\limits_{x\to\pi} x^2$, dan $\sin 2x$ $\lim\limits_{x\to\pi} x$ bukan merupakan limit trigonometri.

> Limit fungsi trigonometri memuat fungsi trigonometri sebagai fungsi yang dikenai operasi limit

Bagaimana cara menentukan nilai suatu limit fungsi trigonometri?
Perhatikan cantoh berikut

Contoh 2.

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$

Jawab:

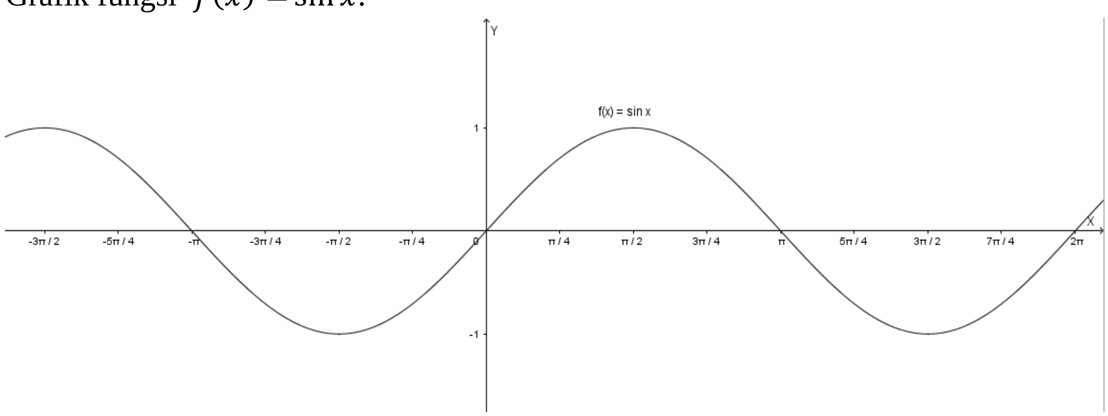
Untuk menjawabnya, Anda dapat menggunakan tabel dan grafik. Perhatikan tabel nilai fungsi $f(x) = \sin x$ serta grafiknya berikut.

Tabel nilai fungsi $f(x) = \sin x$ untuk x dalam radian.

x	**-1**	**-0.1**	**-0.01**	**-0.001**	**-0.0001**	**0**	**0.0001**	**0.001**	**0.01**	**0.1**	**1**
f(x) = sin x	-0.8414	-0.0998	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.0998	0.8414

Pendekatan dari kiri → ← Pendekatan dari kanan

Grafik fungsi $f(x) = \sin x$.



Dari tabel dan grafik fungsi $f(x) = \sin x$ dapat diperoleh beberapa kesimpulan berikut.

a. Untuk nilai x mendekati 0 dari kiri, nilai sin x mendekati 0. Dengan demikian diperoleh notasi matematis $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$.

b. Untuk nilai x mendekati 0 dari kanan, nilai sin x mendekati 0. Dengan demikian diperoleh notasi matematis $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$.

Karena $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$ dan $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$ maka dapat disimpulkan $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

2. Menemukan Sifat-Sifat Limit Fungsi Trigonometri

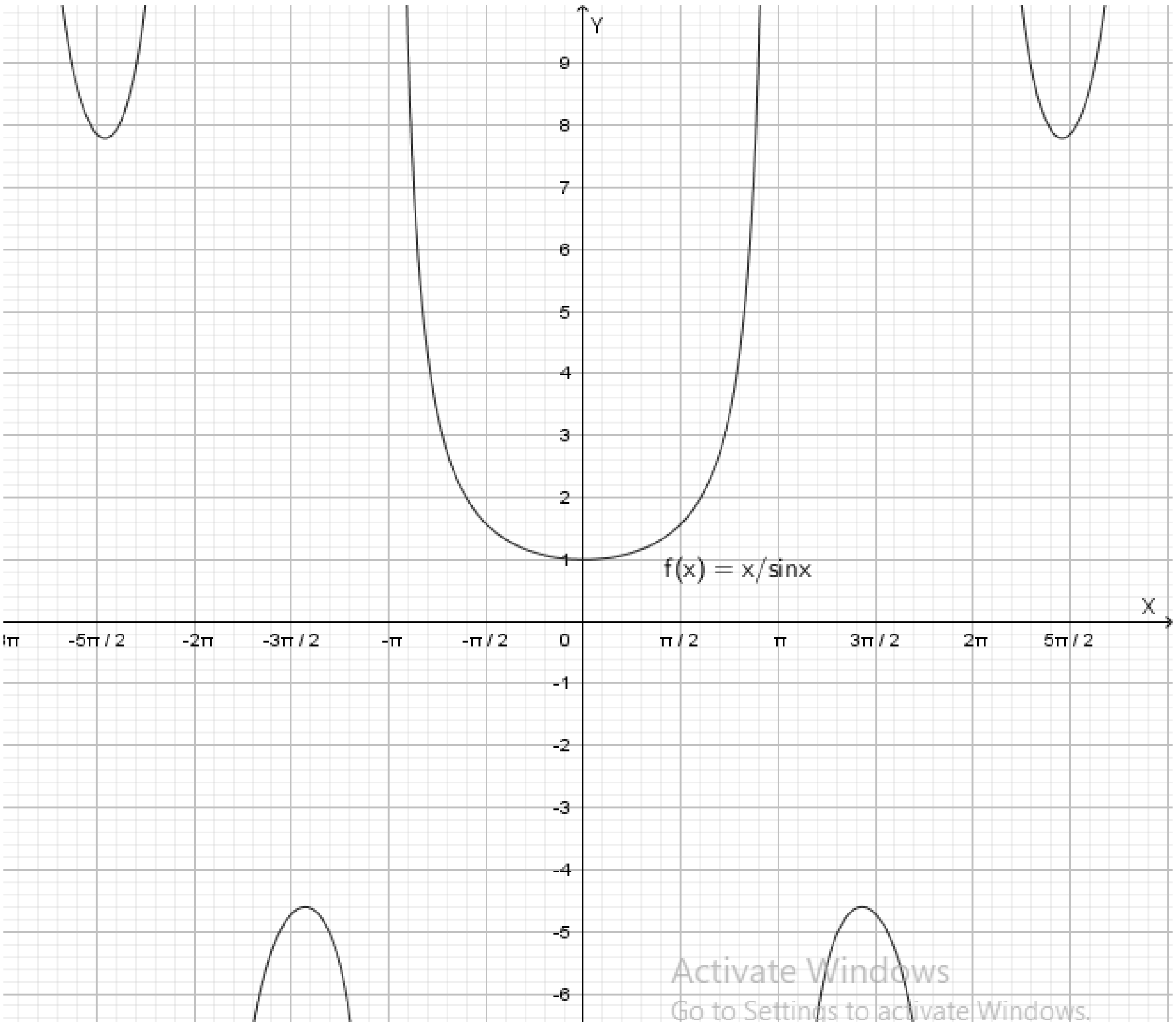
a. Sifat $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Setelah menentukan $\lim_{x \to 0} \sin x$, sekarang Anda akan mempelajari dan menunjukkan bahwa nilai $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Untuk menunjukkannya, amatilah tabel nilai $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ berikut.

Tabel nilai $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

x	**-1**	**-0.1**	**-0.01**	**-0.001**	**-0.0001**	**0**	**0.0001**	**0.001**	**0.01**	**0.1**	**1**
f(x) = sin x	-0.841	-0.099	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.0998	0.841
$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\sin x}}$	1.1884	1.00167	1.000017	1	1	-	1	1	1.000017	1.00167	1.1884

Pendekatan dari kiri → ← Pendekatan dari kanan



GrafikFungsi $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

Dari tabel dan grafik di atas dapat diketahui bahwa $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

b. Sifat $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Selain sifat $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, sifat lain yang berlaku pada limit fungsi trigonometri adalah$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

3. MenentukanNilai Limit Fungsi Trigonometri

a. Cara Substitusi

Substitusi langsung artinya mensubstitusikan nilai x, misalnya x = c, ke dalam bentuk fungsi. Nilai fungsi untuk nilai x = c tersebut merupakan nilai $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

Tidak semua nilai limit fungsi trigonometri dapat ditentukan dengan cara substitusi langsung. Nilai x = c harus memenuhi syarat tertentu sehingga $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dapat ditentukan dengan cara ini.

Contoh 3

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$

Jawab:

Domain fungsi $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$ adalah $\left\{x \middle| \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\,.2\pi\right\}$ sehingga $x = \frac{\pi}{3}$ merupakan anggota domain fungsi $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \sqrt{3}$

Contoh 4

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3}{2}x}$

Jawab:

Domain fungsi $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3}{2}x}$ adalah $\left\{x \middle| \cos \frac{3}{2}x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\,.2\pi\right\}$ sehingga $x = \frac{\pi}{3}$ bukan merupakan anggota domain fungsi $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3}{2}x}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3}{2}x} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{3}{2}.\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{0} = tidak\ terdefinisi$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3}{2}x} = tidak\ terdefinisi$.

Kesimpulan:

x = c merupakan anggota domain fungsi *f(x).*

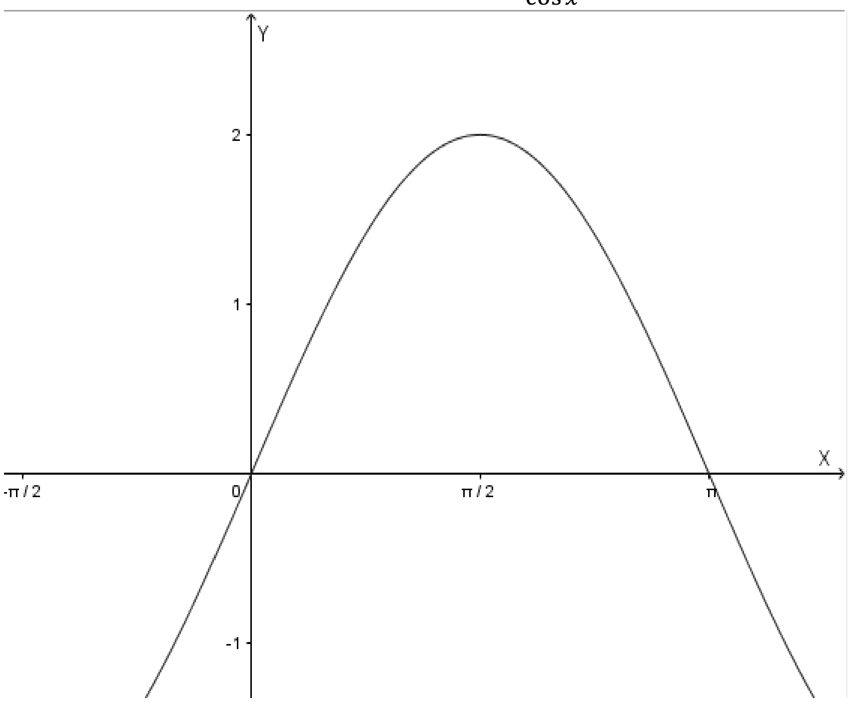
b. Cara Faktorisasi

Perhatikan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$. Bagaimana jika nilai x yang didekati berubah, misalnya $x \to \frac{\pi}{2}$? Berapakah nilai $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$?

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \pi}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \leftarrow -$ bentuk tak tentu

Nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{0}{0}$ bukan berarti nilai limit tersebut tidak ada. Jika grafik dari $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$ digambar, nilai fungsi untuk x mendekati $\frac{\pi}{2}$ dari kiri dan untuk x mendekati $\frac{\pi}{2}$ dari kanan berupa bilangan real. Bilangan tersebut sama yaitu bilangan yang sangat dekat dengan 2. Artinya, nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$ ada dan berupa bilangan real. Perhatikan grafik $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$ berikut.



Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2.$

Perhatikan langkah-langkah penyelesaian berikut.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\ \sin x \cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2 \sin x$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2\,.\,1 = 2$$

Kesimpulan:

Jika sebuah limit mempunyai nilai tak tentu, bentuk fungsi yang dikenai operasi limit harus diubah menjadi bentuk lain terlebih dahulu, salah satunya dengan memfaktorkan agar factor yang sama dapat dihilangkan

c. Menggunakan Sifat Limit Trigonometri

Jika suatu fungsi mempunyai bentuk tak tentu sekaligus tidak bisa difaktorkan, maka bisa memanfaatkan sifat limit trigonometri. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 5

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

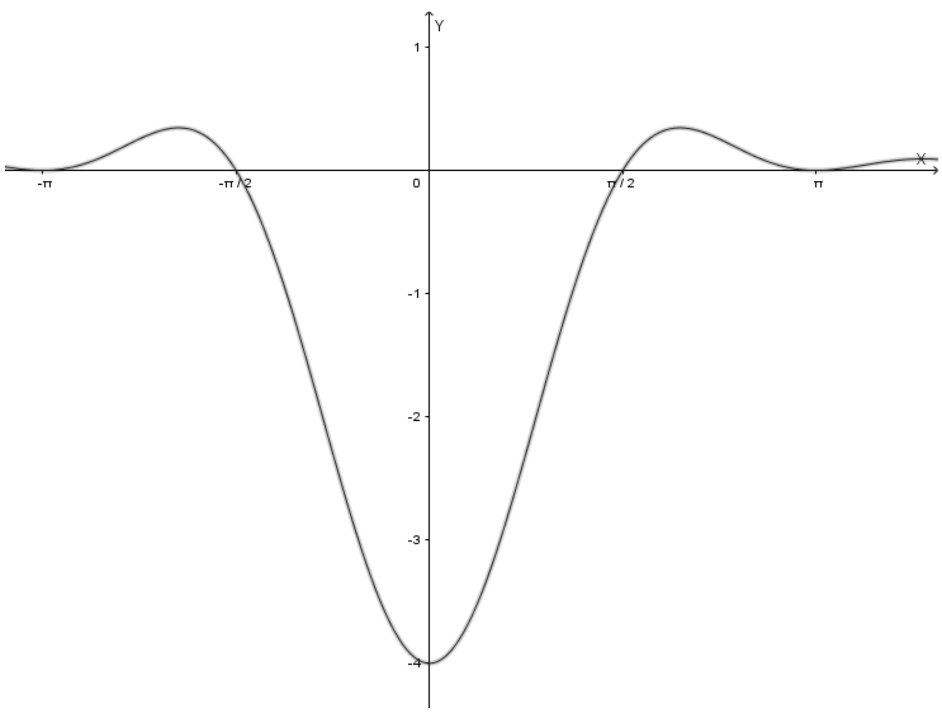
Jawab:

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\frac{\cos 0-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\leftarrow -$bentuk tak tentu

Secara grafik fungsi $f(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$ menunjukkanbilangan real untuk x mendekati 0 dari kiri maupun dari kanan.

Perhatikan grafik berikut.



Dari grafik tersebut terlihat nilai *f(x)* untuk x mendekati 0 dari kiri maupun dari kanan adalah mendekati -4

Sekarang akan ditunjukkan cara mencari nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\ .\ 2\sin x\cos x\sin x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\ \sin x\cos x\sin x}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} -4\ \cos x \frac{\sin x\sin x}{x\ .\ x}$$
$$= \lim_{x\to 0} -4\ \cos x\ . \frac{\sin x}{x}\ .\ \frac{\sin x}{x}$$
$$= -4\ .\lim_{x\to 0} \cos x\ . \frac{\sin x}{x}\ .\ \frac{\sin x}{x}$$
$$= -4\ .\lim_{x\to 0} \cos 0\ .\ 1\ .\ 1$$
$$= -4\ .\ 1\ .1\ .\ 1$$
$$= -4$$

Jadi nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} = -4$

Kesimpulan:

Jika fungsi trigonometri berbentuk tak tentu dan tidak dapat difaktorkan, Anda harus mengubah bentuk fungsi sehingga memuat bentuk $\frac{x}{\sin x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{x}{\tan x}$ atau $\frac{\tan x}{x}$. Jika fungsi sudah memuat bentuk-bentuk tersebut, sifat-sifat limit fungsi trigonometri dapat digunakan untuk menentukan nilai limit. Sifat-sifat limit fungsi trigonometri yang dimaksud adalah $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, dan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

LATIHAN

1. Nilai $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+12}-3}{x^2+7x+12} = \cdots$
2. Jika $n = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{3-\sqrt{x+5}}$, nilai n = . . .
3. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+4x^{-1}}{4x-x^{-1}} = \cdots$
4. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 3x - 4}\right) = \cdots$
5. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{25x^2 + x - 5} - 5x - 2\right) = \cdots$
6. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x}$

7. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{3x+4x^{-1}}{4x-x^{-1}} = . . .$

8. Nilai $\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-3)-(3-x)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{3-x})} = . . .$

9. Nilai $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{25x^2 + x - 5} - 5x - 2\right) = \cdots$

10. Nilai $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3\right) = \cdots$

11. Nilai $\lim_{x \to -3} \frac{\tan(x^2-9)}{x+3} = \cdots$

12. Nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \cdots$

13. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\cos 2x} = \cdots$

14. Nilai $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+2x-3}{(x-3)\sin(x+3)} = . .$

15. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{3x-\sin 2x}{4x-\tan 3x} = \cdots$

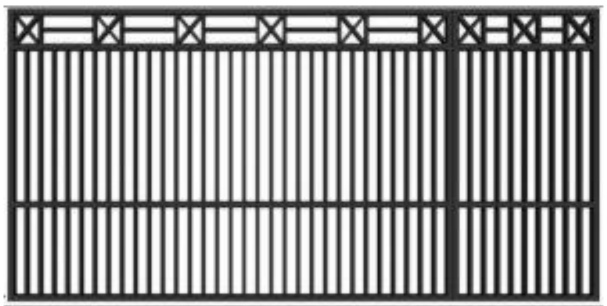
16. Nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2-\sin 2x}{6x-3\pi} = \cdots$

BAB XII TURUNAN FUNGSI

M. Syawahid

Pada Bab ini membahas tentang konsep turunan fungsi yang terdiri dari: turunan sebagai gradien garis singgung, turunan fungsi aljabar, aplikasi turunan.

Perhatikan gambar berikut ini.



Sumber: https://www.aluminiumkacadepok.com/wp-content/uploads/2019/01/Pagar-Besi-Hollow-Galvanis-300x151.jpg

Jika seseorang berencana membuat rangka gerbang dan memiliki besi galvanis dengan panjang keseluruhan adalah 14 meter, berapakah luas maksimal rangka gerbang yang bisa dibuat dengan besi tersebut?. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, perlu diingat kembali konsep keliling dan luas persegi panjang sebagai bentuk dari rangka gerbang yaitu rumus keliling $K = 2(p + l)$ dan rumus luas $L = p \times l$. Dalam kasus di atas, diketahui bahwa bahan yang kita punya adalah 14 meter besi galvanis yang akan dibuat menjadi rangka gerbang yang berbentuk persegi panjang. dengan kata lain kita memiliki keliling persegi panjang 14m. rumus keliling persegi panjang adalah $K = 2(p + l) = 14m$. Dari rumus keliling ini kita operasikan

$$2(p + l) \quad = 14$$

$$p + l \quad = \frac{14}{2}$$

$$l \quad = 7 - p$$

Nilai l selajutnya kita substitusikan ke rumus luas persegi panjang

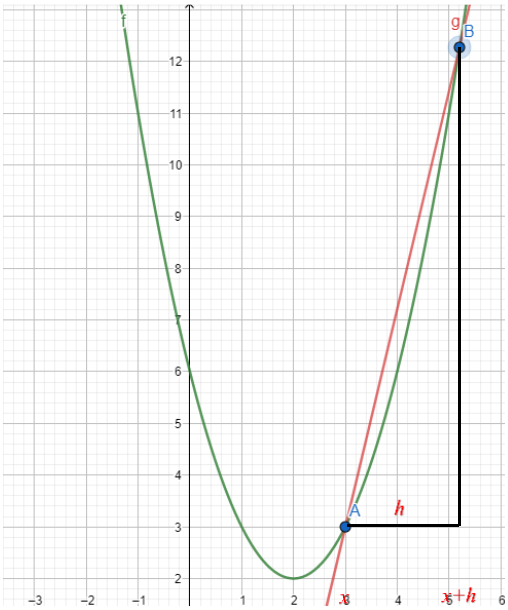
$$L \quad = p \times l$$

$$L \quad = p \times (7 - p)$$

$$L \quad = 7p - p^2$$

Kita memperoleh sebuah fungsi luas $L(p)$ dengan variabel bebas p. Untuk menentukan nilai luas maksimal dari fungsi luas tersebut, diperlukan konsep turunan yang akan dipelajari pada pembahasan kali ini. Pembahasan ini terdiri dari turunan fungsi sebagai gradient garis singgung, turunan fungsi aljabar dan aplikasi turunan.

A. TURUNAN FUNGSI SEBAGAI GRADIEN GARIS SINGGUNG

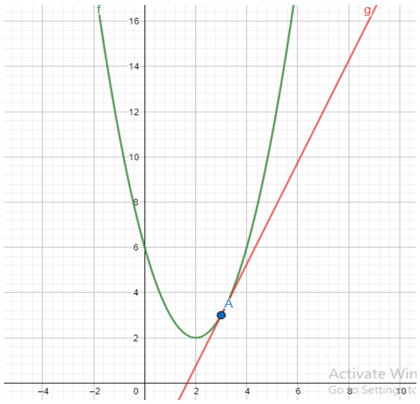


Misalkan kita mempunyai grafik fungsi $f(x)$ yang kontinu. Kemudian terdapat garis yang memotong fungsi tersebut pada titik $A(x, f(x))$ dan titik $B(x+h, f(x+h))$. Maka kemiringan garis tersebut dapat ditulis

$$M_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika titik A dan titik B kita geser hingga saling mendekati satu sama lain, atau dengan kata lain hingga jarak h mendekati nilai 0, maka apakah yang akan terjadi?

Yang terjadi adalah garis AB yang tadinya memotong kurva $f(x)$ di dua titik, lama kelamaan akan memotong kurva di satu titik.



Dengan menggunakan konsep limit, maka gradient garis tetap sama dengan sebelumnya dan dapat ditulis

$$M_{AB} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika liitnya ada, maka nilai M_{AB} inilah yang disebut sebagai turunan pertama fungsi.M_{AB} dapat ditulis dengan symbol turunan yaitu $f'(x)$ (dibaca: *f* aksen *x*).

Contoh A.1

Misalkan kita mempunyai fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 4$, tentukan gradient garis singgung fungsi tersebut di titik $x = 2$!

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita bisa menggunakan konsep turunan di atas.

Diketahui $f(x) = x^2 - 3x + 4$, maka $f(2)$ dan $f(2+h)$ dapat ditulis

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 3.2 + 4 \\ &= 2 \\ f(2+h) &= (2+h)^2 - 3(2+h) + 4 \\ &= h^2 + 4h + 4 - 6 - 3h + 4 \\ &= h^2 + h + 2 \end{aligned}$$

Sehingga gradient garis singgung fungsi $f(x)$ di titik $x = 2$ dapat dicari menggunakan konsep turunan

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2+h+2-(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2+h}{h}$$

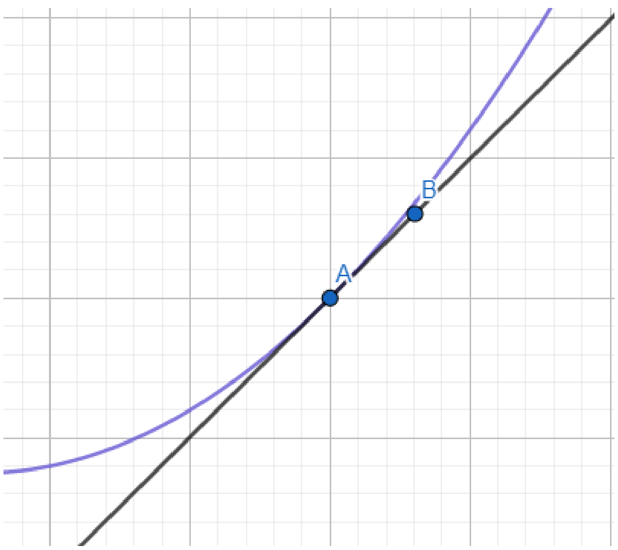
$$= \lim_{h \to 0} h + 1$$

$$= \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

Jadi, gradient garis singgung fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 4$ di titik $x = 2$ adalah 1.



Contoh A.2

Tentukan turunan fungsi $f(x) = x^2 + 5x - 6$!

Penyelesaian

Diketahui $f(x) = x^2 + 5x - 6$, maka $f(x)$ dan $f(x + h)$ dapat ditulis

$f(x) \qquad = x^2 + 5x - 6$

$f(x+h) \qquad = (x + h)^2 + 5(x + h) - 6$

$\qquad\qquad = x^2 + 2xh + h^2 + 5x + 5h - 6$

Turunan fungsi $f(x)$ dapat ditulis

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2+5x+5h-6)-(x^2+5x-6)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2xh + h^2 + 5h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h + 5$$

$$= 2x + 5$$

Jadi turunan fungsi $f(x) = x^2 + 5x - 6$ adalah $f'(x) = 2x + 5$. Artinya untuk mengetahui garis singgung fungsi $(x) = x^2 + 5x - 6$ di titik $x = 3$, maka kita tinggal mensubstitusikan nilai $x = 3$ ke persamaan $f'(x) = 2x + 5$ diperoleh $f'(3) = 2.3 + 5 = 11$ yang berarti gradient garis singgung fungsi adalah 11.

A. TURUNAN FUNGSI ALJABAR

1. Fungsi konstan

   Fungsi konstan dapat dituliskan sebagai $f(x) = a$ dengan a adalah sebarang bilangan real. Turunan fungsi konstan dapat ditentukan sebagai berikut.

   $f(x) = a$ dan $f(x + h) = a$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{a - a}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} 0$$

   $$= 0$$

   Jadi, turunan fungsi konstan $f(x) = a$ adalah $f'(x) = 0$

2. Fungsi linier

   Fungsi linier dapat dituliskan sebagai $f(x) = ax + b$, dengan a dan b adalah sebarang bilangan real. Turunan fungsi linier dapat ditentukan sebagai berikut.

   $f(x) = ax + b$ dan $f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{ax+ah+b-(ax+b)}{h}$$

   $$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} a$$
$$= a$$

Jadi turunan fungsi linier $f(x) = ax + b$ adalah $f'(x) = a$

3. Fungsi kuadrad

Fungsi kuadrad dapat dituliskan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a,b dan c adalah sebarang bilangan real. Turunan fungsi kuadrad dapat ditentukan sebagai berikut.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ dan $f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + ah^2 + 2axh + bx + bh + c$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ax^2 + ah^2 + 2axh + bx + bh + c) - (ax^2 + bx + c)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah^2 + 2axh + bh}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} ah + 2ax + b$$
$$= 2ax + b$$

Jadi turunan fungsi kuadrad $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah $f'(x) = 2ax + b$

4. Fungsi polynomial $f(x) = ax^n$

Turunan fungsi polynomial $f(x) = ax^n$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$f(x) = ax^n$, $f(x+h)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus Binomial Newton.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= a(x+h)^n \\ &= a(x^n + nx^{n-1}h + C_2^n x^n h^2 + \cdots + h^n) \\ &= ax^n + anx^{n-1}h + aC_2^n x^n h^2 + \cdots + ah^n \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ax^n + anx^{n-1}h + aC_2^n x^n h^2 + \cdots + ah^n) - (ax^n)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(anx^{n-1}h + aC_2^n x^n h^2 + \cdots + ah^n)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(anx^{n-1} + aC_2^n x^n h + \cdots + ah^{n-1})}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} anx^{n-1} + aC_2^n x^n h + \cdots + ah^{n-1}$$
$$= anx^{n-1}$$

Jadi turunan fungsi $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$.

Contoh B.1

Tentukan turunan fungsi $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 8$!

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan turunan untuk fungsi polynomial, fungsi $f(x)$ diatas dapat diselesaikan sebagai berikut.

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 8$$

$$= 4.3x^{4-1} - 3.2x^{3-1} + 2.2x^{2-1} - 1.5x^{1-1} + 0$$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 4x^1 - 5$$

TEOREMA

Misalkan terdapat fungsi $f(x)$ dan $g(x)$

1. Misalkan, $h(x) = f(x) \pm g(x)$, maka Turunan fungsi $h(x)$ dapat di tulis sebagai berikut.
$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
2. Misalkan $h(x) = f(x).g(x)$, maka Turunan fungsi $h(x)$ dapat di tulis sebagai berikut.
$$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$
3. Misalkan $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka Turunan fungsi $h(x)$ dapat di tulis sebagai berikut.
$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Contoh B.2

Tentukan turunan fungsi berikut!

1. $f(x) = (2x^3 + 3x)^2$
2. $g(x) = \frac{3x}{2x-1}$

Penyelesaian

1. Fungsi $f(x) = (2x^3 + 3x)^2$ dapat ditulis sebagai $f(x) = (2x^3 + 3x)(2x^3 + 3x)$. Dengan menggunakan teorema dua perkalian fungsi maka turunan fungsi $f(x)$ dapat diselesaikan sebagai berikut.

Missal $h(x) = 2x^3 + 3x$, maka $h'(x) = 3.2x^{3-1} + 3 = 6x^2 + 3$

$f'(x) \;\; = h'(x)g(x) + g'(x)g(x)$

$= (6x^2 + 3)(2x^3 + 3x) + (6x^2 + 3)(2x^3 + 3x)$

$$= 2(6x^2 + 3)(2x^3 + 3x)$$

2. Fungsi $g(x) = \frac{3x}{2x-1}$ terdiri dari dua fungsi yaitu $f(x) = 3x$ dan $h(x) = 2x - 1$. Dengan menggunakan teorema dua perkalian fungsi maka turunan fungsi $g(x)$ dapat diselesaikan sebagai berikut.

$$g'(x) = \frac{f'(x)h(x) - h'(x)f(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

$f(x) = 3x, \qquad\qquad f'(x) = 3$

$h(x) = 2x - 1 \qquad\quad h(x) = 2$

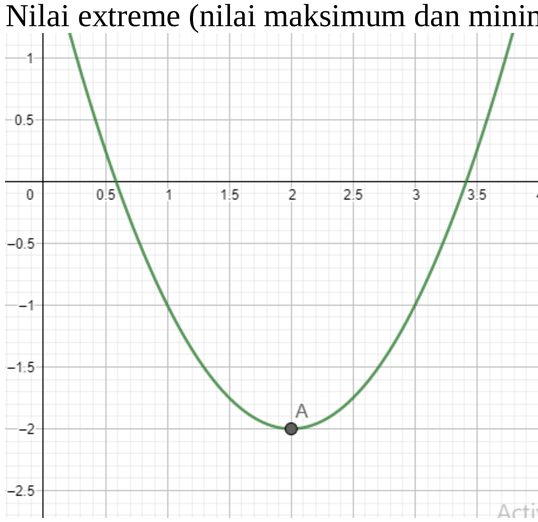
$g'(x) \;\; = \frac{f'(x)h(x)-h'(x)f(x)}{\left(h(x)\right)^2}$

$$= \frac{3(2x-1) - 2(3x)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{6x - 3 - 6x}{(2x-1)^2} = \frac{-3}{(2x-1)^2}$$

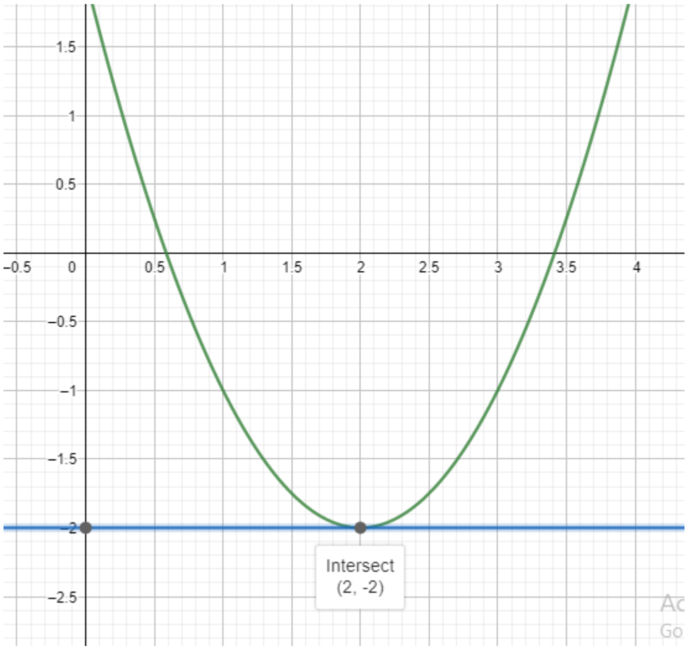
B. APLIKASI TURUNAN

1. Nilai extreme (nilai maksimum dan minimum suatu fungsi)



Fungsi kuadrad $f(x) = x^2 - 4x + 2$ seperti pada gambar di atas memiliki nilai extreme minimum yaitu $(2, -2)$. Seperti diketahui bahwa nilai minimum atau maksimum fungsi kuadrad diperoleh dari $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right)$. Perhatikan bahwa $f'(x)$ merupakan gradient garis singgung, sehingga dari gambar grafik berikut terlihat bahwa garis singgung pada titik extreme merupakan garis yang sejajar dengan sumbu x.

Tampak bahwa gradient garis singgung yang sejajar dengan sumbu x sama dengan 0 $m = 0$



misalkan pada kasus di atas kita akan mencari gradient garis singgung pada titik $(2,-2)$ $f(x) = x^2 - 4x + 2$

$$f'(x) = 2x - 4$$

Untuk $x = 2$

$$f'(2) = 2^2 - 4 = 0$$

Dari kasus tersebut diperoleh bahwa nilai turunan pada titik minimum adalah $f'(x) = 0$.

Contoh C.1

Jika seseorang berencana membuat rangka gerbang dan memiliki besi galvanis dengan panjang keseluruhan adalah 14 meter, tentukan luas maksimal rangka gerbang yang bisa dibuat dengan besi tersebut!.

Penyelesaian

Diketahui keliling gerbang berbentuk persegi panjang adalah 14 meter.

Rumus keliling persegi panjang

$$K = 2(p + l) = 14$$
$$p + l = 7$$
$$p = 7 - l$$

Rumus luas persegi panjang

$L = p \times l$ substitusi nilai p

$$= (7 - l) \times l$$
$$= 7l - l^2$$

Fungsi luas L akan maksimal jika $L'(x) = 0$

$L(x) \quad = 7l - l^2$

$L'(x) \quad = 7 - 2l \qquad = 0$

$l \qquad = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Sehingga luas maksimum gerbang

$L \qquad = 7l - l^2$

$= 7.(3{,}5) - (3{,}5)^2$

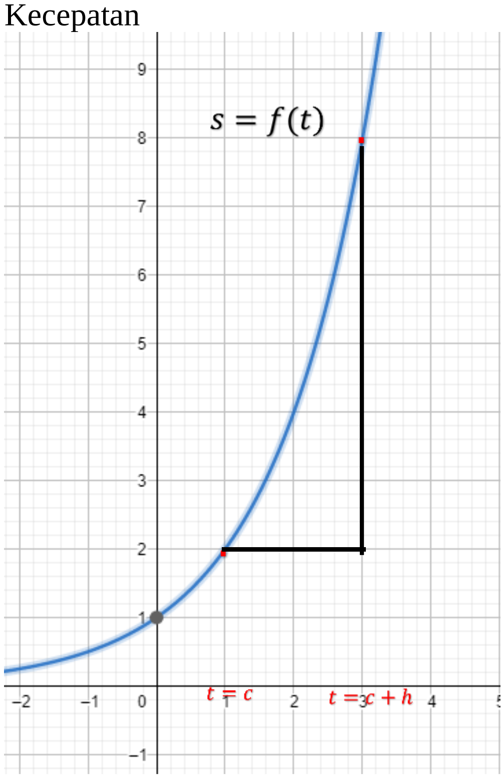
$= 7l - l^2$

$= 24{,}5 - 12{,}25$

$= 12{,}25$

Jadi luas maksimal gerbang yang bisa dibuat adalah 12,25 meter.

2. Kecepatan



Jika $s = f(t)$ menyatakan persamaan gerak dari suatu benda sepanjang garis lurus, dengan s adalah perpindahan atau jaraj langsung benda dati titik awal pada waktu t. fungsi f yang menggambarkan gerakan disebut fungsi posisi benda. Pada selang waktu dari $t = c$ sampai dengan $t = c + h$. perubahan posisi adalah $f(c + h) - f(c)$. Kecepatan rata-rata pada selang waktu ini adalah

$$Kecepatan\ rata - rata = perpindahan\ waktu = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misalkan kita akan menghitung selang waktu yang sangat kecil (h mendekati 0), maka kita memperoleh yang namanya kecepatan sesaat untuk $t = c$.

$$Kecepatan\ sesaat\ = v(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dapat disimpulkan bahwa kecepatan suatu fungsi $s(t) = f(t)$ pada waktu t tertentu adalah :$v(t) = s'(t)$ atau $v(t) = f\,'(t)$.

Adapun laju perubahan dari kecepatan disebut percepatan. Dengan mengikuti definisi kecepatan di atas, percepatan dapat didefinisikan sebagai turunan dari kecepatan.

$a(t) = v'(t)$ dengan $a(t)$ adalah percepatan dan $v(t)$ adalah kecepatan.

Contoh B.2

Suatu benda bergerak mengikuti fungsi $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2$, di aman s menyatakan jarak dan t menyatakan waktu. Tentukan

a. Kecepatan dan percepatan dalam waktu t!
b. Kecepatan dan percepatan benda tersebut dalam waktu 5 detik!
c. Kapan benda tersebut berhenti!

Penyelesaian

a. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2$

$$v(t) = s'^{(t)} = 3t^2 - 6t$$
$$a(t) = v'^{(t)} = 6t - 6$$

b. Kecepatan benda dalam waktu 5 detik adalah

$$v(5) = 3.5^2 - 6.5 = 75 - 30 = 45\ m/s$$

Percepatan benda dalam waktu 5 detik

$$a(5) = 6.5 - 6 = 30 - 6 = 24\ m/s^2$$

c. Benda tersebut akan berhenti ketika kecepatannya sama dengan 0.

$v(t) \qquad = 0$
$3t^2 - 6t \qquad = 0$
$3t(t2) \qquad = 0$
$t = 0$ atau $t = 2$

Jadi benda tersebut akan berhenti pada saat $t = 2\ detik$

LATIHAN

1. Tentukan turunan fungsi berikut dengan definisi turunan sebagai limit gradient garis singgung!.
   a. $f(x) = 3x - 2$

b. $g(x) = x^2 - 2$
c. $f(x) = x^3 + 3x$

2. Diketahui suatu garis menyinggung grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ di titik $(3,5)$. Tentukan persamaan garis tersebut!.
3. Tentukan koordinat titik singgung dari garis singgung kurva $y = f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ yang bergradien 15!
4. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 2x - 3$ yang sejajar garis $y = -2x + 5$!
5. Tentukan turunan fungsi berikut dengan menggunakan aturan atau teorema turunan fungsi aljabar!
   a. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x + 8$
   b. $f(x) = (3x^2 - 2)(2x + 3)$
   c. $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{2x}$
6. Kebun Pak Subur berbentuk persegi panjang dengan kelilingnya 60 meter. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter, tentukan:
   a. Persamaan yang menyatakan hubungan antara x dan y!
   b. Ukuran kebun Pak Subur agar luasnya maksimum!.
7. Sebuah benda bergerak dengan persamaan gerak $y = t^3 - 12t + 8$ dengan y dalam meter dan t dalam satuan detik. Tentukan kecepatan dan percepatan benda saat $t = 5$ detik!

BAB XIII STATISTIKA

Indira Putri Kinasih

Pada Bab ini membahas tentang ukuran pemusatan data yang terdiri dari: mean, median, modus

Dalam keseharian, terdapat banyak situasi di mana kita akan berinteraksi dengan data tertentu. Untuk dapat memahami data tersebut, kita dapat menggunakan sejumlah ukuran statistik. Ukuran-ukuran ini akan membantu kita untuk menggeneralisasi sekelompok data, membuat kesimpulan, dan membandingkannya dengan kelompok data lainnya. Ukuran statistik ini meliputi *mean*, median, mode, *range*, deviasi dari mean, dan deviasi absolut dari *mean*.

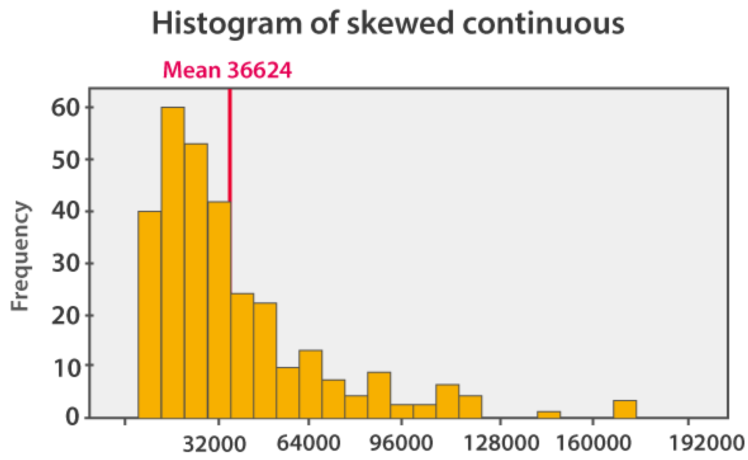
Mean, median, dan modus adalah tiga ukuran umum tendensi sentral; mereka adalah tiga alat matematika yang sering digunakan untuk menganalisis data. *Mean*, biasa disebut sebagai rata-rata, adalah jumlah semua datum dibagi dengan jumlah item data. Median adalah angka tengah dalam kumpulan data yang diurutkan dari data terkecil ke data terbesar. Jika banyaknya data bernilai genap, kita ambil rata-rata dari dua angka di tengah untuk mencari median. Terakhir, modus adalah bilangan yang paling sering muncul.

Pada bagian ini, kita secara khusus akan membahas mengenai konsep ukuran pemusatan data, baik untuk data tunggal maupun data berkelompok. Setiap penjelasan disertai dengan contoh soal beserta penyelesaiannya untuk mempermudah pembaca memahami konsep secara menyeluruh. Pada bagian akhir bab ini, kami juga menyertakan latihan soal beserta kunci jawaban.

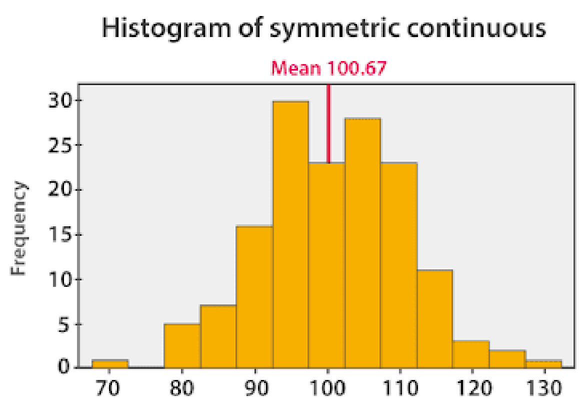
A. Mean

Mean (disebut juga sebagai *mean* aritmatis) seringkali disebut dengan rata-rata merupakan salah satu dari ukuran pemusatan data yang paling umum dan sering digunakan. Secara sederhana, *mean* adalah jumlahan dari seluruh komponen data, dibagi dengan banyaknya data tersebut. Selain *mean* aritmatika, sebenarnya terdapat pula ukuran *mean* lain, seperti *mean* geometrik, *mean* harmonik, dan *mean* terbobot. Namun, tiga macam *mean* tersebut tidak akan dibahas lebih lanjut di bagian ini.

Sebelum membahas lebih jauh, berikut disajikan gambar histogram yang merepresentasikan data simetris dan tidak simetris (condong). Kedua gambar ini dimaksudkan untuk menunjukkan bagaimana karakteristik data berdasarkan kesimetrisannya beserta posisi nilai *mean*-nya masing-masing.



Gambar 1. Histogram data yang terdistribusi asimetris (condong). Sumber: cuemath.com



Gambar 2. Histogram data yang terdistribusi normal. Sumber: cuemath.com

Pada data yang simetris, nilai *mean*-nya terdapat persis di tengah, seperti pada gambar 2. Namun, pada data yang tidak simetris, nilai ekstrem yang terdapat di bagian ujung (ekor) histogram, mengakibatkan nilai *mean* bergeser, tidak lagi terletak di bagian tengah. Oleh karena itu, *mean* banyak disarankan untuk hanya digunakan pada data yang terdistribusi normal (simetris).

Mean dari suatu kelompok data biasanya dinotasikan dengan $\bar{x}$, disebut "x bar". Rumus untuk menghitung *mean* data tunggal (tidak berkelompok) diberikan oleh

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

Sedangkan *mean* untuk data berkelompok diberikan oleh persamaan

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i, m_i}{n} \qquad (2)$$

dengan

f_i = frekuensi dari setiap kelas

m_i = nilai titik tengah dari setiap kelas

Contoh 1

Data berat badan dari 9 siswa laki-laki dalam satuan kilogram adalah 45, 39, 53, 45, 42, 48, 51. 45, 40. Dapatkan *mean* dari data berat badan siswa tersebut.

Penyelesaian:

Berdasarkan formula *mean* yang telah dipaparkan di persamaan (1), nilai *mean* data berat badan siswa adalah:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{jumlah\ seluruh\ berat\ badan}{jumlah\ seluruh\ siswa} \\ &= \frac{45+39+53+45+42+48+51+45+40}{9} \\ &= 45.33\end{aligned}$$

Jadi, *mean* dari berat badan siswa adalah 45,33 kg.

Contoh 2

Berikut disajikan data berkelompok dari nilai matematika siswa kelas VII di SMP Abata. Dapatkan mean dari data berikut.

Nilai	***f***

40-49	3
50-59	5
60-69	6
70-79	9
80-89	8
90-100	7

Tabel 1. Data Nilai Matematika Siswa

Penyelesaian:

Untuk dapat menyelesaikan soal seperti ini, kita dapat menggunakan formula pada persamaan (2). Namun sebelumnya, untuk lebih mempermudah proses perhitungan, kita dapat menambah kolom pada tabel xx seperti pada tabel berikut

Nilai	$\boldsymbol{f}$	**Titik Tengah (m)**	$\boldsymbol{f, m}$
40-49	3	44,5	133,5
50-59	5	54,5	272,5
60-69	6	64,5	387
70-79	9	74,5	670,5
80-89	8	84,5	676
90-100	7	95	665
Total Frekuensi	**38**		

Tabel 2. Data Nilai Matematika Siswa beserta nilai titik tengahnya

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i, m_i}{n}$$

$$= \frac{133.5 + 272.5 + 387 + 670.5 + 676 + 665}{38}$$
$$= \frac{2804.5}{38}$$
$$= 73.80$$

Jadi, diperoleh nilai mean dari data berkelompok pada tabel xx adalah 73,80.

B. Median

Median adalah nilai tengah. Median membagi data menjadi dua bagian yang sama banyak. Untuk menentukan median, kita harus mengurutkan data dari yang terkecil hingga yang terbesar, atau pun sebaliknya. Untuk mendapatkan median dari suatu data, kita harus memperhatikan terlebih dahulu banyaknya data (n). Pada kasus data tunggal, jika n ganjil, maka mediannya adalah datum yang tepat berada di tengah data terurut.

Data	Posisi ke-
25	1
23	2
19	3
18	**4**
15	5
15	6
8	7

Tabel 3. Data tunggal dan infomasi urutan/posisi datanya, dengan n ganjil

Perhatikan pada tabel 3, karena $n = 7$, ganjil, maka median dari data tersebut adalah 18, atau datum ke empat. Dengan kata lain, jika n ganjil, maka mediannya adalah $x_{\frac{n+1}{2}}$. Sedangkan pada data dengan $n$genap, mediannya dihitung dari jumlahan dua datum yang berada di tengah data terurut, dibagi 2. Dengan kata lain, median dari data dengan n genap adalah $\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)/2$

Data	Posisi ke-
25	1
23	2
19	3
18	**4**
15	**5**
15	6
8	7
7	8

Tabel 3. Data tunggal dan infomasi urutan/posisi datanya, dengan n genap

Dengan demikian, pada contoh tabel 3, median datanya adalah $\frac{18+15}{2} = 16.5$.

Pada kasus data berkelompok, diperlukan langkah-langkah khusus untuk memperoleh mediannya. Hal ini dikarenakan

Langkah 1 : Buatlah tabel distribusi frekuensi dengan interval kelas dan frekuensi.

Langkah 2 : Hitung frekuensi kumulatif data dengan menambahkan nilai frekuensi sebelumnya dengan nilai saat ini.

Langkah 3 : Temukan nilai $n$dengan menambahkan nilai dalam frekuensi.

Langkah 4 : Temukan kelas median. Jika n ganjil, mediannya adalah $\frac{n+1}{2}$. Dan jika n genap, maka median adalah rata-rata dari pengamatan ke-$n/2$ dan $(n/2) + 1$.

Langkah 5 : Temukan batas bawah interval kelas dan frekuensi kumulatif.

Langkah 6 : Terapkan rumus median untuk data yang dikelompokkan, yaitu

$$Median = l + \left(\left(\frac{n}{2} - c\right)/f\right) \times h \tag{3}$$

dengan

$l =$ batas bawah kelas median

$n =$ banyaknya data

$c =$ frekuensi kumulatif sebelum kelas interval median

$f =$ frekuensi kelas interval

$h =$ selisih antara nilai terbesar dan nilai terkecil pada kelas interval median

Contoh:

Dapatkan median dari data nilai Bahasa Arab siswa kelas IX berikut ini:

Tabel 4. Data Nilai Bahasa Arab

Nilai	**Banyaknya Siswa**
0-20	6
20-40	20
40-60	37
60-80	10
80-100	7

Penyelesaian:

Untuk memperoleh median pada data berkelompok, kita perlu menghitung frekuensi kumulatifnya terlebih dahulu.

Nilai	**Banyaknya Siswa**	**Frekuensi Kumulatif**	
0-20	6	0+6	6
20-40	20	6+20	26
40-60	**37**	**26+37**	**63**

60-80	10	63+1 0	73
80-100	7	73+7	**80**

Pada kasus ini, $n = 80$. Untuk menentukan posisi kelas mediannya, kita dapatkan terlebih dahulu $n/2 = 40$. Posisi data ke-40 ada pada kelas interval ketiga. Sehingga dari informasi tersebut, kita dapat menuliskan

$$l = 40$$

$$n = 80$$

$$c = 26$$

$$f = 37$$

$$h = 20$$

Berdasarkan formula median pada persamaan 3, didapatkan

$$\begin{aligned}
Median &= l + \left(\left(\frac{n}{2} - c\right)/f\right) \times h \\
&= 40 + \left(\left(\frac{80}{2} - 26\right)/37\right) \times 20 \\
&= 40 + ((40 - 26)/37) \times 20 \\
&= 40 + \left(\frac{14}{37} \times 20\right) \\
&= 40 + 7.56 \\
&= 47.56
\end{aligned}$$

Jadi, median dari data nilai Bahasa Arab siswa sebagaimana pada tabel 4 adalah 47,56

C. Modus

Modus juga merupakan salah satu nilai ukuran pemusatan data. Nilai ini memberi kita gambaran kasar tentang datum apa pada data yang cenderung paling sering muncul. Misalnya, suatu perguruan tinggi menawarkan 10 mata kuliah berbeda untuk mahasiswanya. Sekarang, dari informasi ini, mata kuliah yang memiliki peminat tertinggi akan dihitung sebagai modus dari data banyaknya siswa yang mengambil setiap mata kuliah. Jadi secara keseluruhan, modus memberi tahu kita tentang frekuensi tertinggi dari setiap item yang diberikan dalam kumpulan data.

Ada banyak kegunaan kehidupan nyata dan pentingnya menggunakan nilai modus. Ada banyak aspek di mana nilai rata-rata atau *mean* tidak akan cocok untuk menggambarkan pemusatan data tertentu. Misalnya, lihat contoh yang diberikan di atas. Untuk menemukan jumlah siswa terbanyak yang terdaftar dalam suatu mata kuliah, nilai mean atau median tidak akan bisa mewakilinya. Oleh karena itu, nilai modus akan lebih cocok untuk keperluan tersebut.

Data dapat memiliki lebih dari satu nilai modus, ataupun sama sekali tidak memiliki modus. Secara ringkas, tipe data berdasarkan modusnya adalah sebagai berikut

Data unimodal, yaitu data yang hanya memiliki satu modus

- Data bimodal, yaitu data yang hanya memiliki dua modus
- Data trimodal, yaitu data yang memiliki tiga modus
- Data multimodal, yaitu data yang memiliki lebih dari tiga modus

Untuk mencari modus data tunggal, kita cukup melakukannya dengan mengurutkan nilai data baik dari kecil ke besar maupun sebaliknya, kemudian mencari nilai yang paling sering muncul. Pengamatan dengan frekuensi tertinggi adalah nilai modus untuk data yang diberikan.

Contoh:

Misalkan diberikan data ukuran sepatu siswa kelas VII sebagai berikut: 37, 40, 36, 38, 38, 39, 41, 35. Maka modus dari data tersebut adalah 38. Data seperti ini disebut sebagai data unimodal, karena nilai modusnya hanya satu.

Adapun modus untuk data berkelompok dapat diperoleh dengan menggunakan formula berikut:

$$Modus = l + h\frac{(f_m - f_1)}{(f_m - f_1) + (f_m - f_2)} \qquad (4)$$

atau

$$Modus = l + h\frac{(f_m - f_1)}{2f_m - (f_1 + f_2)} \qquad (5)$$

dengan

$l =$ batas bawah kelas interval yang mengandung nilai modus

$h =$ ukuran kelas interval

$f_m =$ frekuensi kelas interval yang mengandung nilai modus

f_1 = frekuensi kelas interval sebelum kelas interval modus

f_2 = frekuensi kelas interval setelah kelas interval modus

Conto.:

Perhatikan kembali tabel 4. Dapatkan modus dari data berkelompok tersebut.

Penyelesaian:

Nilai	**Banyaknya Siswa**
0-20	6
20-40	20
40-60	37
60-80	10
80-100	7

Dari informasi pada tabel, kita dapat menuliskan

$l = 40$

$h = 20$

$f_m = 37$

$f_1 = 20$

$f_2 = 10$

$$Modus = l + h\frac{(f_m - f_1)}{2f_m - (f_1 + f_2)}$$
$$= 40 + 20\frac{(37 - 20)}{2(37) - (20 + 10)}$$
$$= 40 + 20\left(\frac{17}{74 - 30}\right)$$
$$= 40 + 20\left(\frac{17}{44}\right)$$
$$= 40 + 20(0.38)$$

$$= 40 + 7.72$$
$$= 47.72$$

Jadi, modus dari data berkelompok pada tabel 4 adalah 47,72.

Ketiga ukuran pemusatan data yang telah disajikan pada bab ini tentu memiliki karakteristik khusus yang unik. Karakter ini kemudian dapat dikaitkan dengan tipe data yang akan kita analisis. Tabel sederhana berikut menunjukkan ukuran pemusatan data yang cocok untuk tipe data tertentu.

Tipe Data	Ukuran Pemusatan Data yang Cocok
Nominal	Modus
Ordinal	Median
Interval/Rasio (simetris)	*Mean*
Interval/Rasio (asimetris)	Median

LATIHAN

1. Tentukan mean, median dan modus dari kumpulan jawaban siswa berikut terhadap pertanyaan: "*Berapa kali anda terlambat datang ke sekolah semester ini*?"

   1, 1, 0,1, 2, 2, 0, 0, 0, 3, 3,0, 3, 3, 0,2, 2, 2, 1, 1,4, 1, 1,0,3, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2,1, 1, 1, 1, 4, 4, 4,1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,1, 1, 1, 1, 1, 3,3,0, 3, 3, 1, 1, 1, 1,0, 0, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 1, 1, 1,2, 2, 2,4, 5, 5, 4, 4, 1, 1, 1, 4,1, 1, 1,3, 3, 5,3, 3, 3, 2,3, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1,3, 1, 0, 0, 0,1, 1, 3,1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1,0, 0, 2, 2, 3, 3,2, 2, 3,2, 0, 0, 1, 1,3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1,2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0,1, 1, 1, 3,1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1,2, 1, 1, 1,3, 3,5, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1,4, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4,1, 1, 1,2, 2,5, 5, 2, 3, 3, 4, 4,3,2, 2, 2, 1,5, 1,2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2,1, 1, 0,1, 1, 1,3, 3, 3, 3, 3

2. Berikut merupakan data kedalaman bendungan di beberapa wilayah di Indonesia

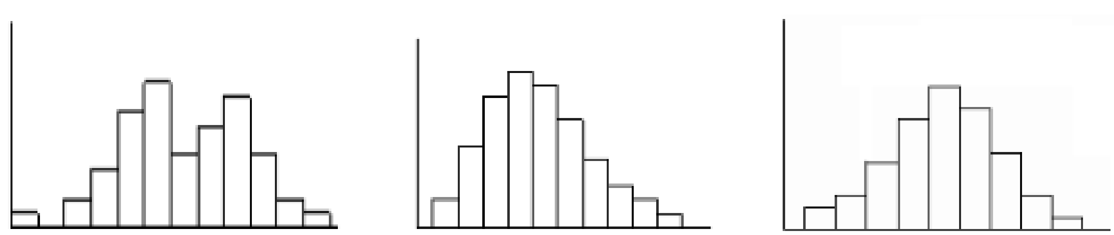
Nama Bendungan	Kedalaman (ft.)

Bendungan A	756
Bendungan B	726
Bendungan C	710
Bendungan D	568
Bendungan E	564
Bendungan F	440
Bendungan G	440

Dapatkan nilai mean, median, dan modus dari data tersebut.

3. Diketahui data tunggal terkait nilai matematika siswa kelas VIII adalah sebagai berikut: 60, 70, 65, 50, 82, 91, 75, x, 100, 65. Jika nilai rata-rata dari 10 siswa tersebut adalah 72, maka tentukan nilai x.

4. Perhatikan histogram berikut. Untuk setiap histogram, jawablah pertanyaan berikut:
a. Bagaimana anda mendeskripsikan distribusi data pada histogram? Normal, Condong kanan, condong kiri, ataukah bimodal?
b. Ukuran pemusatan data yang mana yang cocok untuk menggambarkan distribusi data?
c. Apakah nilai mean atau mediannya lebih tinggi? Atau nilainya sama? Mengapa? Jelaskan.



BAB XIV ARITMATIKA SOSIAL

Hesi Kumalasari

Pada bab ini dibahas mengenai aritmatika sosial. Kegiatan perekonomian/perdagangan merupakan kegiatan yang sering dilakukan dalam kehidupan sehari-hari. Kita seringkali melakukan kegiatan jual beli sehingga tidak asing dengan istilah harga jual, harga beli, laba, rugi, diskon dan sebagainya. Istilah-istilah ini merupakan bagian dari matematika yang berkaitan dengan perhitungan keuangan dalam perdagangan yang disebut juga dengan aritmatika sosial. Sebelum membahas nya akan dipaparkan terlebih dahulu apa arti dari p%.

$$\boldsymbol{p\ \% = p : 100}$$

Keterangan: p adalah besarnya persentase

Contoh 1

Nyatakanlah bilangan–bilangan berikut dalam desimal biasa!

a. 10% c. 35,25%

b. 9,5% d. 0,63%

Penyelesaian:

a. 10% = 10: 100 = 0,1

b. 9,5% = 9,5: 100 = 0,095

c. 35,25% = 35,25: 100 = 0,3525

d. 0,63% = 0,63: 100 = 0,0063

Selanjutnya akan dibahas bagaimana bentuk desimal dinyatakan dalam bentuk persentase. Untuk mengubah bentuk desimal ke dalam bentuk persentase dapat menggunakan rumus berikut:

$$\boldsymbol{A \times 100\% = A\%}$$

Keterangan: A adalah nilai dalam desimal

Contoh 2

Nyatakan bilangan-bilangan berikut dalam persen!

a. 0,46 c. 9,4

b. 0,05 d. 0,7

Penyelesaian:

a. 0,46 x 100% = 46%

b. 0,05 x 100% = 5%

c. 9,4 x 100% = 940%

d. 0,7 x 100% = 70%

Selain itu, perlu diingat kembali tentang operasi hitung pada bilangan bulat, bilangan pecahan, persamaan linear satu variabel, dan operasi bentuk aljabar.

A. Harga Jual, Harga Beli, Laba dan Rugi

Pada kegiatan jual beli terdapat istilah harga jual/harga penjualan, harga beli/harga pembelian, laba/untung dan rugi. Misalkan seorang pedagang membeli suatu barang untuk dijual kembali, jika harga penjualan barang tersebut lebih dari harga pembelian maka pedagang memperoleh laba/untung. Sebaliknya jika harga penjualan barang tersebut kurang dari harga pembelian, maka pedagang mengalami rugi. Berikut rumus yang dapat digunakan untuk menentukan harga beli, harga jual dan laba:

$$\boxed{\boldsymbol{Laba = harga\ penjualan - harga\ pembelian}}$$

Contoh 3

Seorang penjual pakaian bernama Bu Laramenjual sebuah baju kepada pelanggan dengan harga Rp92.500,00. Baju tersebut sebelumnya ia beli dengan hargaRp75.000,00. Berapa laba yang diperoleh Bu Lara?

Penyelesaian:

Harga jual baju = 92.500

Harga beli baju = 75.000

Laba yang diperoleh:

$$\begin{aligned}\text{Laba} &= \text{harga penjualan} - \text{harga pembelian}\\ &= 92500 - 75000\\ &= 17500\end{aligned}$$

Sehingga laba yang diperolehBu Lara Rp17.500,00

Contoh 4

Rani adalah pemilik toko sepatu di kota A, ia menjual sebuah sepatu dengan harga Rp63.000,00 dan memperoleh laba dari hasil penjualan sebesar Rp22.500,00. Hitung berapa modal yang ia gunakan untuk membeli sepatu tersebut!

Penyelesaian:

Harga jual sepatu = 63.000

Laba = 22.500

Harga beli sepatu:

$$\text{harga pembelian} = \text{harga penjualan} - \text{laba}$$
$$= 63000 - 22500$$
$$= 40500$$

Sehinggaharga beli sepatu tersebut sebesar Rp40.500,00

Sementara itu, untuk menghitung rugi dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{Rugi} = \text{harga pembelian} - \text{harga penjualan}$$

Contoh 5

Amanda membeli tas di salah satu toko online dengan harga Rp77.500,00, karena suatu hal tas tersebut ia jual kembali dengan harga Rp52.500,00.Berapa kerugian yang dialami oleh Amanda?

Penyelesaian:

Harga beli tas = 77.500

Harga jual tas = 52.500

Rugi:

$$\text{Rugi} = \text{harga pembelian} - \text{harga penjualan}$$
$$= 77500 - 52500$$
$$= 25000$$

Sehingga rugi yang dialami Amanda sebesarRp25.000,00

Contoh 6

Seorang pemilik toko mainan menjual mobil-mobilan dengan harga Rp35.000,00 dan memperoleh rugi sebesar Rp2.500,00. Hitunglah berapa harga modal ia membeli mobil-mobilan tersebut!

Penyelesaian:

Harga jual mobil-mobilan = 35.000

Rugi = 2.500

Harga beli mobil-mobilan:

$$\text{harga pembelian} = \text{harga penjualan} + \text{Rugi}$$

$$= 35000 + 2500$$

$$= 37500$$

Sehinggaharga beli mobil-mobilan sebesarRp37.500,00

Selain harga jual, harga beli, laba dan rugi dikenal juga istilahpersentase laba dan persentaserugi. Untuk menghitung persentase laba dapat menggunakan rumus berikut:

$$\text{Persentase Laba} = \frac{\text{harga penjualan} - \text{harga pembelian}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

Atau

$$\text{Persentase Laba} = \frac{\text{Laba}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

Contoh 7

Perhatikan Kembali contoh 3. Berapa persentase laba yang diperoleh Bu Lara jika ia membeli baju kemudian menjualnya kembali dengan harga beli dan harga jual seperti pada contoh 3.

Penyelesaian:

Cara 1:

Harga jual baju = 92.500

Harga beli baju = 75.000

Persentase laba yang diperoleh:

$$\text{Persentase Laba} = \frac{\text{harga penjualan} - \text{harga pembelian}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

$$= \frac{92500 - 75000}{75000} \text{x}100\%$$

$$= \frac{17500}{75000} \text{x}100\%$$

$$= 23{,}33\%$$

Cara 2:

Jika telah diketahui laba berdasarkan perhitungan pada contoh 3 maka dapat langsung dihitung sebagai berikut:

Laba yang didapatkan berdasarkan perhitungan pada contoh 3 Rp17.500,00

Persentase laba yang diperoleh:

$$\text{Persentase Laba} = \frac{\text{Laba}}{\text{harga pembelian}} \text{x} 100\%$$

$$= \frac{17500}{75000} \text{x} 100\%$$

$$= 23{,}33\%$$

Sehinggapersentase laba yang diperoleh Bu Lara sebesar 23,33%.

Contoh 8

Pak Arif membeli sepatu untuk dijual kembali. Modal Pak Arif membeli sepatu tersebut Rp96.000,00 dan memperoleh laba 20%. Hitunglah berapa harga jual sepatu tersebut!

Penyelesaian:

Harga beli sepatu = 96000

Laba:

$$\text{Laba} = \text{Persentase laba x harga pembelian}$$

$$= 20\% \text{ x } 96000$$

$$= 19200$$

Harga jual sepatu:

$$\text{Harga penjualan} = \text{harga pembelian} + \text{laba}$$

$$= 96000 + 19200$$

$$= 115200$$

Sehingga harga jual sepatu tersebut adalah Rp115.200,00.

Sementara itu untuk menghitung persentase rugi dapat menggunakan rumus berikut:

$$\text{Persentase Rugi} = \frac{\text{harga pembelian} - \text{harga penjualan}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

Atau

$$\text{Persentase Rugi} = \frac{\text{Rugi}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

Contoh 9

Perhatikan Kembali contoh 5. Hitunglah persentase kerugian yang dialami oleh Amanda pada contoh 5 tersebut!

Penyelesaian:

Cara 1:

Harga beli tas = 77.500

Harga jual tas = 52.500

Persentase rugi yang diperoleh:

$$\text{Persentase Rugi} = \frac{\text{harga pembelian} - \text{harga penjualan}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

$$= \frac{77500 - 52500}{77500} \text{x}100\%$$

$$= \frac{25000}{77500} \text{x}100\%$$

$$= 32{,}26\%$$

Cara 2:

Jika telah diketahui rugi berdasarkan perhitungan pada contoh 5 maka dapat langsung dihitung sebagai berikut:

Rugi yang didapatkan oleh Amanda berdasarkan perhitungan pada contoh 5 Rp25.000,00

Persentaserugi yang diperoleh Amanda:

$$\text{Persentase Rugi} = \frac{\text{Rugi}}{\text{harga pembelian}} \text{x}100\%$$

$$= \frac{25000}{77500} \text{x} 100\%$$

$$= 32{,}26\%$$

Sehingga persentase rugi yang diperoleh Amanda sebesar 32,26%.

Contoh 10

Dindamembeli baju dengan harga Rp75.000,00 untuk dijual kembali. Berapakah harga jual baju tersebut jika diketahuiternyata Dinda mengalami kerugian sebesar 10%?

Penyelesaian:

Harga beli baju =55.000

Rugi:

$$\text{Rugi} = \text{Persentase rugi x harga pembelian}$$

$$= \frac{10}{100} \text{ x } 75000$$

$$= 7500$$

Harga jual baju

$$\text{Harga penjualan} = \text{harga pembelian} - \text{rugi}$$

$$= 75000 - 7500$$

$$= 67500$$

Sehingga harga jual baju tersebut adalah Rp60.500,00.

B. Rabat (Diskon), Bruto, Neto dan Tara

Istilah lain yang juga sering kita dengar dalam perekonomian adalah Rabat/Diskon. Rabat/diskon merupakan potongan harga penjualan pada saat transaksi jual-beli. Perbedaan antara rabat dan diskon terletak pada jumlah barang yang sedang diperjualbelikan. Diskon adalah istilah potongan harga untuk sebuah barang, sementara itu rabat biasanya untuk potongan harga dari barang yang jumlahnya lebih dari satu atau barang grosir. Hampir di semua sektor penjualan memberlakukan rabat/diskon ini dengan maksud agar menarik minat para pembeli di antaranya pada penjualan alat rumah tangga, pakaian, makanan dan minuman, elektronik, jasa, serta lainnya. Untuk menentukan rabat/diskon dapat menggunakan rumus berikut:

$$diskon\ = Harga\ sebelum\ diskon - harga\ setelah\ diskon$$

Contoh 11

Sebuah sepatu harga awalnya sebesarRp85.000,00. Untuk menarik minat pembeli penjualnya menurunkan harganya menjadi Rp68.000,00. Hitunglah berapa diskon yang diberikan penjual untuk sepatu tersebut?

Penyelesaian:

Harga sebelum diskon = 85.000

Harga setelah diskon = 68.000

Diskon untuk sepatu tersebut:

$$\begin{aligned} \text{Diskon } &= \text{harga sebelum diskon} - \text{harga setelah diskon} \\ &= 85000 - 68000 \\ &= 17000 \end{aligned}$$

Sehingga sepatu tersebut dikenakan diskon sebesar Rp17.000,00.

Contoh 12

Toko pakaian “Jaya Abadi” sedang mengadakan promo besar-besaran pada berbagai barang yang dijualnya. Satu setelan batik merk X yang semula harganya Rp370.000,00 diberikan diskon 20%. Jika Mira hendak membeli barang tersebut. berapa yang harus dibayar oleh Mira?

Penyelesaian:

Harga setelan batik sebelum diskon = 370.000

Diskon = 20 % x 370.000 = 74.000

$$\begin{aligned} \text{Harga setelah diskon } &= \text{harga sebelum diskon} - \text{diskon} \\ &= 370000 - 74000 \\ &= 296000 \end{aligned}$$

Sehingga harga yang harus dibayar oleh MiraRp296.000,00.

Selain itu berkaitan dengan berat suatu barang terdapat istilah Bruto, Neto dan Tara.Bruto diartikan sebagai berat kotor yaitu berat suatu benda beserta kemasannya, neto atau berat bersih yaitu berat sebenarnya suatu barang tanpa kemasannya, dan tara adalah selisih antara bruto dan neto atau dapat diartikan juga dengan berat kemasannya saja. Rumus yang dapat digunakan untuk menentukan bruto, neto dan tara sebagai berikut:

$$\text{Neto} \ = \text{Bruto} - \text{Tara}$$

Contoh 13

Suatu barang diketahuimemiliki bruto 50 kg, taranya 1.5% dari brutonya. Berapakah Netonya?

Penyelesaian:

Bruto = 50 kg

Tara = 1,5 % x 50 kg = 0,75 kg

$$\begin{aligned} \text{Neto} \ &= \text{Bruto} - \text{Tara} \\ &= 50 - 0{,}75 \\ &= 49{,}25 \end{aligned}$$

Sehingga Netonya 49,25 kg

Contoh 14

Suatu barang memiliki bruto 7,5 kg, neto6,9 kg. Berapakah tara nya?

Penyelesaian:

Bruto = 7,5 kg

Neto = 6,9 kg

$$\begin{aligned} \text{Tara} \ &= \text{Bruto} - \text{Neto} \\ &= 7{,}5 - 6{,}9 \\ &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Sehingga Taranya 0,6 kg

Contoh 15

Satu karung beras kemasan diketahuimemiliki Neto 25 kg dan taranya 1.2% dari Netonya. HitunglahBruto dari satu karung beras tersebut!

Penyelesaian:

Neto = 25 kg

Tara = 1.2 % x 25 kg = 0,3 kg

$$\begin{aligned} \text{Bruto} &= \text{Neto} + \text{Tara} \\ &= 25 + 0{,}3 \\ &= 25{,}3 \end{aligned}$$

Sehingga Bruto25,3 kg

C. BUNGA TUNGGAL

Dalam kehidupan sehari-hari tidak jarang kita melakukan transaksi di sebuah bank. Pada transaksi tersebut seseorang dapat menabung atau meminjam uang ke bank dan suatu bank biasanya menerapkan bunga. Bunga merupakan uang yang dibayarkan peminjam pada pemilik uang selain uang pokok.Jika kita menyimpan uang di bank, maka uang kita akan bertambah karena mendapat bunga. Selain itu, jika kita akan meminjam uang pada bank pasti dikenai bunga.

Jenis bunga tabungan maupun bunga pinjamanyang akan diperoleh bisa berupa bunga tunggal atau bunga majemuk. Dalam buku ini hanya akan dibahas mengenai bunga tunggal atau bunga dari modal saja.Bunga tunggal adalah bunga yang timbul pada setiap akhir jangka waktu tertentu yang tidak mempengaruhi besarnya modal yang dipinjam.Jika kita memperbungakan modal (uang) sebesar M dengan bunga tunggal sebesar P%per tahun, dan besarnya bunga dinyatakan dengan I, maka berlaku:

$$I \ = M \ x \ P\%$$

Catatan: Persen bunga selalu dinyatakan untuk satu tahun kecuali jika ada keterangan lain pada soal.

Contoh 16

Anisa memiliki tabungan di Bank “Sejahtera” sebesar Rp500.000,00 dengan bunga 10% per tahun. Hitunglah jumlah uang Anisa setelah 6 bulan.

Penyelesaian:

Bunga 1 tahun:

$$I = M \; x \; P\%$$
$$= 500000 \; x \; 10\%$$
$$= 50000$$

Bunga 6 bulan = 6/12 x 50000

= 25000

Sehingga jumlah uang Anisa setelah disimpan selama 6 bulan pada Bank “Sejahtera” menjadi:

Rp500.000,00 + Rp25.000,00 = Rp525.000,00

Bunga tunggalterdiri dari beberapa jenis yaitubunga biasa, bunga eksak, bunga sederhana, bunga semesteran dan bunga tahunan. Berikut dijelaskan berbagai jenis bunga tersebut.

1. Bunga tahunan merupakan bunga yang berdasarkan perhitungan dalam setahun dengan rumus seperti yang sudah dituliskan di atas.
2. Bunga biasa merupakan bunga yang dihitung berdasarkan tahun komersial.Setelahshari, besarnya bunga dapat dihitung sebagai berikut:

$$I = \frac{s}{360} x \; M \; x \; P\%$$

Catatan: jika satu tahun ada 360 hari.

Contoh 17

Andika menabung uang di suatu Bank sebesar Rp1.500.000,00 dengan suku bunga 6% pertahun. Berapa banyak uang Andika setelah menabung 2 bulan ?

Penyelesaian:

Uang yang ditabung =1500000

Waktu menabung = 2 bulan = 60 hari.

Besar bunga setelah 60 hari adalah

$$I = \frac{s}{360} x \; M \; x \; P\%$$
$$= \frac{60}{360} x \; 1500000 \; x \; 6\%$$
$$= 15000$$

Jadi jumlah uang Fani setelah 2 bulan menjadi:

Rp1.500.000,00 + Rp15.000,00 = Rp1.515.000,00.

3. Bunga eksak merupakan bunga yang dihitung berdasarkan jumlah hari dalam satu tahun secara eksak yaitu 365 hari kecuali untuk tahun kabisat 366 hari.

Setelah s hari, besarnyabunga:

$$I = \frac{s}{365} x\ M\ x\ P\%$$

Catatan: jika satu tahun 365 hari (tahun komariah)

Atau

$$I = \frac{s}{366} x\ M\ x\ P\%$$

Catatan: jika satu tahun ada 366 hari (tahun kabisat)

4. Bunga sederhana merupakan bunga pada akhir suatu periode tertentu yang dihitung dari uang pokok, bunganya sama dengan perkalian waktu, tingkat bunga dan uang pokok.

   Contoh 18

   Adhar menabung uang di sebuah bank rakyat sebesar Rp3.500.000,00 dengan tingkat bunga 5% pertahun. Berapa bunga uang Adhar yang ditabung selama 4 tahun?

   Penyelesaian:

   Bunga uang Adhar selama setahun:

$$I = M\ x\ P\%$$
$$= 3500000\ x\ 5\%$$
$$= 175000$$

   Sehingga bunga uang Adhar selama 4 tahun = 4 x 175000 = Rp700.000,00

5. Bunga semesteran merupakan suku bunga yang dikenakan dan dihitung setiap enam bulan.

   Setelah t bulan, besarnya bunga:

$$I = \frac{t}{12}\ x\ M\ x\ P\%$$

   Contoh 19

   Bu Nina mau meminjam uang di bank sebesar Rp11.000.000,00 dengan masa pinjaman selama 6 bulan. Pihak bank memberikan bunga 25% pertahun. Berapa uang yang harus dikembalikan oleh Bu Nina kepada bank?

   Penyelesaian:

   Besar bunga yang harus di bayar Bu Nina ke bank:

$$I = \frac{t}{12}\ x\ M\ x\ P\%$$
$$= \frac{6}{12}\ x\ 11000000\ x\ 25\%$$

$$= 1375000$$

Jumlah uang yang dikembalikan Bu Nina ke bank setelah 6 bulan menjadi: Rp11.000.000,00 + Rp1.375,00 = Rp12.375.000,00

LATIHAN

1. Bu Lita membeli baju seharga Rp52.500,00 untuk dijual kembali. Saat menjualnya ke seorang pembeli baju tersebut laku dengan harga Rp67.000,00. Apakah Bu Lita mengalami keuntungan atau kerugian? Berapakah laba/rugi yang diperoleh Bu Lita?
2. Raka membeli jam tangan untuk dijual kembali. Harga beli jam tangan tersebut Rp230.000,00 dan raka memperoleh laba 18%. Berapakah harga jual jam tangan tersebut?
3. Seorang penjual buah menjual pir dengan harga Rp27.000,00/kg. Berapakah modal iamembeli1 kg buah pir tersebut jika dari hasil penjualan iamengalami kerugian Rp8.500,00?
4. Bara membeli barang yang harga awalnya Rp105.000,00. Setelah mendapatkan diskon ia hanya membayar Rp84.000,00. Berapa persen diskon yang didapatkanBara?
5. Nina membeli barang di sebuah toko, dengan potongan 25% ia hanya membayar sebesar Rp240.000,00. Berapa harga awal barang tersebut?
6. Ijul membeli 3 karung beras. 1 karung nya memiliki Neto 25,5 kg dan bruto 25,8 kg. Berapakah tara dari 3 karung beras tersebut?
7. Arif diminta ibunya membeli 2 karung tepung terigu untuk kebutuhan usahajajanan tradisional milik keluarganya. Setiap karung tepung terigu memiliki berat neto 50 kg, Berapakah bruto dari 2 karung tepung terigu tersebut jika diketahui tara dari masing-masing karung 1% dari netonya?
8. Suatu karung beras memiliki berat bruto 10 kg dan taranya 0,5 % dari brutonya. Berapakah Netonya?
9. Bu Ani meminjam di sebuah bank sebanyak Rp2.400.000,00 dengan bunga 25,5% pertahun. BuAni harus mengembalikan pinjaman dan bungaa secara cicilan setiap bulan selama 1 tahun. Berapa besar cicilan Bu Ani?
10. Laras menyimpan uang di suatu Bank sebanyak Rp550.000,00, diketahui bunga bank tersebut 20% per tahun. Tanpa menghitung bunga 1 tahun, hitunglah bunga uang Laras setelah 4 bulan?

DAFTAR PUSTAKA

Adjie, Nahrowi dan R. Deti Rostika. (2009). *Konsep Dasar Matematika*. Bandung: UPI Press

De Walle, John A. Van. (1990). *Elementary School Mathematics*. White Plains, New York

Musser, G. L., & Burger, W. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Neew York: Maxwell Macmellan International.

Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (1988). *Mathematics for elementary teachers:* A contemporary approach. New York: Macmillan.

Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Soedjadi, R. (2000). *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia. Jakarta*: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional.

Soedjadi, R. (2007). *Masalah Kontekstual Sebagai Batu Sendi Matematika Sekolah. Depdiknas*, Unesa, dan PSMS.

Sibarani, Maslen. 2014. *Aljabar Linier*. Penerbit Raja Grafindo Persada, Jakarta.

Sutojo, dan Bowo. 2010. *Teori Dan Aplikasi Aljabar Linier Dan Matriks*. Penerbit : Andi Publisher

Novia Ariyanti, Nuril Lutvi Azizah, *Buku Ajar Mata Kuliah Matematika Diskrit* , Umsida Press: 2020

Adji, Nahrowi. *Pemecahan Masalah Matematika Bandung*: UPI Press, 2008.

Ina V.S. Mullis. Et al. *TIMMS 2011 International Result in Mathematics.* Chestnut Hill, MA: Boston College., 2012.

NCTM. *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. ed. Becker and Shimada.

Reston: NTCM INC.

Polya, G. *How to Solve It: A New Aspects of Mathematical Method*. New Jersey: Princeton University Press, 1985.

Sudiarta, Igusti Putu. *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berorientasi Pemecahan Masalah.*

Kontekstual Open Ended. *Jurnal Pendidikan dan Pengajaran*, Vol. 38, no 1. Tahun 2005, h, 582.
Suherman, Erman. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: UPI, 2003.

GLOSARIUM

Astronomi	: Ilmu yang mempelajari tentang matahari, bulan, bintang, dan planet-planet lainnya; ilmu falak.
Bilangan Asli	: Bilangan bulat positif dari satu hingga tak terhingga.
Bilangan Bulat	: Bilangan yang terdiri dari bilangan positif, bilangan negatif, dan juga bilangan nol.
Bilangan Cacah	: Bilangan cacah adalah gabungan bilangan nol dan bilangan asli.
Bilangan Rasional	: Bilangan yang dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat a dan b, ditulis a/b dengan syarat $b \neq 0$.
Bilangan Riil	: Sistem bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk decimal.
Fakturisasi	: Proses mengubah dua atau lebih factor yang dapat membuat ekspresi lebih mudah dikerjakan.
Geografi	: suatu cabang ilmu yang mempelajari tentang bumi, iklim, flora, fauna, penduduk, cuaca, udara, dan lain-lain yang berinteraksi dengannya.
Pecahan	: Bagian dari satu keseluruhan dari suatu kuantitas tertentu.
Periode Gupta	: Masa keemasan India dalam ilmu pengetahuan, matematika, astronomi, agama, dan filsafat.
Relasi	: Suatu yang menyatakan hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan.
Relasi Invers	: kebalikan dari relasi yamg dinyatakan.
Subsititusi	: rumus yang dipakai dalam ilmu Matematika untuk menyelesaikan suatu masalah dengan cara menggabungkan persamaan-persamaan yang telah dikenal.
Trigonometri	: satu cabang dalam ilmu Matematika yang mempelajari mengenai sudut segitiga.

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR TIGA BAHASA

MATEMATIKA

Untuk Siswa MTs & MA

Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram
UPT. Pengembangan Bahasa (UPB)
Pendidikan Bahasa Arab (PBA)
Tadris Matematika (TMTK)
Tadris Bahasa Inggris (TBI)
Jalan Gajah Mada No.100 Jempong Baru-Mataram
Website: www.uinmataram.ac.id

University of Science & Technology, Yemen (USTY)

Pengembangan
Bahan Ajar Tiga Bahasa
(Bahasa Indonesia, Arab dan Inggris)

MATEMATIKA

untuk Madrasah Tsanawiyah (MTs) & Aliyah (MA)

ISBN 978-623-317-332-2

9 786233 173322

Sanabil