Al Kusaeri

BAHAN AJAR MATEMATIKA DASAR

PROGRAM STUDI TADRIS MATEMATIKA
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MATARAM 2020

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

KATA PENGANTAR DEKAN

Puji syukur kami haturkan kehadirat Allah SWT, atas karunia rahmatNya program Kompetisi Penulisan Buku Referensi dn Bahan Ajar Fakultas Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Mataram telah terselenggara dengan baik berupa terbitnya buku referensi dan bahan ajar karya dosen.

Program tersebut sebagai salah satu upaya meningkatkan kualitas atmosfer ilmiah di lingkungan kampus, khususnya di Fakultas tarbiyah dan Keguruan. Dengan program ini, dosen termotivasi untuk menulis dan berkarya sekaligus berlomba-lomba tampil menjadi dosen yang produktif. Implikasi berikutnya, karya-karya ilmiah mereka memperkaya khazanah keilmuan civitas akademika sekaligus menawarkan solusi-solusi akademik terhadap sejumlah persoalan, khususnya yang dihadapi warga kampus.

Untuk mencapai tujuan tersebut, naskah-naskah buku yang akan diterbitkan harus melalui tahapan penyuntingan yang ketat oleh Tim Penyunting yang memiliki kompetensi keilmuan yang sama. Langkah ini ditempuh untuk memastikan buku yang diterbitkan betul-betul memenuhi standar ilmiah, baik dari aspek metodologi maupun isi.

Sebagai program yang kedua di Fakultas, Kompetisi Penulisan Buku Referensi dan Bahan Ajar ini dirasakan masih memiliki kekurangan yang mendasar kendali usaha mencapai mutu tinggi sudah ditempuh. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami tetap harapkan.

Dekan FTK UIN
Mataram

Dr. Hj. Lubna, M.Pd

PRAKATA PENULIS

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga buku Trigonometri dapat penulis rampungkan tepat pada waktunya.

Matematika Dasar merupakan matakuliah yang wajib ditempuh oleh mahasiswa Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Mataram. Hal ini yang menjadi syarat penulis untuk menulis bahan ajar Matematika Dasar sebagai salah satu referensi yang digunakan oleh mahasiswa dalam menempuh matakuliah Matematika Dasar.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Mataram yang telah memfasilitasi terbitnya buku ini.

Dalam penyusunan bahan ajar ini penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan. Sehingga penulis sangat mengharapkan sumbangan pemikiran dari pembaca. Baik itu berupa saran dan kritik yang sifatnya membangun untuk dapat menyempurnakan buku seperti ini di masa-masa yang akan datang.

Penulis sangat berharap bahan ajar Matematika Dasar ini dapat bermanfaat bagi kami khususnya dan mahasiswa-mahasiswa Tadris Matematika pada umumnya demi peningkatan kemampuan kita dalam memahami matematika

Mataram, 30 September 2020

Penulis

RENCANA PEMBELAJARAN SEMSTER (RPS)

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MATARAM
PRODI MATEMATIKA FTK
Jalan Gajah Mada Nomor 100 Jempong Baru, Mataram Tlp. (0370) 620783/620784 Fax. (0370) 620784
http://www.uinmataram.ac.id email: pascasarjana@uinmataram.ac.id

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)
(Berdasarkan Permen Ristekdikti Nomor 44 Tahun 2015 Pasal 12)

Nomor Dokumen:			**Nomor Revisi:**		**Tanggal Penyusunan: 28 Nopember 2020**	
Mata Kuliah: Matematika Dasar		**Semester: I**	**Bobot (SKS): 3**		**Kode Mata Kuliah:**	
Prodi: Tadris Matematika			**Dosen Pengampu: Dr. Al Kusaeri, M.Pd.**			
Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)		Mahasiswa memahami tentang hakekat matematika serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan logika, himpunan, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan.				
Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)		Melalui serangkaian tatap muka, penugasan, dan diskusi diharapkan mahasiswa mampu menjelasakan tentang hakekat matematika dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan logika, himpunan, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan.				
Deskripsi Mata Kuliah		Mata kuliah ini diberian kepada mahasiswa untuk dapat memahami hakekat matematika sebagai dasar memahami objek kajian matematika pada tingkat lebih lanjut. Melalui kuliah ini juga mahasiswa akan memahami pola pikir matematis yang berdasarkan prinsip logika. Sebagai salah satu mata kuliah awal, akan dibahas juga tentang fungsi, himpunan, persamaan dan pertidaksamaan. Pemahaman tentang konsep tersebut akan membantu siswa dalam memahami berbagai bentuk matematis pada tingkat lanjutan terutama dalam meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam menganalisis bentuk matematika dalam usaha membuktika kebenaran konsep matematika.				
(1) Minggu Ke-	**(2) Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran (Kompetensi Dasar)**	**(3) Bahan Kajian (Materi)**	**(4) Metode Pembelajaran**	**(5) Alokasi Waktu**	**(6) Pengalaman Belajar Siswa (Deskripsi Tugas)**	**(7) Kriteria Penilaian**
I	- Menjelaskan pengertian matematika - Menjelaskan objek	Pengantar Perkuliahan Hakekat Matematika	Ceramah Tanya jawab	150’	Mahasiswa memahami alur proses perkuliahan samapi akhir.	Partisipasi dalam diskusi dan

	matematika - Menjelaskan ruang lingkup matematika				✓ Melalui diskusi mahasiswa dapat mengungkapkan pendapatnya tentang matematika sebagai disiplin keilmuan ✓ Mahasiswa dapat memahami dan membedakan objek yang menjadi kajian matematika sekolah ✓ Melalui proses tanya jawab mahasiswa memahami dan mampu menjelaskan ruang lingkup kajian matematika.	argumentasi
II	- Menjelaskan pengertian logika - Menjelaskan pengertian pernyataan - Membedakan hal-hal yang menghilangkan makna pernyataan - Membuat contoh pernyataan	Pengertian Umum Logika dan Pernyataan	Ceramah Tanya jawab	150’	✓ Mahasiswa mamahami dan mampu menjelaskan makna logika disertai dengan contoh hasil berpikir logis. ✓ Mahasiswa dapat menentukan syarat cukup sebuah kaliamat yang dinyatakan sebagai sebuah pernyataan ✓ Mahasiswa dapat menyusun dan membedakan mana yang termasuk pernyataan dan bukan.	Partisipasi dalam diskusi dan argumentasi
III	- Membuat contoh negasi pernyataan - Membuat contoh pernyataan - Membedakan pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk	Ingkaran (Negasi), Pernyataan tunggal dan majemuk	Ceramah Diskusi latihan	150’	✓ Mahasiswa dapat menjelasakan makna negasi dan contohnya ✓ Mahasiswa dapat memahami danmengidentifikasi ide pokok dalam satu pernyataan ✓ Mahasiswa dapat menyusun	Partisipasi dalam kelas penugasan

					dan menunjukkan nilai kebenaran pernyataan majemuk dengan menunjukkan tabel operasi logika.	
IV	- Mengetahui hokum-hukum logika - Membuktikan ekuivalensi hokum-hukum logika	Hukum-hukum Logika	Ceramah Diskusi latihan	150’	✓ Mahasiswa dapat menjelasakan makna pernyataan ekuivalen ✓ Mahasiswa dapat membuktikan nilai kebenaran hukum-hukum logika	Partisipasi Kinerja Dan presentasi
V	- Menentukan nilai kebenaran implikasi, biimplikasi - Menentukan invers, konvers, dan kontraposisi	Pernyataan bersyarat, invest, konves dan kontraposisi	Ceramah Latihan Diskusi	150’	✓ Mahasiswa dapat menunjukkan tabel kebenaran konsep implikasi dan biimplikasi ✓ Mahasiswa dapat menyusun kalimat yang termasuk dalam inves, konvers, dan kontraposisi	Partisipasi dan argumentasi
VI	- Menentukan kontradiksi - Menentukan tautologi - Menentukan kontingensi - Menentukan ekuivalensi	Bentuk-bentuk pernyataan	Ceramah Latihan diskusi	150’	✓ Mahaiswa dapat menyusun bentuk kalimat menggunakan perakit logika ✓ Mahasiswa dapat menentukan bentuk pernyataan yang bersifat kontradiksi, tautologi, kontingensi, dan ekuivalensi ✓ Mahasiswa dapat merumuskan berbagai bentuk pernyataan majemuk dengan memenuhi salah satu sifat tertentu.	Kinerja Partisipasi dan argumentasi
VII	- Menentukan ingkaran	Ingkaran pernyataan	Diskusi	150’	✓ Mahasiswa dapat	Partisipasi

	konjungsi - Menentukan ingkaran disjungsi	majemuk	latihan		merumuskan pernyataan dengan penghubung logika serta ingkarannya ✓ Mahasiswa dapat menentukan dan membuktikan nilai kebenaran ingkaran pernyataan majemuk.	Argumentasi Kinerja
VIII	**UJIAN TENGAH SEMESTER (UTS)**					
IX	- Menjelaskan pernyataan kuantor - Menentukan kuantor universal - Menentukan kuantor ekstensial - Menentukan invers pernyataan berkuantor	Pernyataan kuantor	Ceramah Diskusi Latihan	150’	✓ Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan konsep pernyataan berkuantor ✓ Mahasiswa dapat membuat contoh pernyataan yang termasuk dalam kuantor universal dan ekstensial ✓ Mahasiswa dapat membedakan contoh pernyataan berkuantor ✓ Mahasiswa dapat menentukan negasi pernyataan berkuantur	Partisipasi dan argumentasi
X	- Membuat Argument - Membuktikan keabsahan argument - Melakukan penarikan kesimpulan	Penalaran logis	Ceramah Diskusi Latihan	150’	✓ Mahasiswa dapat mengajukan argument yang valid dalam proses penarikan kesimpulan ✓ Mahasiswa dapat melakukan penarikan kesimpulan ✓ Mahasiswa dapat membedakan cara penarikan kesimpulan yang termasuk modus ponen, modus tolen, dan silogisme	Kinerja, Partisipasi dan argumentasi
XI	- Dapat melakukan pembuktian matematika	Pembuktian	Diskusi Ceramah	150’	✓ Mahasiswa dapat menentukan cara pembuktian yang tepat	Partisipasi dan

	secara langsung - Dapat melakukan pembuktian matematika secara tidak langsung				dalam membuktikan kebenaran sebuah pernyataan ✓ Mahasiswa dapat melakukan dan menunjukkan contoh pembuktian langsung dan tidak langsung	argumentasi
XII	- Menjelaskan pengertian himpunan - Menyebutkan jenis-jenis himpunan - Membuat contoh jenis-jenis himpunan	Himpunan	Diskusi Ceramah	150’	Mahasiswa dapat membedakan kumpulan yang termasuk himpunan atau bukan Mahasiswa dapat menjelasakan dan membuat contoh berbagai jenis himpunan	Partisipasi dan argumentasi
XIII	- Menyelesaikan permasalahan himpuanan - Membuat contoh himpunan	Operasi himpunan	Diskusi latihan	150’	Mahasiswa memahami berbagai konsep operasi himpunan Mahasiwa dapat menunjukkan dalam bentuk diagram ven yang termasuk gabungan, irisan, himpunan bagian, perkalian, selisih, beda setangkup, serta himpunan kuasa dari satu himpunan Mahasiswa dapat menunjukkan berbagai contoh operasi himpunan dan menjelaskannya.	Kinerja, partisipasi, dan argumentasi
XIV	- Menjelaskan pengertian fungsi - Menentukan jenis-jenis fungsi - Menyelsaikan masalah-masalah relasi dan fungsi - Menyajikan bentuk relasi dan fungsi	Relasi dan fungsi	Ceramah Latihan diskusi	150’	Mahasiswa dapat menjelaskan dan menentukan mana yang termasuk fungsi dan yang bukan Mahasiswa dapat menentukan berbagai jenis fungsi Melalui proses diskusi mahasiswa dapat menentukan	Kinerja, partisipasi dan argumentasi

					himpunan penyelesaian dari fungsi tertentu	
XV	- Menentukan bentuk persamaan - Menyelesaikan bentuk persamaan - Menentukan pertidaksamaan - Menyelesaikan masalah-masalah pertidaksamaan	Persamaan dan pertidaksamaan	Ceramah Latihan diskusi		Diskusi tentang bentuk persamaan dan pertidakasamaan Mahasiswa dapat meneyelsaiakan persamaan dengan berbagai cara. Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan	Kinerja, partisipasi, dan argumentasi
XVI	**UJIAN AKHIR SEMESTER (UTS)**					

Daftar Referensi:

Irving M. Copi, 1978, *Intoduction to Logic Sixth Edition,* New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Vance, E. P. (1989). *Modern College Algebra.* London : Addison Wesley.

Additional References:

Putra, 2004, *Matematika SMA Kelas 1 Jilid 1B,* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Yaya S. Kusuma, 1986, *Logika Matematika Elementer,* Bandung: Penerbit Tarsito.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta:: Gramedia.

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Penilaian

Kehadiran bobot	10%= Penilaian Sikap
Partisipasi Kelas/Kelompok bobot	20%= Penilaian Skap/Keterampilan
Tugas	20%= Penilaian Kerampilan
➢ UTS	20%= Penilaian Pengetahuan
➢ UAS	30%= Penilaian Pengetahuan

Verifikasi RPS

Mengetahui	**Kelompok Bidang Keahlian,**	**Mataram, 28 Nopember 2020**
Ketua Program Studi,		**Dosen Pengampu I,**
Dr. Al Kusaeri. M.Pd	**Dr. Al Kusaeri. M.Pd**	**Dr. Al Kusaeri. M.Pd**
NIP 1980802200041002	**NIP 1980802200041002**	**NIP 1980802200041002**

BAB I
LOGIKA MATEMATIKA

Pendahuluan

Logika matematika merupakan usaha untuk memahami dan menganalisis berbagai bentuk pernyataan sehingga dapat disimpulkan secara logis. Logika matematika merupakan dasar mengembangkan kemampuan berpikir setiap orang yang akan mempelajari matematika, dikarenakan matematika merupakan ilmu yang menelusuri tentang pola dan hubungan.

Pada bab ini akan dibahas pengertian logika dan pernyataan. Memahami pengertian logika dan pernyataan diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang:

1. Pengertian logika
2. Makna logika
3. Pengertian pernyaataan
4. Membedakan pernyataan dan bukan pernyataan
5. Membuat contoh pernyataan dan bukan pernyataan
6. Memahami pernyataan majemuk
7. Memahami bentuk pernyataan bersyarat
8. Memahami bentuk pernyataan
9. Memahami hokum aljabar proposisi
10. Memahami negasi dari pernyataan majemuk
11. Memahami bentuk dan negasi pernytaaan berkuantor
12. Memahami cara penarikan kesimpulan
13. Memahami cara pembuktian

Materi 1
Pengertian Umum Logika dan Pernyataan

A. Uraian Materi

1. Pengertian Logika

Definisi logika menurut ahli dirumusan secara berbeda antara satu sama lain, tetapi artinya tidak jauh berbeda misalnya menurut Soekadijo “Logika adalah suatu studi yang sistimatik tentang struktur proposisi dan syarat-syarat umum mengenai penalaran yang sahih dengan menggunakan metode yang mengesampingkan isi atau bahan proposisi dan hanya membahas bentuk logisnya saja”. Sejalan dengan pendapat di atas, menurut kamus matematika oleh Borowsky & Borwein dijelaskan bahwa logika adalah prinsip dan metode khas yang dipergunakan dalam argumentasi atau penalaran yang tidak memperhatikan isi atau konteks dari bentuk penalaran. Logika yang mengesampingkan isi dari pernyataan dan hanya melihat bentuknya saja (terutama pada saat mengadakan penalaran), lebih dikenal dengan istilah logika formal, logika simbolik, logika modern atau logika matematika. Ciri lain dari logika matematika adalah penalarannya berdasarkan penalaran deduktif, yang didasarkan atas sejumlah unsur tak terdefinisi (undifine term), unsur terdefinisi, asumsi dasar/aksioma serta aturan-aturan tertentu yang daripadanya dapat diturunkan teorema-teorema. Keseluruhan ini membangun suatu sistem yang disebut sistem matematika. Lebih lanjut, dalam menetapkan defininsi maupun aksioma seorang matematisi sesungguhnya, tidak harus menghubungkannya dengan keadaan nyata (*real world/ concrete situation*), namun demikian yang terpenting, aksioma atau definisi yang dirumuskan haruslah konsisten tidak bertentangan satu dengan yang lain.

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kali kita di hadapkan pada suatu keadaan yang mengharuskan kita untuk membuat suatu keputusan. Agar keputusan kita itu baik dan benar, maka terlebih dahulu kita harus dapat menarik kesimpulan-kesimpulan dari keadaan yang kita hadapi itu, dan untuk dapat menarik kesimpulan yang tepat diperlukan kemampuan menalar yang baik. *Kemampuan menalar* adalah kemampuan untuk menarik kesimpulan yang tepat dari bukti-bukti yang ada dan menurut aturan-aturan tertentu. Lalu apa kaitannya dengan logika?

Logika adalah ilmu untuk berpikir dan menalar dengan benar. Secara bahasa, logika berasal dari kata "logos" (bahasa Yunani), yang artinya *kata, ucapan, pikiran.* Kemudian pengertian itu berkembang menjadi *ilmu pengetahuan*. Logika dalam pengertian ini adalah berkaitan dengan argumen-argumen, yang mempelajari metode-metode dan prinsip-prinsip untuk ,menunjukkan keabsahan (sah atau tidaknya) suatu argumen, khususnya yang dikembangkan melalui penggunaan metode-metode matematika dan simbol-simbol matematika dengan tujuan untuk menghindari makna ganda dari bahasa yang biasa kita gunakan sehari-hari.

2. Pernyataan

Sebelum membahas pernyataan, terlebih dahulu kita bahas pengertian kalimat. Kalimat adalah rangkaian kata yang disusun menurut aturan bahasa yang mengandung arti. Pernyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar dan salah. (pernyataan disebut juga preposisi, kalimat deklaratif). Benar diartikan ada kesesuaian antara apa yang dinyatakan dengan keadaan yang sebenarnya.

Perhatikan beberapa contoh berikut!

1. Al-Quran adalah sumber hukum pertama umat Islam
2. 4 + 3 = 8
3. Ahmad mencintai 1
4. Hasan adalah bilangan ganjil

Contoh nomor 1 bernilai benar, sedangkan contoh nomor 2 bernilai salah, dan keduanya adalah pernyataan. Sementara contoh nomor 3 dan 4 adalah kalimat yang tidak mempunyai arti. Sekarang perhatikan contoh di bawah ini!

1. Rapikan tempat tidurmu!
2. Apakah hari ini akan hujan?
3. Indah benar lukisan ini!
4. Berapa orang yang datang?

Kalimat di atas tidak mempunyai nilai benar atau salah, sehingga bukan pernyataan.

Catatan: Suatu pernyataan biasa kita simbolkan dengan huruf kecil p,q,r,s, dan sebagainya.

Istilah benar dan salah dapat dijadikan sebagai suatu istilah tak terdefinisikan karena bisa kita anggap jelas pernyataan yang bernilai benar dan pernyataan yang bernilai salah. Dengan demikian, tidak perlu lagi didefinisikan apa yang dimaksud pernyataan bernilai benar atau pernyataan bernilai salah. Contoh 1.2.1. Contoh pernyataan diantaranya:

1. Lima(5) adalah bilangan prima
2. Jakarta adalah ibukota negara Republik Indonesia
3. Dua (2) adalah bilangan prima yang genap
4. Saat ini di ruang 1 Matematika MIPA sedang ada kuliah.

Benar tidaknya kalimat pertama sampai ketiga dapat segera ditentukan, sedangkan pada kalimat terakhir untuk menentukan benar atau tidaknya perlu diadakan observasi. Pernyataan yang langsung dapat dinyatakan benar atau tidaknya disebut pernyataan absolut/mutlak. Sedangkan pernyataan yang tidak segera diketahui kebenaran atau tidaknya dinamakan pernyataan empirik. Untuk memudahkan pembahasan, kita lebih banyak membicarakan pernyataan yang absolut. Dari segi matematika atau logika, kalimat-kalimat seperti: “lima (5) mencintai 3”; “ayah habis dibagi anak”; tidak dikatakan sebagai pernyataan salah, tetapi disebut kalimat yang tidak bermakna (tidak benar, tidak salah). Hal ini akan menjadi lebih jelas setelah kita membicarakan nilai kebenaran suatu pernyataan.

B. Rangkuman

1. Logika adalah ilmu yang mengkaji tentang kemampuan bernalar
2. Kemampuan bernalar adalah kemampuan untuk merumuskan kesimpulan dari pengetahuan menggunakan bukti-bukti yang logis
3. Pernyataan adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tapi bukan keduanya
4. Sebutan lain dari pernyataan adalah preposisi dan kalimat deklaratif

C. Tugas

1. Sebutkan pengertian pernyataan dan bukan pernyataan
2. Buatlah contoh pernyataan dan bukan pernyataan masing-masing 3 buah serta nilai kebenarannya.

D. Penilaian

Soal:

Tentukan dari kalimat berikut yang termasuk pernyataan dan tentukan nilai kebenarannya :

1. $7 + 3 = 10$.
2. $7 + 5 > 10 - 4$.
3. Sembilan (9) adalah bilangan ganjil.
4. Bujur sangkar adalah persegi panjang.
5. Jumlah sudut-sudut segitiga adalah 180.
6. Ahmad Silahkan Kerjakan Tugasmu
7. Gajah adalah binatang berkaki dua.
8. Jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap
9. Apakah enam bilangan genap
10. Tujuh (7) adalah bilangan komposit (bukan prima).
11. Matahari terbit dari sebelah timur.

Kunci Jawaban:

1. Pernyataan yang bernilai benar
2. Pernyataan yang bernilai benar
3. Pernyataan yang bernilai benar
4. Pernyataan yang bernilai salah
5. Pernyataan yang bernilai benar
6. Bukan pernyataan
7. Pernyataan yang bernilai salah
8. Pernyataan yang bernilai benar
9. Bukan Pernyataan
10. Pernyataan yang bernilai salah
11. Pernytaan yang bernilai Benar

MATERI 2

Ingkaran (Negasi), Pernyataan tunggal dan majemuk.

A. Uraian Materi

Perhatikan pernyataan berikut : “hari ini hujan” bagaimana ingkaran pernyataan itu?. Anda dapat dengan mudah menjawab : "hari ini tidak hujan”. Jika pernyataan semula bernilai benar maka ingkaran pernyataan itu bernilai salah. *Negasi* dari pernyataan p adalah suatu pernyataan yang bernilai salah jika p benar dan bernilai benar jika p salah.

Negasi dari p dinotasikan atau dilambangkan dengan p’ atau ~p atau ¬p. (dibaca “negasi p”, “tidak p ”, “bukan p” atau “ingkaran p”).

Contoh :

1. Jika p : Jakarta ibu kota RI (B)
   maka ~ p : Tidak benar bahwa Jakarta ibu kota RI (S)
   atau ~ p : Jakarta bukan ibu kota RI (S)
2. Jika q : Zainal memakai kaca mata
   Maka ~ q : Tidak benar bahwa Zainal berkaca mata
   atau ~ q : Zaibal tidak memakai kaca mata

Babarapa hal yang harus diperhatikan terkait definisi dan negasi.

1. Kata sifat tidak bisa dijadikan sebagai unsur tak terdefinisi (*undefined term*). Jika kata-kata seperti ini dibuat untuk membuat pernyataan, maka harus didefinisikan terlebih dahulu. Misalnya pada kalimat “Ani anak yang pandai”, selain butuh observasi juga harus didefinisikan terlebih dahulu tentang kriteria

"pandai", sehingga tidak menimbulkan penafsiran berbeda.

2. Jika suatu pernyataan bernilai benar, maka negasinya bernilai salah. Jika pernyataan dan negasinya tidak bisa dinilai benar atau salah maka kalimat tersebut dikatakan kalimat tak bermakna. Misalnya, kalimatkalimat berikut

   p : kakak habis dibagi adik, dan

   ~p : kakak tidak habis dibagi adik,

   keduanya tidak bisa dinilai benar atau salah sehingga keduanya bukan merupakan pernyataan.

Secara tata bahasa, sebuah kalimat atau pernyataan harus memiliki pokok kalimat atau pokok persoalan dan kata kerja yang menggambarkan apa yang dilakukan atau terjadi pada pokok persoalan tadi. Pernyataan yang hanya memuat satu pokok persoalan/ide pokok disebut ***pernyataan tunggal***. Pernyataan tunggal pada umumnya dinyatakan dengan huruf-huruf kecil seperti p, q, dan r.
Berikut ini adalah beberapa contoh kalimat tunggal

p : Lima (5) adalah bilangan prima

q : Jakarta Ibu Kota Republik Indonesia

r : Hari ini bapak pergi ke kantor

Kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan dinamakan nilai kebenaran atau nilai logik (*truth value*) dari pernyataan tersebut dan diotasikan dengan _ (p). Sebagai symbol dari benar biasa di pakai B (benar), R (*right*), T (*true*) atau 1 sedangkan simbol salah digunakan S (salah), W (*wrong*), F (*false*) atau 0. Penggunaan notasi nilai kebenaran ini harus berpasangan (B-S, R-W,T-F, l-0). Nilai kebenaran pernyataan dapat pula disusun dalam suatu tabel yang disebut tabel kebenaran (*truth table*).

Apabila suatu pernyataan terdiri lebih dari satu pernyataan maka diantara satu pernyataan dengan pernyataan lainnya dibutuhkan suatu kata penghubung sehingga diperoleh suatu pernyataan majemuk. ***Pernyataan majemuk*** adalah pernyataan yang mengandung dua atau lebih ide pokok. Untuk Logika matematika ada 5 macam penghubung pernyataan yaitu ingkaran (negasi) (tidak), konjungsi (dan), disjungsi (atau), implikasi (jika…maka…), dan biimplikasi (jika dan hanya jika).

Operasi Logika	**Penghubung**	**Lambang**
Ingkaran	Tidak, non	~ atau -
Konjungsi	Dan	$\wedge$
Disjungsi	Atau	$\vee$
Implikasi	Jika….maka….	$\Rightarrow$
Biimplikasi	Jika dan hanya jika	$\Leftrightarrow$

1. Operasi Konjungsi

Operasi konjungsi merupakan operasi biner (operasi yang dikenakan pada dua pernyataan) yang dilambangkan dengan tanda “$\wedge$”. Dengan operasi ini dua pernyataan dihubungkan dengan kata “ dan “. Jika p dan q dua pernyataan , maka konjungsi dari pernyataan p dan q ($p \wedge q$) akan bernilai benar jika p dan q keduanya bernilai benar, sebaliknya $p \wedge q$ bernilai salah jika salah satu dari p atau q bernilai salah atau keduanya salah.

Tabel nilai kebenaran dari operasi konjungsi.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

2. Operasi Disjungsi

Operasi disjungsi juga merupakan operasi binary yang dilambangkan dengan tanda ”$\vee$”. Operasi ini menggabungkan dua pernyataan menjadi satu dengan kata hubungan “atau”. Jika p dan q dua pernyataan maka ($p \vee q$) bernilai salah jika p dan q keduanya bernilai salah, selain itu akan bernilai benar.

Tabel nilai kebenaran dari Operasi Disjungsi

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

B. Rangkuman

1. Negasi adalah lawan dari sebuah pernyataan
2. Negasi dari p dinotasikan dengan p’ atau ~p atau ¬p. (dibaca “negasi p”, “tidak p ”, “bukan p” atau “ingkaran p”).
3. Pernyataan yang labih dari satu ide pokok dalam satu kalimat disebut pernyataan majemuk
4. Terdapat 5 penghubung pernyataan yaitu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi
5. Konjungsi adalah pernyataan yang bernilai benar jika kedua pernyataan tersebut bernilai benar
6. Disjungsi adalah penytaan yang bernilai salah jika kedua pernytaannya bernilai salah

C. Tugas

1. Buatlah 5 buah pernyataan dengan negasinya yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari
2. Susunlah kalimat dengan penghubung konjungsi dan disjungsi masing-masing 3 buah kalimat
3. Buatlah tabel kebenaran pernyataan yang termuat didalamnya kata penghubung konjungsi dan disjungsi

D. Penilaian

Soal:

1. Tentukan ingkaran pada kalimat di bawah ini :
   a. Pada saat ulang tahun Irene mendapat hadiah
   b. Hasan memakai pakaian seragam sekolah
   c. Jumlah sudut dalam suatu segitiga adalah 180^o
   d. Jumlah sudut luar suatu segitiga adalah 180^o
2. Diketahui

   p : Ani anak yang cantik

   q : Ani anak yang pandai

   r : Ani anak yang disiplin

   Tulis notasi dari pernyataan-pernyataan berikut :

   (a) Ani adalah anak yang cantik dan pandai.

   (b) Meskipun tidak pandai, Ani disiplin

   (c) Ani adalah anak yang pandai dan disiplin tetapi tidak cantik.

   (d) Ani adalah anak yang cantik atau sekaligus pandai dan disiplin.
3. Diketahui :

   p : Ani naik kelas

   q : Ani senang

   r : Ani mendapatkan hadiah

   s : Ayah Ani marah-marah

   t : Alvin berasal dari Jawa Tengah

   Tuliskan kalimat dari bentuk simbol di bawah ini :

   a. $p \wedge q$

   b. $p \vee t$

   c. $p \wedge \sim s$

   d. $q \wedge t$

e. $q \vee r$

Jawaban:

1. Ingkaran dari pernyataan tersebut adalah:
   a. Irene tidak mendapat hadiah pada saat ulang tahun
   b. Hasan tidak memakai seragam sekolah
   c. Sudut dalam segitiga tidak berjumlah 180^0
   d. Sudut luar segitiga tidak berjumlah 180^0
2. Notasi pernyataan di atas adalah:
   a. $p \wedge q$
   b. $\sim q \wedge r$
   c. $q \wedge (r \vee \sim p)$
   d. $p \vee (q \wedge r)$
3. Bentuk Kalimat dari symbol di atas adalah:
   a. Ani naik kelas dan senang
   b. Ani naik kelas atau alvin dari jawa tengah
   c. Ani naik kelas dan ayah ani senang
   d. Ani senang dan alvi dari jawa tengah
   e. Ani senang atau ayahnya yang marah

MATERI 3
Hukum-hukum Logika

A. Uraian Materi

Susunan pernyataan majemuk dapat juga dianggap sebagai hasil operasi dari beberapa pernyataan dengan perakit-perakit pernyataan sebagai operasi hitung. Sedangkan sebagai pengganti kesamaan dalam logika kita mengenal ekuivalensi, (≡). Operasi beserta pernyataannya ini dikenal dengan istilah aljabar pernyataan atau kalkulus pernyataan. Dua pernyataan dikatakan ekuivalen jika pernyataan-pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk setiap keadaan komponennya, berikut akan dijelaskan aturan-aturan dalam menunjukan ekuivalensi pernyataan yang disebut dengan hukum-hukum aljabar proposisi (Pernyataan).

1. Hukum Komplemen: - $p \wedge ((\sim p) \vee q) \equiv p \wedge q$ - $p \vee ((\sim p) \wedge q) \equiv p \vee q$	2. Hukum *identitas* : – $p \wedge F \equiv F$ dan $p \wedge T \equiv p$ – $p \vee T \equiv T$ dan $p \vee F \equiv p$
3. Hukum Invers: – $p \vee \sim p \equiv T$ dan $(\sim F) \equiv T$ – $p \wedge \sim p \equiv F$ dan $(\sim T) \equiv F$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \equiv p$ – $p \wedge p \equiv p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – $\sim(\sim p) \equiv p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ dan $p \vee (p \wedge (\sim q)) \equiv p$ – $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ dan $p \wedge (p \vee ((\sim q) \equiv p$

7. Hukum komutatif: – $p \vee q \equiv q \vee p$ – $p \wedge q \equiv q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ – $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Untuk membuktikan bentuk hukum aljabar pernyataan di atas dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran, selanjutnya hukum-hukum tersebut dapat digunakan untuk membuktikan ekuivalensi pernyataan-pernyataan majemuk yang lain.

Contoh : Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\equiv p \vee (F \wedge q)$ (Hukum distributif)

$\equiv p \vee F$ (Hukum identitas)

$\equiv p$ (Hukum Identitas)

Buktikan pernyataan ~(p v ~q) v (~p $\wedge$ ~q) ≡ ~p

~(p v ~q) v (~p $\wedge$ ~q) ≡ ~p

≡ ~p $\wedge$ q) v (~p $\wedge$ ~q)

≡ ~p $\wedge$ (q v ~q)

≡ ~p $\wedge$ T

≡ ~p

Dengan menggunakan table kebenaran dapat juga dibuktikan bahwa ekuivalensi dari setiap hokum aljabar proposisi di atas benar. Misalnya kita akan membuktika bahwa hukum komutatif benar antara pernyataan pada ruas kiri dan kanan ekuivalen atau memeiliki nilai kebenaran yang sama.

p	q	p v q	q v p
B	B	B	B
B	S	B	B
S	B	B	B
S	S	S	S

Pembuktian dengan menggunakan table kebenaran dapat dilakukan untuk semua hokum aljabar proposisi di atas untuk meyakinkan diri kita bahwa hokum-hukum tersebut dapat dibuktikan kebenarannya.

B. Kesimpulan

1. Ekuivalensi adalah pernyataan yang memiliki nilai kebenaran yang sama
2. Hukum aljabar pernyataan terdiri dari komlemen, identitas, invers, idompten, involsi, penyerapan, komutataif, asosiatif, distributive, dan De Dorgan.

C. Tugas

Buktikan dengan menggunakan table kebenaran dan tunjukkan bahwa semua hukum aljabar pernyataan memiliki nilai kebenaran yang benar dan antara pernyataan diruas kiri dan kanan memiliki nilai kebenaran yang sama atau ekuivalen.

D. Penilaian

Soal:

1. Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

   Pnyelesaian:

   $p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

   $\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

   $\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

   $\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

2. Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

   Penyelesaian

   $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

   $\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q)$ (Hukum distributif)

   $\Leftrightarrow p \vee F$ (Hukum Null)

   $\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

3. Buktikanbahwa: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

   Penyelesaian:

   $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \sim p \vee (q \wedge r)$ (Negasi implikasi)

   $\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$ (Disttributif)

   $\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ Terbukti

MATERI 4
Pernyataan Bersyarat

A. Uraian Materi

Perhatikan pernyataan berikut ini: “Jika matahari bersinar maka udara terasa hangat”, jadi, bila kita tahu bahwa matahari bersinar, kita juga tahu bahwa udara terasa hangat. Karena itu akan sama artinya jika kalimat di atas kita tulis sebagai:

“Bila matahari bersinar, udara terasa hangat”.
”Sepanjang waktu matahari bersinar, udara terasa hangat”.
“Matahari bersinar berimplikasi udara terasa hangat”.
“Matahari bersinar hanya jika udara terasa hangat”.

Berdasarkan pernyataan diatas, maka untuk menunjukkan bahwa udara tersebut hangat adalah cukup dengan menunjukkan bahwa matahari bersinar atau matahari bersinar merupakan syarat cukup untuk udara terasa hangat. Sedangkan untuk menunjukkan bahwa matahari bersinar adalah perlu dengan menunjukkan udara menjadi hangat atau udara terasa hangat merupakan syarat perlu bagi matahari bersinar. Karena udara dapat menjadi hangat hanya bila matahari bersinar.

Perhatikan pula contoh berikut ini:

“Jika ABCD belah ketupat maka diagonalnya saling berpotongan ditengah-tengah”. Untuk menunjukkan bahwa diagonal segi empat ABCD saling berpotongan ditengah-tengah adalah cukup dengan menunjukkan bahwa ABCD belah ketupat, atau ABCD belah ketupat merupakan syarat cukup bagi diagonalnya untuk saling berpotongan ditengah-tengah. Dan untuk menunjukkan bahwa ABCD belah ketupan perlu ditunjukkan bahwa diagonalnya saling berpotongan ditengah-tengah, atau diagonal-diagonal segi empat ABCD saling berpotongan ditengah-tengah merupakan syarat perlu (tetapi belum cukup) untuk menunjukkan belah ketupat ABCD. Mengapa? Karena diagonal-diagonal suatu jajaran genjang juga saling berpotongan ditengah-tengah, dan jajaran genjang belum tentu merupakan belah ketupat. Demikian pula syarat cukup tidak harus menjadi syarat perlu karena jika diagonal segi empat ABCD saling berpotongan ditengah belum tentu segi empat ABCD belah ketupat.

Banyak pernyataan, terutama dalam matematika, yang berbentuk “jika p maka q”, pernyataan demikian disebut **implikasi atau pernyataan bersyarat (kondisional)** dan ditulis sebagai $p \Rightarrow q$. Pernyataan $p \Rightarrow q$ juga disebut sebagai pernyataan implikatif atau pernyataan kondisional. Pernyataan $p \Rightarrow q$ dapat dibaca:

a. Jika p maka q
b. p berimplikasi q
c. p hanya jika q
d. q jika p

Implikasi adalah Sebuah pernyataan hanya salah jika antesedennya (Penyeba) benar dan konsekwennya (akibat) salah, dalam kemungkinan lainnya implikasi bernilai benar. Definisi diatas dapat ditulis dalam tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel Kebenaran Implikasi

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Perhatikan kalimat: ”Jika segi tiga ABC sama kaki maka kedua sudut alasnya sama besar”. Jelas implikasi ini bernilai benar. Kemudian perhatikan: “Jika kedua sudut alas segi tiga ABC sama besar maka segi tiga itu sama kaki”. Jelas bahwa implikasi ini juga bernilai benar. Sehingga segi tiga ABC sama kaki merupakan syarat perlu dan cukup bagi kedua alasnya sama besar, juga kedua sudut alas sama besar merupakan syarat perlu dan cukup untuk segi tiga ABC sama kaki. Sehingga dapat dikatakan “Segi tiga ABC sama kaki merupakan syarat perlu dan cukup untuk kedua sudut alasnya sama besar”.

Perhatikan kalimat: “Saya memakai mantel jika dan hanya jika saya merasa dingin”. Pengertian kita adalah “Jika saya memakai mantel maka saya merasa dingin” dan juga “Jika saya merasa dingin maka saya memakai mantel”. Terlihat bahwa jika saya memakai mantel merupakan syarat perlu dan cukup bagi saya merasa dingin, dan saya merasa dingin merupakan syarat perlu dan cukup bagi saya memakai mantel. Terlihat bahwa kedua peristiwa itu terjadi serentak.

Dalam matematika juga banyak didapati pernyataan yang berbentuk “p bila dan hanya bila q” atau "p jika dan hanya jika q". Pertanyaan demikian disebut bikondisional atau biimplikasi atau pernyataan bersyarat ganda dan ditulis sebagai p $\Leftrightarrow$ q, serta dibaca p jika dan hanya jika q (disingkat dengan p jhj q atau p bhb q). Pernyataan p $\Leftrightarrow$ q juga disebut sebagai pernyataan biimplikatif. Pernyataan "p jika dan hanya jika q" berarti "jika p maka q dan jika q maka p", sehingga juga berarti "p adalah syarat perlu dan cukup bagi q" dan sebaliknya.

***Biimplikasi adalah Pernyataan bikondisional bernilai benar hanya jika komponen-komponennya bernilai sama*.**

Contoh:

1. Jika p : 2 bilangan genap (B)
   q : 3 bilangan ganjil (B)

maka p $\Leftrightarrow$ q : 2 bilangan genap jhj 3 bilangan ganjil (B)

2. Jika r : $2 + 2 \neq 5$ (B)
   s : $4 + 4 < 8$ (S)

   maka r$\Leftrightarrow$ s : $2 + 2 \neq 5$ jhj $4 + 4 < 8$ (S)

3. Jika a : Surabaya ada di jawa barat (S)
   b : 23 = 6 (S)

   maka a $\Leftrightarrow$ b : Surabaya ada di jawa barat jhj 23 = 6 (B)

Tabel Kebenaran Biimplikasi

p	**q**	**p $\Leftrightarrow$ q**
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

B. Kesimpulan

1. Pernyataan bersyarat adalah pernyataan yang memerlukan kondisi tertentu untuk menunjukkan kebenaran suatu keadaan
2. Implikasi adalah pernyataan kondisional yang akan bernilai salah jika penyebabnya benar dan akibatnya salah, selain itu bernilai benar
3. Biimplikasi adalah pernytaan bikondisional yang akan bernilai benar jika kedua penyataan memiliki nilai kebenaran yang sama

C. Tugas

Identifikasi dan berikan penjelasan kondisi atau pernyataan dalam matematika yang mengandung hubungan kondisional dan pernyataan matematika yang saling sebab akibat.

D. Penilaian

Soal:

1. Diketahui :

   p : Abdu pandai matematika

   q : Abdu jadi juara

   r : Hari hujan

   s : Wirman tidak masuk sekolah

   Tuliskan bentuk simbol dari kalimat berikut.

   a. Jika hari tidak hujan maka Wirman masuk sekolah
   b. Jika Abdu pandai matematika maka ia jadi juara
   c. Jika Wirman masuk sekolah dan Abdu pandai matematika maka Abdu jadi juara.
   d. Jika Abdu pandai matematika maka Abdu jadi juara atau jika hari hujan maka Wirman tidak masuk sekolah.

2. Mana yang merupakan implikasi logis

   a. Jika $x^2 = 81$ maka $x = 9$
   b. Jika $x > 5$ maka $x^2 > 25$
   c. Jika $x^2 < 4$ maka $-4 < x < 4$
   d. Jika $x = 3$ maka $x^2 = 9$

3. Diketahui :

   p : Halimah akan jadi juara kelas

   q : Halimah rajin belajar

   Tulis dalam bentuk kalimat dari bentuk simbol berikut :

   a. $p \Leftrightarrow q$
   b. $\sim p \Leftrightarrow q$
   c. $p \Leftrightarrow \sim q$
   d. $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

4. Diketahui :

   p : Andi mendapat gaji

   q : Andi bekerja

   Tuliskan bentuk simbol dari kalimat di bawah ini :

   a. Andi mendapatkan gaji jika dan hanya jika ia bekerja
   b. Andi tidak mendapatkan gaji jika dan hanya jika ia tidak bekerja.
   c. Andi bekerja jika dan hanya jika Andi mendapatkan gaji
   d. Andi tidak bekerja jika dan hanya jika Andi tidak mendapatkan gaji
5. Diketahui $S = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$

   $p : x - 3 = 0$

   $q : 2x = 6$

   Tentukan $p \Leftrightarrow q$

Jawaban:

1. Bentuk simbol dari soal no 1 adalah:
   a. $r` \Rightarrow s`$
   b. $p` \Rightarrow q$
   c. $(r \wedge p) \Rightarrow q)$
   d. $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow s)$
2. Yang memiliki hubungan implikasi logis dari soal nomor 2 adalah:
   a. Berimplikasi logis Karena $9^2 = 81$
   b. Berimlikasi logis

c. Tidak berimplikasi logis karena semua bilangan diantara $-4 < x < 4$ nilainya tidak lebih kecil dari 4 jika di kuadratkan
d. Berimplikasi logis

3. Bentuk kalimat dari soal nomor 3 adalah:
   a. Halimah akan jadi juara kelas jika dan hanya jika rajin belajar
   b. Halimah tidak akan jadi juara kelas jika dan hanya jika halimah rajin belajar
   c. Halimah jadi juara kelas jika dan hanya jika tidak rajin belajar
   d. Halimah tidak akan jadi juara kelas jika dan hanya jika halimah tidak rajin belajar
4. Bentuk symbol dari kalimat pada soal nomor 4 adalah:
   a. $p \Leftrightarrow q$
   b. $\sim p \Leftrightarrow \sim q$
   c. $q \Leftrightarrow p$
   d. $\sim q \Leftrightarrow p\sim$
5. Nilai $p \Leftrightarrow q$ pada soal nomor 5 sama dengan 3

MATERI 5
Mendeskripsikan Invers, Konvers Dan Kontraposisi

A. Uraian Materi

Dari suatu pernyataan bersyarat " $p \Rightarrow q$ " yang diketahui dapat dibuat pernyataan lain sebagai berikut :

1) $q \Rightarrow p$ disebut pernyataan *Konvers* dari $p \Rightarrow q$
2) $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut pernyataan *Invers* dari $p \Rightarrow q$
3) $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut pernyataan *Kontraposisi* dari $p \Rightarrow q$

Untuk semua kemungkinan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan komponen p dan q, hubungan nilai kebenaran konvers, invers, dan kontraposisi dengan implikasi semula, dapat ditunjukkan bukti nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran.

Berikut bukti tabel hubungan nilai kebenaran invers, konvers, dan kontraposisi dengan bentuk implikasi awalnya, $q \Rightarrow p$, $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$ dengan $p \Rightarrow q$:

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
P	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Contoh:

Carilah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan:

" Jika binatang itu bertubuh besar maka binatang itu disebut gajah "

Konvers : Jika binatang itu disebut gajah maka binatang itu bertubuh besar

Invers : Jika binatanag itu tidak bertubuh besar maka binatang itu bukan gajah

Kontraposisi: Jika binatang itu bukan gajah maka binatang itu tidak bertubuh besar

Pernyataan matematika juga sering ditemukan bentuk implikasi yang menyaratkan pernyatan pertama dengan yang kedua sehingga bernilai benar. Misalnya: jika seluruh sisi persegi memiliki ukuran yang sama, maka bangun datar tersebut adalah bujur sangkar. Dalm bentuk konvers, pernyataan tersebut disusun menjadi “jika bangun datar tersebut adalah bujur sangkar, maka semua sisinya sama panjang. Pernyataan tersebut jika disusun dalam bentuk invers juga akan bernilai benar, yaitu jika bukan bujur sangkar, maka seluruh sisi persegi memiliki ukuran yang berbeda. Begitu juga dalam bentuk kontraposisi “jika tidak bangun datar bukan bujur sangkar, maka sisinya memiliki ukuran yang berbeda. Keseluruhan perubahan bentuk pernyataan yang disusun memiliki nilai kebenaran yang sama, yaitu sama-sama benar.

B. Kesimpulan

1) $q \Rightarrow p$ disebut pernyataan *Konvers* dari $p \Rightarrow q$
2) $\sim p \Rightarrow \sim q$ disebut pernyataan *Invers* dari $p \Rightarrow q$
3) $\sim q \Rightarrow \sim p$ disebut pernyataan *Kontraposisi* dari $p \Rightarrow q$

C. Tugas

Buatlah pernyataan bersyarat kondisonal yang berimplikasi logis dalam pernyataan matematika kemudian buatlah bentuk konvers, invers, dan kontraposisinya.

D. Penilaian

Soal:

1. Buatlah konvers, invers dan kontraposisi dari pernyataan Jika dua buah garis saling tegak lurus maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku
2. Tentukanlah konvers dari pernyataan berikut:
   a. Jika dia sholat, maka dia Islam

b. Jika UIN Mataram memiliki jurusan kependidikan, maka mempunyai laboratorium microteaching.

3. Tentukanlah invers dari pernyataan berikut:
   a. Jika segitiga sama kaki, maka ketiga sudutnya sama
   b. Jika $x = 2$, maka $x^2 = 4$
4. Tentukanlah kontraposisi dari pernyataan berikut:
   a. Jika $a3 : a3 = a^0$, maka $a^0 =1$
   b. Jika semua jeruk manis, maka jeruk ini harus manis

Jawaban:

1. Konvers: Jika dua buah garis membentuk sudut siku, maka keduanya saling tegak lurus

   Invers: Jika kedua garis tidak saling tegak lurus, maka tidak membentuk sudut siku.

   Kontraposisi: Jika keduanya tidak membentuk sudut siku, maka garis tersebut tidak saling tegak lurus.
2. Jika dia sholat, maka dia islam

   Jika terdapat laboratorium micriteaching, maka UIN Mataram memikiki Fakultas Keguruan
3. Jika bukan segitiga sama kaki, maka sudutnya tidak sama.

   Jiak x tidak sama dengan 2, maka x^2 tidak sama dengan 4
4. Jika tidak sama dengan 1, maka bukan $a^3 : a^3$

   Jiak salah satu jeruk tidak manis, maka tidak semua jeruk dapat dikatakan manis

MATERI 6
BENTUK-BENTUK PERNYATAAN

A. Materi

Bentuk-bentuk pernyataan dalam logika dibedakan menjadi tiga, yaitu :

1. Kontradiksi
2. Tautologi
3. Kontingensi
4. Ekuivalen

Kontradiksi adalah suatu bentuk pernyataan yang hanya mempunyai contoh substitusi yang salah, atau sebuah pernyataan majemuk yang salah dalam segala hal tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Tautologi adalah sebuah pernyataan majemuk yang benar dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Kontingensi adalah sebuah pernyataan majemuk yang bukan suatu tautologi maupun kontradiksi.

Ekuivalen adalah pernyataan majemuk yang memiliki nilai kebenaran yang sama diberbagai kemungkinan.

Contoh: Selidiki pernyataan di bawah ini apakah suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi! $(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$(\sim p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	B	S	B
S	S	B	S	B	B

Karena pada tabel kebenaran di atas benar semua, maka pernyataan di atas suatu **tautologi**

B. Kesimpulan

Bentuk pernyataan logika terdiri dari 4 jenis yaitu:

1. Kontradiksi: Pernyataan yang selalu bernilai salah disemua kemungkinan
2. Tautologi: Pernyataan yang selalu bernilai benar disemua kemungkinan
3. Kontingensi: pernyataan yang tidak selalu benar dan salah
4. Ekuivalensi: pernyataan yang memiliki nilai kebenaran yang sama diberbagai kemungkinan.

C. Tugas

1. Selidiki apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini suatu tautologi, kontradiksi atau kontingensi!
   a. $(p \wedge q) \rightarrow p$
   b. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\sim q \wedge r) \rightarrow (r \wedge p)]$
   c. $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
   d. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. Buktikan jika kedua pernyataan berikut memiliki nilai kebenaran yang sama antara pernyataan di ruas kiri dengan yang di ruas kanannya..
   1) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
   2) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

D. Penilaian

Soal:

1. Tentukanlah bentuk pernyataan-pernyataan di bawah ini:

a. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

b. $q \Rightarrow (p \vee q)$

c. $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

d. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

2. Tunjukkan pernyataan di bawah ini adalah ekivalen :

a. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

b. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

c. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

Jawaban:

1. Bentuk pernyataan berikut adalah :

a. $(p \wedge q) \Rightarrow p$ termasuk bentuk pernyataan Tautologi

p	**q**	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
B	**B**	**B**	**B**
B	**S**	**S**	**B**
S	**B**	**S**	**B**
S	**S**	**S**	**B**

b. $q \Rightarrow (p \vee q)$ termasuk bentuk pernyataan Tautologi

p	**q**	$(p \vee q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
B	**B**	**B**	**B**
B	**S**	**B**	**B**
S	**B**	**B**	**B**
S	**S**	**S**	**B**

c. $((p \Rightarrow q) \wedge p)$ termasuk bentuk pernyataan kontingensi

p	**q**	$p \Rightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge p$
B	**B**	**B**	**B**
B	**S**	**S**	**S**
S	**B**	**B**	**B**
S	**S**	**B**	**S**

d. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	**q**	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
B	**B**	**S**	**S**	**B**	**S**	**S**	**B**
B	**S**	**S**	**B**	**B**	**S**	**S**	**B**
S	**B**	**B**	**S**	**B**	**S**	**S**	**B**
S	**S**	**B**	**B**	**S**	**B**	**B**	**B**

2. Pernyataan berikut termasuk pernyataan yang:

   a. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ adalah pernyataan yang ekuivalen

p	**q**	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	**B**	**B**
B	S	S	B	**S**	**S**
S	B	B	S	**B**	**B**
S	S	B	B	**B**	**B**

b. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ merupakan pernyataan yang ekuivalen

p	**q**	~p	~q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$
B	B	S	S	**B**	**S**	**S**
B	S	S	B	**B**	**S**	**S**
S	B	B	S	**B**	**S**	**S**
S	S	B	B	**S**	**B**	**B**

c. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ merupakan pernyataan yang ekuivalen

p	**q**	~p	~q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$
B	B	S	S	**B**	**S**	**S**
B	S	S	B	**S**	**B**	**B**
S	B	B	S	**S**	**B**	**B**
S	S	B	B	**S**	**B**	**B**

Materi 7
Ingkaran pernyataan majemuk

A. Uraian Materi

Untuk menentukan ingkaran suatu pernyataan p (tunggal) relatif mudah, cukup menambahkan kata “tidak benar” di depan pernyataan p atau menyisipkan kata “tidak” atau “bukan” di dalam pernyataan p. Jika ingin menentukan ingkaran pada pernyataan majemuk, maka yang dicari adalah suatu pernyataan majemuk yang ekivalen.

a. Ingkaran pada Konjungsi

Misalnya : “$p \wedge q$” adalah suatu pernyataan majemuk dari konjungsi

Ingkarannya :

$$\boxed{\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q}$$

Tabel kebenaran :

p	q	~p	~q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Ekivalen

Contoh :

Tuliskan ingkaran berikut ini :

a. Ahmad adalah pemenang lomba lari dan Selong adalah ibukota Lombok timur.

b. Ahdil berasal dari Jakarta tetapi ia suka makan Pelcing Kangkung.

Jawab:

e. Ahmad adalah bukan pemenang lomba lari dan selong bukan ibu kota Lombok timur

f. Ahdil bukan berasal dari Jakarta tetapi dia tidak suka makan Pelcing Kangkung

b. Ingkaran pada Disjungsi

Misalkan : "p $\vee$ q" adalah suatu pernyataan majemuk dari disjungsi.

Ingkarannya : $\boxed{\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q}$

Tabel Kebenaran :

p	q	~p	~q	p $\vee$ q	~(p $\vee$ q)	(~p $\wedge$ ~q)
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Ekivalen

Contoh :

Diketahui

p : Ari orang kaya

q : Ari berbahagia

Tuliskan bentuk simbol ingkaran kalimat berikut :

a. Ari orang miskin atau berbahagia

b. Ari orang kaya atau ia sedih

c. Ari orang kaya atau berbahagia

d. Ari orang miskin atau tidak berbahagia

Jawab : a. $(p \wedge \sim q)$ b. $(\sim p \wedge q)$

c. $(\sim p \wedge \sim q)$ d. $(p \wedge q)$

c. Ingkaran dari implikasi

Perhatikan contoh berikut ini, Diketahui :

p : Hasan rajin belajar

q : Hasan naik kelas

Implikasi $p \Rightarrow q$ artinya jika p terjadi, maka akibatnya q juga terjadi.

Jika Hasan rajin belajar dan ternyata Hasan tidak naik kelas.

Pernyataan ini bertentangan dengan asumsi semula.

$$\boxed{\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q}$$

Jadi :

Tabel Kebenaran

p	q	~q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q)$
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S

Ekivalen

Contoh :

p : Ali naik kelas

q : Ali senang

r : Ali mendapat hadiah komputer

s : Ibu Ali marah-marah

Tulislah ingkaran dalam bentuk simbol dan kalimat :

a. Jika Ali mendapat hadiah komputer maka ia senang
b. Jika Ali tidak naik kelas maka ia tidak mendapat hadiah komputer
c. Jika Ali tidak naik kelas maka ibunya marah-marah
d. Jika ibu Ali marah-marah maka Ali tidak mendapat hadiah komputer

Jawab : a. $(r \wedge \sim q)$ b. $(\sim p \wedge r)$ c. $(\sim p \wedge \sim r)$ d. $(s \wedge r)$

d. Ingkaran pada Biimplikasi

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Leftrightarrow q$ dibaca p jika dan hanya jika q

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ dibaca jika p maka q dan jika q maka p

Negasi pernyataan $p \Leftrightarrow q$ diturunkan sebagai berikut :

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

$$\boxed{\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)}$$

Tabel Kebenaran

p	q	~p	~q	$(p \Leftrightarrow q)$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$(p \wedge \sim q)$	$(q \wedge \sim p)$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	S	B	B
S	S	B	B	B	S	S	S	S

Ekivalen

Contoh : Ahmad akan jadi juara kelas, jika dan hanya jika Ahmad rajin belajar. ingkaran dalam bentuk kalimat sebagai berikut.

Jawab : Ahmad jadi juar kelas dan Ahmad tidak rjin belajar atau Ahmad rajin belajar dan Ahmad tidak jadi juara kelas

B. Kesimpulan

1. **Ingkaran Konjungsi adalah:**
   $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. **Ingkaran Disjungsi adalah :**
   $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. **Ingkaran Implikasi adalah:**
   $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4. **Ingkaran Biimplikasi adalah:**
   $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

C. Tugas

Buatlah pernyataan majemuk yang berkaitan dengan pernyataan matematika, kemudian tentukan ingkarannya dalam bentuk kalimat dan slmbol. Dimana, setiap pernyataan majemuk tersebut memuat ke empat jenis penghubung pernyataan di atas.

D. Penilaian

Soal:

1. Diketahui

   p : Aisah naik kelas

   q : Aisah senang

   r : Aisah mendapatkan hadiah

   s : Ayah Ani marah-marah

   t : Andi berasal dari makasar

   Tuliskan ingkaran dalam bentuk kalimat :

   a. $p \wedge q$
   b. $p \wedge t$
   c. $p \wedge s$
   d. $q \wedge t$
   e. $q \wedge r$
   f. $t \wedge s$

2. Diketahui

   p : Kepala Desa minimal berijasah SMA

   q :Kepala Desa harus seorang wanita

   r : Harga Sembako segera naik

   s : Pemerintah memberi sumbangan pada korban banjir

   Tulis ingkaran dalam bentuk pernyataan dari bentuk simbol berikut :

   a. $p \vee \sim q$
   b. $\sim q \vee \sim p$
   c. $p \vee s$
   d. $\sim q \vee (r \wedge s)$
   e. $\sim r \vee \sim s$

3. Tulislah ingkaran dari pernyataan berikut :

   a. Jika $x^2 = 81$ maka $x = 9$

b. Jika $x > 5$ maka $x^2 > 25$
c. Jika $\cos x = \frac{1}{2}$, maka $x = 60^0$
d. Jika $x - 1 = 3$ maka $x^2 > 9$
e. Jika $x - 1 = 0$ maka $x^2 - 3x + 2 = 0$

4. Diketahui:
   p : Haris pandai matematika
   q : Haris jadi juara
   r : Hari hujan
   s : Joko tidak masuk sekolah
   Tuliskan ingkaran dalam bentuk kalimat dari simbol berikut :
   a. $p \Leftrightarrow q$
   b. $\sim r \Leftrightarrow s$
   c. $p \Leftrightarrow \sim q$
   d. $\sim s \Leftrightarrow \sim r$

Jawaban:

1. Ingkaran dari setiap bentuk pernyataan yang terdapat pada soal nomor 1 adalah:
   a. Aisah tidak naik kelas atau aisah tidak senang
   b. Aisah tidak naik kelas atau andi tidak dari makasar
   c. Aisah tidak naik kelas atau ayah ini tidak marah
   d. Aisah sedih atau andi tidak dari maksar
   e. Aisah tidak senang atau aisah tidak dapat hadiah
   f. Andi tidak dari makasar dan ayah ani tidak marah
2. Ingkaran dari setiap bentuk pernyataan yang terdapat pada soal nomor 2 adalah:

a. Kepala desa minimal tidak berijazah SMA dan Kepala desa harus wanita
b. Kepala desa harus wanita dan minimal berijazah SMA
c. Kepala desa tidak harus minimal berijazah SMA dan Pemerintah tidak memberikan sumbangan kepada korban banjir
d. Kepala desa harus wanita dan harga sembakau turun atau pemerintah tidak harus memberikan sumbangan kepada orban banjir.
e. Harga sembakau segera naik dan pemerintah memberikan sumbangan kepada korban banjir

3. Ingkaran dari pernyataan soal nomor 3 adalah:
   a. $x^2 = 81$ dan x tidak sama dengan 9
   b. $x > 5$ dan x^2 tidak lebih besar dari 25
   c. $\cos x = \frac{1}{2}$ dan x tidak sama dengan 60^0
   d. $x – 1 = 3$ dan x^2 tidak lebih besar dari 9
   e. $x – 1 = 0$ dan $x^2 – 3x + 2 = 0$
4. Ingkaran dari setiap bentuk pernyataan yang terdapat pada soal nomor 4 adalah:

   p : Haris pandai matematika

   q : Haris jadi juara

   r : Hari hujan

   s : Joko tidak masuk sekolah

   Tuliskan ingkaran dalam bentuk kalimat dari simbol berikut :
   a. Haris pandai matematika dan haris tidak dapat juara atau haris dapat juara dan tidak pandai matematika.

b. Hari hujan dan joko masuk sekolah atau joko tidak masuk sekolah dan hari hujan.
c. Haris pandai matematika dan jadi juara atau haris jadi tidak jadi juara dan tidak pandai matematika
d. Hari cerah dan tidak masuk sekolah atau joko masuk sekolah dan hari cerah

MATERI 8
Pernyataan Kuantor

A. Uraian Materi

Kuantor adalah suatu ucapan yang apabila dibubuhkan pada suatu kalimat terbuka akan mengubah kalimat terbuka tersebut menjadi suatu kalimat tertutup atau pernyataan. Kuantor dibedakan atas:

1. Kuantor Universal/Umum (Universal Quantifier), notasinya : “ $\forall$ ”

   adalah suatu pernyataan yang biasanya terdapat kata *semua*, *setiap*, atau *tiap-tiap*. Kuantor universal ditulis dengan lambang $\forall x$, dibaca “untuk semua x atau setiap x berlaku…”.

   Jika P(x) kalimat terbuka, maka $(\forall x)$. P(x) berarti untuk semua x berlaku P(x).

   Pernyataan kuantor universal mempunyai nilai :

   - **Benar**, jika pernyataan tersebut benar untuk semua semesta yang dibicarakan.
   - **Salah**, jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu anggota semesta yang menyebabkan pernyataan salah.

2. Kuantor Khusus (Eksistensial Quantifier), notasinya : “ $\exists$ “

   Eksis adalah kata sifat yaitu keberadaan. Kuantor Eksistensial adalah suatu pernyataan dimana kuantitas atau jumlah menunjukkkan keberadaan. Pada kuantor eksistensial biasanya terdapat kata *beberapa*, *terdapat*, *ada*, atau *sekurang-kurangnya satu*. Kuantor eksistensial ditulis dengan lambang $\exists x$, dibaca " ada suatu x sehingga berlaku …".

Jika $P(x)$ kalimat terbuka, maka $(\exists x)\ P(x)$ berarti ada x sehingga berlaku $P(x)$.

Pernyataan kuantor eksestensial mempunyai nilai :

- **Benar**, jika sekurang-kurangnya ada satu anggota semesta menyebabkan pernyataan benar.
- **Salah**, jika tidak ada satupun anggota semesta menyebabkan pernyataan benar.

Contoh: Jika $p(x)$ kalimat terbuka: $x + 3 > 5$, dan x adalah bilangan Asli. Apabila pada kalimat terbuka di atas dibubuhi kuantor, maka: $\forall x,\ x + 3 > 5$ (Salah) atau $\exists x,\ x + 3 > 5$ (Benar)

B. Kesimpulan

1. Kuantor adalah imbuhan yang kalau diucapkan merubah bentuk kalimat terbuka menjadi pernyataan
2. Kuantor universal adalah pernyataan yang benar untuk semua kondisi
3. Kuantor khusus adalah pernyataan yang sekurang-kurangnya benar pada minimal satu kondisi.

C. Tugas

Identifikasi beberapa pernyataan atau definisi matematika yang dapat dinyatakan sebagai kuantor universal atau eksistensial

D. Penilaian

Soal:

1. Benar atau salah pernyataan berkuantor berikut ini :
   a. Semua jenis ikan bertelur.
   b. Untuk setiap bilangan Asli x dan y berlaku $(x + y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$
   c. Untuk setiap bilangan Bulat x berlaku $x^2 + 1 > 0$
   d. Untuk setiap bilangan Asli x berlaku $x^2 – 2x + 5 > 0$
   e. Untuk setiap bilangan Bulat x berlaku $x + 2 < 3$
2. Benar atau salah pernyataan berkuantor berikut ini :
   a. Terdapat bilangan prima yang genap
   b. Beberapa perdana menteri adalah wanita
   c. Ada bilangan cacah yang kurang dari 1
   d. $(\exists x)(x \in R \Rightarrow x^2 + 1 < 0)$
   e. $(\exists x)(x \in R \Rightarrow 3x + 1 > 7)$
3. Manakah pernyataan di bawah ini, yang merupakan pernyataan kuantor eksistensial ?
   a. Semua orang yang bekerja akan menerima upah.
   b. Ada orang yang tingginya 2 meter
   c. Beberapa murid tidak ikut pelajaran matematika
   d. Tidak ada orang yang tidak pernah sakit
   e. Terdapat suatu negara yang mempunyai perbatasan dengan negara lain hanya daratan saja.

Jawaban:

1. Nilai kebenaran pernyataan berkuantor Universal
   a. Benar
   b. Benar
   c. Benar
   d. Benar

e. Salah

2. Nilai kebenaran pernyataan berkuantor khusus

a. Salah

b. Benar

c. Benar

d. Salah

e. Salah

3. Pernyataan di bawah adalah:

a. Kuantor Universal

b. Kuantor Khusus

c. Kuantor Khusus

d. Kuantor universal

e. Kuantor Khusus

MATERI 9
Ingkaran Pernyataan Berkuantor

A. Uraian Materi

1. Ingkaran Kuantor Universal

Misalkan :

p : semua bilangan bulat adalah positif (salah)
~p : ada bilangan bulat yang tidak positif (benar)
q : semua bilangan asli adalah positif (benar)
~q: beberapa bilangan asli yang tidak positif (salah)

Jadi, Ingkaran dari kuantor universal adalah kuantor ekstensial :

$$\boxed{\sim[(\forall x)\ P(x)] \equiv (\exists x)[\sim P(x)]}$$

Contoh : Tentukan negasi dari :

a. Semua tumbuh-tumbuhan mempunyai akar.
b. Setiap siswa MA tidak menyukai pelajaran Matematika

Jawab :

a. Terdapat tumbuh-tumbuhan yang tidak berakar
b. Ada Siswa MA yang menyukai matematika

2. Ingkaran Kuantor Eksistensial

Misalkan :

p : Ada bilangan prima adalah bilangan genap
~p : semua bilangan prima bukan bilangan genap
q : Ada wanita yang menyukai sepak bola
~q : semua wanita tidak menyukai sepak bola

Jadi, Ingkaran dari kuantor ekstensial adalah kuantor universal :

$$\sim\exists x \ni P(x) \equiv (\forall x)(\sim P(x))$$

Contoh : Tentukan negasi dari :

a. Terdapat binatang berkaki dua
b. Beberapa kepala negara adalah wanita

Jawab :

a. Semua binatang berkaki dua
b. Semua kepala Negara adalah wanit

B. Kesimpulan

Ingkaran dari kuantor universal adalah kuantor ekstensial :

$$\sim[(\forall x)\ P(x)] \equiv (\exists x)[\sim P(x)]$$

Ingkaran dari kuantor ekstensial adalah kuantor universal :

$$\sim\exists x \ni P(x) \equiv (\forall x)(\sim P(x))$$

C. Tugas

Buatlah beberapa pernyataan matematika yang termasuk pernyataan berkuantor, kemudian tentukan ingkarannya dan nilai kebenarannya.

D. Penilaian

Soal:

1. Tentuka negasi dari pernyataan berikut :
   a. Semua kuadrat mempunyai dua akar nyata
   b. Semua fungsi cosinus mempunyai periode 360^o
   c. Semua anggota DPR adalah pria.
   d. Beberapa siswa SMA tidak lulus ujian
   e. Terdapat siswa yang tidak memakai seragam sekolah.
   f. Ada bakteri yang dapat hidup di atas suhu 100^0C.
2. Tentukan negasi dari pernyataan berikut :
   a. $(\forall x)(x \in R, x^2 – 4 = 0)$
   b. $(\forall x)(x \in R, x2 – 2x – 3 > 0)$
   c. $(\forall x)(x \in R, –x2 – x + 6 \geq 0)$
   d. $(\forall x)(x \in R, x + 3 = 5)$
   e. $(\forall x)(x \in R, x2 + 2 > 0)$
3. Tentukan ingkaran dari pernyataan di bawah ini :
   a. $(\exists x)(x \in R, x – 1 = 2x – 5)$
   b. $(\exists x)(x \in R, x2 – 2x – 15 = 0)$
   c. $(\exists x)(x \in R, x3 – 1 > 0)$
   d. $(\exists x)(x \in R, –2x3 – 5x + 12 \leq 0)$

Jawaban:

1. Negasi pernyataan soal nomor 1:
   a. Beberapa kuadrat memiliki akar nyata
   b. Ada fungsi cosinus yang memiliki priode 360^0
   c. Ada anggota DPR wanita
   d. Semua siswa SMA lulus ujian

e. Semua siswa menggunakan seragam sekolah

f. Semua bakteri dapat hidup di atas suhu 100^0C

2. Negasi pernyataan soal no 2:
   a. $(\exists x)$ $(x \in R, x^2 - 4 = 0)$
   b. $(\exists x))(x \in R, x2 - 2x - 3 > 0)$
   c. $(\exists x)$ $(x \in R, -x2 - x + 6 \geq 0)$
   d. $(\exists x)$ $(x \in R, x + 3 = 5)$
   e. $(\exists x)$ $(x \in R, x2 + 2 > 0)$
3. Ingkaran dari pernyataan
   a. $(\forall x)$ $(x \in R, x - 1 = 2x - 5)$
   b. $(\forall x)$ $(x \in R, x2 - 2x - 15 = 0)$
   c. $(\forall x)$ $(x \in R, x3 - 1 > 0)$
   d. $(\forall x)$ $(x \in R, -2x3 - 5x + 12 \leq 0)$

MATERI 10
Penalaran Logis

A. Urain Materi

1. Argumen

Argumen adalah kumpulan pernyataan, baik tunggal maupun majemuk dimana pernyataan-pernyataan sebelumnya disebut premis-premis (p_1, p_2, p_3, …..) dan pernyataan terakhir disebut konklusi/ kesimpulan dari argument (Q).

Contoh:

P1 : Jika orang suka shadaqoh maka ia akan bahagia
P2 : Jika orang bahagia maka ia akan berumur panjang
Q : Jadi orang suka sahadaqoh maka ia akan berumur panjang.

2. Bukti Keabsahan Argumen

Bukti keabsahan argumen dapat melalui Tabel Kebenaran dan Aturan Penyimpulan. Untuk argumen sederhana atau argumen yang premis-premisnya hanya sedikit bukti keabsahan argumen dapat menggunakan tabel kebenaran, namun untuk argumen yang premis-premisnya kompleks harus menggunakan aturan-aturan yang ada pada logika diantaranya aturan penyimpulan.

Suatu argumen dikatakan valid jika kesimpulannya merupakan implikasi logis dari premis-premisnya. Karena suatu tautologi akan tetap benar tanpa bergantung pada isi pernyataan-pernyataannya maka vadilitas argumen juga tidak bergantung pada isi pernyataan-pernyataan baik pada premis maupun konklusinya. Ia hanya bergantung pada bentuknya, apakah suatu tautologi atau tidak. Ini adalah ciri khas dari logika matematika yang bersifat formal

3. Penarikan Kesimpulan

Metode yang digunakan pada penarikan kesimpulan yaitu Modus Ponens, Modus Tollens dan Silogisme. Kesimpulan atau konklusi ditarik dari beberapa pernyataan yang diasumsikan benar. Asumsi-asumsi disebut premis.

a. Modus Ponens

Modus Ponens adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan : “jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar, maka q benar “

premis 1 :	$p \Rightarrow q$	(B)
premis 2 :	p	(B)
kesimpulan :	q	(B)

Dapat juga diartikan : $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Tabel Kebenaran

P	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh :

a. Jika Husna rajin belajar maka ia akan naik kelas
   Husna Rajin Belajar
   ___
   $\therefore$ Husna akan naik kelas

b. Jika Fadhila seorang karyawati maka ia mendapat gaji
   Fadhila mendapat gaji
   ___
   $\therefore$ Fadhila Seorang Karyawati

b. Modus Tollens

Modus Tollens adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan : “jika p $\Rightarrow$ q benar dan ~q benar, maka ~p benar”.

premis	:	$p \Rightarrow q$	(B)
premis	:	$\sim q$	(B)
kesimpulan	:	$\sim p$	(B)

Dapat juga diartikan : $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

Tabel Kebenaran

p	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	B	S
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Contoh :

a. Jika Fiszki rajin belajar maka nilainya bagus
   Nilainya Fizki tidak bagus
   ___
   $\therefore$ Fizki tidak rajin belajar

b. Jika Husna sakit maka Ibunya menangis
   Ibunya Husna tersenyum-senyum
   ___
   $\therefore$ Husna Sehat

c. Silogisme

Silogisme adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan : "jika $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow r$ benar, maka $p \Rightarrow r$ benar"

premis 1 : $p \Rightarrow q$ (B)
premis 2 : $q \Rightarrow r$ (B)
kesimpulan : $p \Rightarrow r$ (B)

Dapat juga diartikan : $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Tabel Kebenaran

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Contoh :

Jika Husna sedang belajar maka Pajri makan

Jika Pajri maka maka ia kenyang

∴ Jika Husna sedang belajar maka Pajri kenyang

B. Kesimpulan

1. Argumen adalah kumpulan pernyataan, baik tunggal maupun majemuk
2. argumen dikatakan valid jika kesimpulannya merupakan implikasi logis dari premis-premisnya
3. Metode yang digunakan pada penarikan kesimpulan yaitu Modus Ponens, Modus Tollens dan Silogisme.

C. Tugas

Gunakanlah pernyataan matematika atau definisi matematika untuk latihan melakukan penarikan kesimpulan dan nyatakan nilai kebenarannya. Minimal setiap metode penarikan kesimpulan 3 contoh.

D. Penilaian

Soal:

1. Manakah penarikan kesimpulan yang sah ?

a. Jika Aldi seniman maka ia berambut panjang
Aldi berambut pendek
$\therefore$ Aldi bukan seniman

b. Jika hujan turun maka para petani senang
para petani sedih
$\therefore$ Hujan turun

c. Jika Asep petani maka ia mempunyai kebun
Asep mempunyai kebun
$\therefore$ Asep bukan petani

d. Jika Alia senang maka ia tertawa
ia menangis
$\therefore$ Alia senang

e. Jika Helmi lulus maka ia akan menyumbang
ia tidak lulus ujian
Helmi tidak lulus ujian

f. Jika Yohana orang kaya maka ia memiliki mobil
Yohana memiliki mobil
Yohana orang kaya

g. Jika Tikno lulus maka Ibunya bahagia
Jika Ibunya bahagia maka ia tidak memotong sapi
$\therefore$ Jika Tikno lulus maka Ibunya memotong sapi

h. Jika Surya pengacara maka ia sarjana hukum
Jika Surya sarjana hukum maka ia kaya
$\therefore$ Jika Surya pengacara maka ia kaya

i. Jika hari libur maka Alia berekreasi
Jika Alia berekreasi maka ia mengajak anaknya
$\therefore$ Jika hari libur maka ia mengajak anaknya

2. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang sah.

a.
$$\begin{array}{l} q \Rightarrow \sim p \\ \underline{\ldots\ldots\qquad\qquad} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow \sim q \\ \underline{\sim p\qquad\qquad} \\ \therefore \ldots\ldots \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow \sim q \\ \underline{\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad} \\ \therefore p \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow q \\ \underline{\sim q\qquad\qquad} \\ \therefore \ldots.. \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow p \\ \underline{\sim p\qquad\qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{l} p \quad \Rightarrow \sim q \\ \underline{\ldots \quad \Rightarrow \sim r\qquad} \\ \therefore \ldots \Rightarrow \ldots \end{array}$$

g.
$$\begin{array}{l} \ldots \Rightarrow \sim p \\ \underline{\ldots \Rightarrow \sim r} \\ \therefore \sim q \Rightarrow \ldots \end{array}$$

h.
$$\begin{array}{l} r \qquad \Rightarrow \ldots \\ \underline{\sim q \quad \Rightarrow \ldots} \\ \therefore \ldots \Rightarrow \sim p \end{array}$$

Jawaban:

1. Cara penarikan kesimpulan yang digunakan adalah:
   a. Modus Tollens
   b. Modus Ponens
   c. Modus Ponens
   d. Modus Tollens
   e. Modus Tollens
   f. Silogisme
   g. Silogisme
   h. Silogisme
2. Pernyataan yang tepat agar diperoleh kesimpulan yang sah
   a. Pernyataan q
   b. Negasi q
   c. Pernyataan p
   d. Pernyataan p
   e. Negasi q
   f. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow \sim q \\ \sim q \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore p \Rightarrow \sim r \end{array}$$
   g. $$\begin{array}{l} \sim q \Rightarrow \sim p \\ \sim p \Rightarrow \sim r \\ \hline \therefore \sim q \Rightarrow \sim r \end{array}$$
   h. $$\begin{array}{l} r \Rightarrow \sim q \\ \sim q \Rightarrow \sim p \\ \hline \therefore r \Rightarrow \sim p \end{array}$$

MATERI 11
Pembuktian Sifat Matematika

A. Uraian Materi

1. Pembuktian langsung

Pada pembuktian langsung, hal-hal yang diketahui tentang teorema diturunkan secara langsung dengan teknik tertentu hingga ditarik kesimpulan yang diinginkan. Penarikan kesimpulan dengan Modus Ponens dan Silogisme adalah contoh dari pembuktian langsung.

Contoh :

a. Buktikan bahwa 2 merupakan akar persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 8 = 0$
b. Buktikan, untuk sembarang bilangan, riil x, jika $|x| > 3$, maka $x^2 > 9$

2. Pembuktian Tak Langsung

Dengan metode pembuktian tak langsung, fakta-fakta yang ada tidak digunakan secara langsung untuk menarik suatu kesimpulan dan bukti-bukti di mulai dari hal-hal lain.

Pada bab ini dibahas 2 macam pembuktian tak langsung yaitu **Kontradiksi** dan **Kontraposisi**.

a. Kontradiksi

Adalah suatu pernyataan yang selalu salah, apapun nilai kebenaran dari komponen-komponennya. Misalkan : Untuk membuktikan p, maka ingkarannya adalah ~p, kemudian dilakukan suatu kontradiksi sehingga menjadi ~(~p) = p.

Langkah-langkah :

- Tentukan ingkaran kalimat yang akan dibuktikan
- Untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan benar maka harus dibuktikan ingkarannya bernilai salah.

Contoh :

Buktikan dengan cara kontradiksi, kebenaran kalimat berikut ini : $\forall$ x $\in$ A, x + 4 $\geq$ 5

Jawab :

Karena x adalah elemen bilangan asli : 1, 2, 3, ….

Maka, jika disubstitusikan kedalam persamaan di atas akan selalu bernilai benar. Seandainya kita menyatakan ($\exists$x), x $\in$ A, x + 4 $\geq$ 5, maka akan bernilai salah. Jadi, $\forall$ x $\in$ A, x + 4 $\geq$ 5 bernilai benar

b. Kontraposisi

Misalkan : Akan dibuktikan **implikasi** p $\Rightarrow$ q Benar, Maka dibuktikan **kontraposisi** ~q $\Rightarrow$ ~p Benar. Jika kontraposisinya benar maka implikasinya juga, karena p $\Rightarrow$ q $\equiv$ ~q $\Rightarrow$ ~p

Contoh :

Buktikan dengan cara kontraposisi, kebenaran kalimat berikut ini :

p $\Rightarrow$ q: Jika x^2 bilangan genap, maka x bilangan genap. Jika dibuktika pernyataan p $\Rightarrow$ q, maka akan bernilai benar, begitu juga, seandai pernyataan tersebut, dijadikan pernyataan kontraposisi, jika x^2 bukan bilangan genap, maka x bukan bilangan genap. Ini merupakan pernyataan yang ***benar*** juga. Jadi terbukti $p \Rightarrow q$ ***benar*.**

B. Kesimpulan

1. Pembuktian sifat matematika ada dua cara langsung dan tidak langsung
2. Pembuktian tidak langsung dapat dilakukan dengan pendekatan kontradiksi dan kontraposisi

C. Tugas

Buktikan pernyataan berikut bernilai benar

1. $\forall x \in R, x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ atau } x > 2)$
2. $\forall x \in R, x2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ atau } x = 3$
3. $\forall a, b \in R, a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ atau } b = 0$

D. Penilaian

Soal:

Buktikan pernyataan berikut bernilai benar dengan menggunakan salah satu cara yang dianggap lebik tepat

1. $\forall\ x \in R, x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ atau } x > 2)$
2. $\forall\ x \in R, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ atau } x = 3$
3. Jika $(x - 2)(x - 5) < 0$. maka $2 < x < 5$

Jawaban:

1. Jika dibuktikan secara langsung dengan mensubtitusikan setiap nilai x yang lebih kecil dari -2, maka pernyataan tersebut akan selalu bernilai benar. Begitu juga jika disubtitusikan x lebih besar dari 2. Dengan demikian pernyataan $\forall\ x \in R, x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ atau } x > 2)$ bernilai benar
2. Karena x adalah elemen bilangan real. jika kita melakukan subtitusi x tidak sama dengan negatif 2 dan tidak sama dengan 3, maka pernyatan tersebut akan bernilai salah. Sehingga kalau kita menyatakan terdapat x elemen bilangan real selain -2 dan 3 yang memenuhi persamaan tersebut maka $x^2 - x - 6 \neq 0$. (kontraposisi)
3. Jika dibuktikan dengan kontradiksi, maka kita harus membuktikan bahwa pada persamaan $(x - 2)(x - 5) < 0$ dan $x < 2$. Jika kita mensubtitusikan salah satu nilai x yang lebih besar dari 2, maka $(x - 2)(x - 5) < 0$ harus tetap lebih kecil dari 0 dan ternyata tidak selalu benar. Dengan demikian persamaan jika $(x - 2)(x - 5) < 0$. maka $2 < x < 5$ bernilai salah.

Rujukan:

Irving M. Copi, 1978, *Intoduction to Logic Sixth Edition,* New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Yaya S. Kusuma, 1986, *Logika Matematika Elementer,* Bandung: Penerbit Tarsito.

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta:: Gramedia.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

BAB II
Himpunan

PENDAHULUAN

Manusia sebagai manusia sosial dituntut untuk selalu bersama dengan anggota masyarakat lain dalam menyelesaikan setiap masalahnya. Untuk itu, dalam kehidupan sehari-hari kita tidak bias terlepas dari hidup bersama, berkelompok, dan bentuk-bentuk perhimpunan lainnya.

Matematika sebagai ilmu alat menyelesaikan permasalahan manusia dalam kehidupan sehari-hari membahas salah satu konsep yaitu himpunan. Dengan mempelajari tentang himpunan diharapkan mahasiswa mampu memahami:

1. Pengertian himpunan
2. Notasi himpunan
3. Penyajian himpunan
4. Jenis himpunan
5. Operasi himpunan

Materi 1
Pengertian dan penyajian Himpunan

A. Uraian Materi

1. Pengertian Himpunan

Pengertian himpunan dan anggota suatu (elemen atau unsure) himpunan terletak pada dasar matematika. Secara intuitif kita mengerti apa yang dimaksud dengan himpunan semua bilangan-bilangan asli, himpunan raja-raja yang masih hidup, dst. Sebenarnya pengertian himpunan lebih mendasar dari pada pengertian bilangan.

Himpunan adalah sekumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas. Secara mudah himpunan dapat diartikan sebagai koleksi objek-objek yang spesifik. Spesifik di sini berarti dapat dibedakan secara kontras antara himpunan yang satu dengan himpunan yang lain. Spesifik juga dapat diartikan bahwa himpunan tersebut memiliki ketentuan khusus yang dinamakan dengan syarat keanggotaan. Apabila kita minta seorang anak kecil yang belum bisa menghitung untuk mengumpulkan bunga-bunga merah diantara sejumlah bunga-bunga beraneka warna, dan ia dapat mengerjakannya maka dengan demikian ia memperlihatkan menangkap pengertian syarat keanggotaan. Jadi, boleh dikatakan bahwa himpunan merupakan suatu koleksi atas kumpulan objek-objek yang memenuhi syarat keanggotannya (untuk menjadi anggota himpunan tersebut).

Untuk menyatakan sebuah himpunan harus mengikuti aturan-aturat penyajian himpunan, akan tetapi perlu diketahui simbol pembentukan himpunan, yaitu :

- Dilambangkan dengan huruf capital
- Diapit oleh dua buah kurung kurawal
- Dipisahkan oleh tanda baca koma (,) pada setiap anggota himpunannya.

Secara umum ditunjukkan seperti berikut : **A = {.........}**

Keanggotaan pada suatu himpunan ditunjukkan dengan cara sebagai berikut:

$x \in$ B : x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin$ B : x bukan merupakan anggota himpunan A.

2. Cara Penyajian Himpunan

Mengikuti symbol penulisan himpunan, dalam prakteknya terdapat beberapa cara menyajikan sebuah himpunan, yaitu :

a. Enumerasi (pencacahan)

Enumerasi adalah penyajian himpunan dimana anggota himpunannya ditunjukkan satupersatu (dicacah)

Contoh :

1. Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
3. C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
4. $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
5. $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
6. Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$

7. Himpunan bilangan bulat {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 …}.

b. Notasi Pembentuk Himpunan

Bentuk umum dari Notasi Pembentukan Humpunan yaitu :

A : { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh :

A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5

A = { $x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

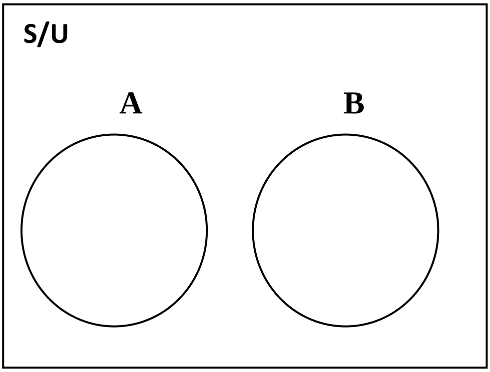
$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$ yang ekivalen dengan A = {1, 2, 3, 4}

c. Diagram Venn

Diagram Ven merupakan salah satu cara untuk menyajikan sebuah himpunan dengan menggambarkannya menggunakan aturan-aturan tertentu, sehingga himpunan yang disajikan Nampak lebih praktis. Diagram ven sangat membantu dalam menyajikan himpunan jika himpunannya sudah lebih komplek dan mengandung hubungan berdasarkan aturan operasi himpunan. Berukt cara menyajika sebuah himpunan dengan menggunakan diagram ven, yaitu :

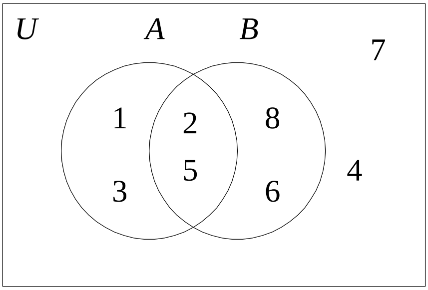
- Angggota semesta pembicaraan berada dalam sebuah kotak persegi
- Ditempatkan symbol S atau U pada pojok kiri atas dalam kotak persegi
- Disimbolkan dengan huruf kapital untuk menunjukkan himpunan tertentu
- Dibatasi dengan garis melingkar untuk membatasi himpunan tertentu

Gambar Diagram Venn



Contoh 5.

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, *A* = {1, 2, 3, 5} dan *B* = {2, 5, 6, 8}. Diagram Venn dapat digambar seperti berikut :



d. Simbol-simbol Baku

Simbo-simbol baku berlaku pada himpunan bilangan, symbol-simbol tersebut diberlakukan berdasarkan kesepakatan sehingga menjadi pemahaman bersama untuk digunakan dalam penunjukkannya, simbol baku tersebut yaitu :

P =himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N =himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z =himpunan bilangan bulat={ ..., -2, -1, 0, 1, 2,... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks
S = himpunan semesta

B. Kesimpulan

Himpunan adalah sekumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas.
Penyajian himpunan dapat dilakukan dengan 4 cara, yaitu enumerasi, notasi pembentukan himpunan, diagram venn, dan simbol baku.

C. Tugas

Lakukan identifikasi kelompok atau kumpulan yang berada disekitar anda, lalu nyatakan apakah kumpulan tersebut termasuk dalam himpunan atau bukan. Jika termasuk himpuna, maka nyatakan anggotanya dengan menggunakan cara penyajian himpunan yang dianggap paling tepat.

D. Penilaian

Soal:

1. Manakah diantara koleksi/kumpulan berikut yang merupakan himpunan:
   a. Kumpulan siswa-siswi kelas IA MTs NW Kembang Kerang.
   b. Himpunan Guru Matematika Lombok Timur.
   c. Himpunan bilangan asli.
   d. Kumpulan mahasiswa-mahasiswi yang tempat tinggalnya jauh dari kampus.
   e. Himpunan pengusaha yang berhasil.
   f. Himpunan bilangan yang sangat besar.
2. Tuliskan dalam notasi pembentukan himpunan dan enumerasi himpunan berikut:
   a. Himpunan bilangan ganjil kurang dari 13
   b. Himpunan bilangan ganjil antara 2 dan 12
   c. Himpunan bilangan prima kurang dari 13
   d. Himpunan bilangan prima antara 2 dan 12
   e. $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

Jawaban:

1. Yang termasuk himpunan adalah:
   a. Himpunan (jelas keanggotaannya)
   b. Himpunan (Jelas Keanggotaannya)
   c. Himpunan (Jelas Keanggotaannya)
   d. Bukan himpunan (Jarak yang dinyatakan jauh tidak pasti)
   e. Bukan himpunan (Ukuran keberhasilan tidak sama satu dengan yang lain)
   f. Bukan himpunan (sangat besar tidak dapat ditentukan)
2. Penyajian himpunan pada himpunan ditunjukkan sebagai berikut:
   a. $A=\{x|x$ adalah bilangan ganjil lebih kecil dari 13}
   $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
   b. B= $\{x\ |x, 2 < x < 12,$ *dimana* $x \in$ bilangan ganjil}
   $B = \{ 3, 5, 7, 9, 11\}$
   c. C=$\{x|x$ adalah bilangan prima lebih kecil dari 13}
   $C = \{ 1, 3, 5, 7, 11\}$
   d. D= $\{x|x, 2< x < 12,$ *dimana* $x \in$ bilangan prima}
   $D = \{ 3, 5, 7, 11\}$
   e. E = $\{x|x$ *adalah bilangan kelipatan 3 yang kurang dari 16*}

MATERI 2
Macam-macam Himpunan

A. Uraian Materi

Berikut akan dibahas beberapa jenis himpunan, yaitu :

1. Himpunan Kardinal

Himpunan kardinal adalah jumlah elemen yang terdapat dalam satu himpunan. Misalnya Jumlah elemen di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A*.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh :

a) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$, atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

b) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

c) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

2. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota atau himpunan dengan kardinal = 0

Notasi : $\varnothing$ atau $\{\}$

Contoh :

a) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

b) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

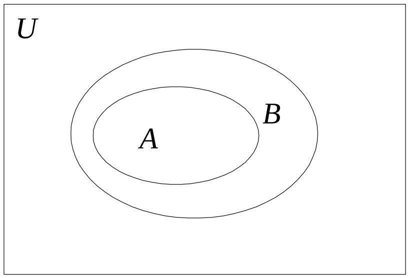
c) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0\}$, $n(A) = 0$

3. Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

Notasi: $A \subseteq B$

Jika Ditunjukkan dengan Diagram Venn dapat dilihat sebagai berikut :



Contoh :

a. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
c. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan *A* disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan *A*.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari *A*.
- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

  a) $A \subset B$: *A* adalah himpunan bagian dari *B* tetapi $A \neq B$. *A* adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari *B*. Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

  b) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa *A* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *B* yang memungkinkan $A = B$.

4. Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen *B* dan sebaliknya setiap elemen *B* merupakan elemen *A*. dapat juga dikatakan $A = B$ jika *A* adalah himpunan bagian dari *B* dan *B* adalah himpunan bagian dari *A*. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh :

a) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

b) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

c) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, *A*, *B*, dan *C* berlaku aksioma berikut:

1) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
2) jika $A = B$, maka $B = A$
3) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

5. Himpunan yang Ekivalen

Himpunan *A* dikatakan ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh :

Jika $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

6. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

Notasi : $A \,//\, B$

Contoh :

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

7. Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi : $P(A)$ atau 2^A
Jika $\lvert A \rvert = m$, maka $\lvert P(A) \rvert = 2^m$.

Contoh : Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{2\}, \{ 1, 2 \}\}$

B. Kesimpulan

Terdapat 7 jenis himpunan, yaitu:

1. Himpunan Kardinal
   Notasi: n(A) atau $\lvert A \rvert$
2. Himpunan Kosong
   Notasi : $\varnothing$ atau {}
3. Himpunan Bagian (Subset)
   Notasi: $A \subseteq B$
4. Himpunan yang Sama
   Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$
5. Himpunan yang Ekivalen
   Notasi : $A \sim B \leftrightarrow \lvert A \rvert = \lvert B \rvert$
6. Himpunan Saling Lepas
   Notasi : A // B
7. Himpunan Kuasa
   Notasi : P(A) atau 2A
   Jika $\lvert A \rvert$ = m, maka $\lvert P(A) \rvert$ = 2m

C. Tugas

1. Tentukan kardinalitas dari himpunan mahasiswa program studi di UIN Mataram
2. Bagian manakah di UIN mataram yang termasuk himpunan kosong
3. Tunjukan hubungan himpunan bagian antar lembaga di lingkup UIN Mataram
4. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan C= { a, b, c, d, e }

D. Penilaian

Soal:

1. Berapakah kardinalitas dari himpunan A = { x | x < *50*, $x \in$ bilangan Prima}
2. Manakah dari himpunan berikut yang himpunan kosong
   a. Himpunan dari bilangan akar negatif *a*
   b. Himpunan mahasiswa jurusan matematika
   c. Himpunan mahasiswi UIN yang tidak berjilbab
3. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan B={1, 2, 3, 4}
4. Diketahui A = {a, b, c}, B = {a, b, d, e, g}, C = {a, b, c, d, e, f}. manakah diantara himpunan tersebut yang mengandung hubungan sebagai himpunan bagian.
5. Diketahui A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, banyak himpunan bagian dari A yang mempunyai tiga anggota adalah . .

Jawaban:

1. 17
2. A dan C
3. Himpunan kuasanya dari himpunan B = { { $\varnothing$ }, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4,}}
4. Karena semua anggota Himpunan A ada di Himpunan C, Maka $A \subseteq C$

MATERI 3
Operasi Himpunan

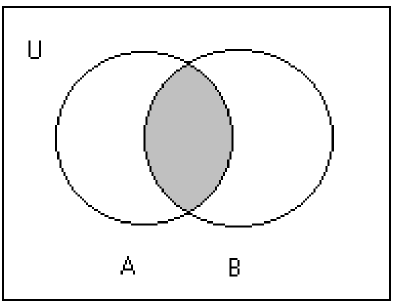
A. Uraian Materi

Pada bagian ini, dibahas operasi-operasi yang berlaku pada himpunan. Operasi tersebut hanya dikenakan pada dua himpunan atau lebih, tidak bias dikerjakan hanya pada satu himpunan saja. Kalimat ‘tidak bisa’ di sini tidak berarti sama sekali tidak bisa dilakukan. Maksud dari kalimat ini adalah bahwa operasi yang dikenakan pada dua himpunan yang sama tidak akan memberikan hasil yang berbeda. Jadi, tetap bisa dilakukan namun tidak memberikan manfaat apapun.

1. Irisan (*intersection*)

Himpunan A Irisan Himpunan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas elemen-elemen yang sekaligus berada dalam A muapun B

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh :

Jika A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {4, 10, 14, 18},

maka A $\cap$ B = {4, 10}

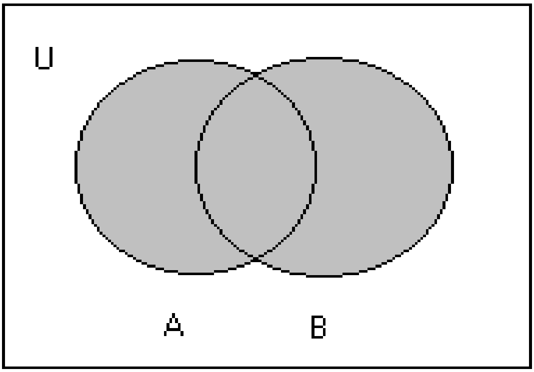
Jika A = {3, 5, 9} dan B = { -2, 6 }, maka A $\cap$ B = $\varnothing$.

Artinya: A // B

2. **Gabungan (*union*)**

Gabungan (*union*) himpunan A dan himpunan B adalah sebuah himpunan yang anggotanya merupakan anggota A atau anggota B atau anggota keduanya.

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



Contoh :

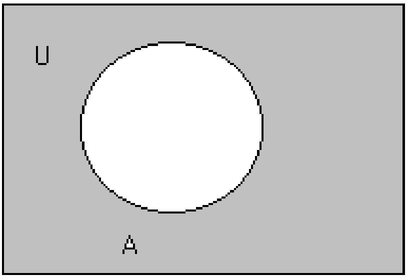
a) Jika A = { 2, 5, 8 } dan B = { 7, 5, 22 }, maka $A \cup B$ = { 2, 5, 7, 8, 22 }

b) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

Jika terdapat sebuah himpunan A, maka Himpunan A Komplemen adalah Humpunan yang merupakan anggota himpunan semesta akan tetapi tidak merupakan anggota himpunan A.

Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh:

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

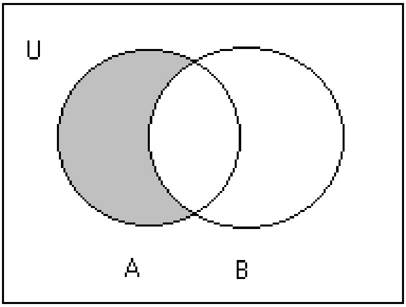
a) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

b) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

4. Selisih (*difference*)

Himpunan A dikurangi (selisih) himpunan B adalah anggota himpunan A yang tidak termasuk anggota himpunan B, begitu juga sebaliknya jika kita melakukan operasi selisih himpuna B – A.

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh :

a. Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$
b. $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. **Jumlah**

Operasi penjumlahan pada himpunan A dan B ditunjukkan dengan notasi:

$$A + B = \{ x \mid x \in A, x \in B, x \notin A \cap B\}$$

Penjumlahan himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang anggotanya termasuk anggota A dan B akan tetapi bukan anggota himpunan $A \cap B$ (irisannya).

Contoh: Tentukan A + B jika diketahui: A = {a, b, d, 4, 5} dan himpunan B = {1, a, 2, b, 3, c} Jawab: Dari dua himpunan yang diketahui kita dapatkan bahwa $A \cap B$ = {a, b} Sehingga A + B = {c, d, 1, 2, 3, 4, 5}

6. **Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)**

Beda Setangkup (*symetric difference*) dari himpunan A dengan himpunan B, ditulis sebagai A Δ B, adalah sebuah himpunan yang anggotanya merupakan anggota gabungan himpunan A dan B, tetapi bukan merupakan anggota irisan himpunan A dan B.

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh :

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

7. **Perkalian Kartesian (*cartesian product*)**

Perkalian kartesian himpunan A dan B adalah pasangan berurutan ***a*** dengan ***b***, dimana ***a*** adalah anggota himpunan A dan ***b*** adalah anggota dari himpunan B

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh:

Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

B. Kesimpulan

Operasi himpunan terdiri dari:

1. Irisan yang dinyatakan dalam bentuk
   Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$
2. Gabungan yang dinyatakan dalam bentuk
   Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$
3. Komplemen yang dinayatakan dalam bentuk
   Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in \text{U}, x \notin A \}$
4. Selisih yang dinyatakan dalam bentuk
   Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = \text{A} \cap \overline{B}$
5. Beda setangkup yang dinyatakan dalam bentuk
   Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
6. Perkalian kartesian yang dinyatakan dalam bentuk
   Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

C. Tugas

1. Tentukanlah dua buah himpunan atau lebih, kemudian nyatakan dalam bentuk pencacahan anggota.
2. Tentukanlah hasil dari 6 jenis operasi himpunan menggunakan anggota himpunan yang sudah ditentukan pada nomor 1.

D. Penilaian

Soal:

1. Diketahui A = { a, 1, b, 2, c, 3} B = { p, 4, q, 5, r, 6}
Tentukan A + B!
Jawab : $A \cup B$ = { a, b, c, p, q, r, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
$A \cap B$ = { }
Maka A + B = { a, b, c, p, q, r, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

2. Tentukan A + B jika diketahui himpunan:
A = Huimpunan bilangan prima yang kurang dari 10
B = Himpunan bilangan komposit yang kurang dari 10
Jawab: A = { 2, 4, 6, 8}
B = { 1, 4, 6, 8, 9}
$A \cup B$ = { 1, 2, 4, 6, 8, 9}
$A \cap B$ = {4,6,8}
Maka A + B = { 1,2,9 }

3. Diketahui himpunan-himpunan yang didefinisikan sebagai berikut:
A = { x | $0 \leq x \leq 18$, $x \in$ bila Asli yang habis dibagi 3}
B = { x | $9 \leq x \leq 19$, $x \in$ Bilangan Prima }
C = { x | $-8 \leq x \leq 7$, $x \in$ B }
Tentukan:
a. A + ($B \cap C$)
b. B + ($A \cap C$)
c. C + ($A \cap B$)
d. ($A \cap B$) + ($A \cap C$)
Diketahui:
A = { 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 }
B = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }
C = { -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Jawab:

a. Diketahui $B \cap C = \{ 3, 7 \}$, sehingga

$A + (B \cap C) = A + \{ 3, 7 \}$

$= \{ 0, 6, 7, 9, 12, 15, 18 \}$

b. Diketahui $(A \cap C) = \{ 0, 3, 6\}$, jadi $B + (A \cap C)$

$= B + \{ 0, 3, 6\}$

$= \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7\}$

c. Diketahui $(A \cap B) = \{ 3 \}$, sehingga

$C + (A \cap B) = C + \{ 3 \}$

$= -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$

d. Diketahui $(A \cap B) = \{ 3\}$ dan $(A \cap C) = \{0, 3, 6, \}$

Jadi $(A \cap B) + (A \cap C) = \{ 0, 6 \}$

4. Tentukan A – B jika diketahui:

$A = \{p, q, r, s, t\}$

$B = \{3, r, 6, s, 9, t\}$

Jawab: A – B =…, sebagaimana define dari selisih dua himpunan yaitu himpunan yang merupakan anggota A tapi tidak ada di B. dari soal tersebut p, q, r, s, t adalah anggota-anggota A dimana r dan s juga sekaligus anggota B. mak diperolah: $A – B = \{ p, q, t \}$

5. Terdapat himpunan

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ 2, 4, 6 \}$

$C = \{ 3, 4, 5, 7 \}$ dan

$S = \{ x \mid 1 \leq x \leq 7; x \in \text{Asli} \}$

Tentukan :

a. A^c

b. B^c

c. C^c

d. $(A \cup B)^c$
e. $(A \cap B)^c$
f. $(A \cup C)^c$
g. $(A \cap C)^c$
h. $(B \cup C)^c$
i. $(B \cap C)^c$
j. $(A + B)^c$
k. $(A - B)^c$
l. $(A + C)^c$
m. $(A - C)^c$

Jawab:

Diketahui himpunan semesta adalah:

$S = \{ x \mid 1 \leq x \leq 7; x \in \text{Asli} \} = \{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6\ 7\}$, dengan demikian:

a. $A^c = \{ 4, 5, 6, 7\}$
b. $B^c = \{1, 3, 5, 7\}$
c. $C^c = \{ 1, 2, 6\}$
d. $(A \cup B)^c = \{ 5, 7\}$
e. $(A \cap B)^c = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
f. $(A \cup C)^c = \{ 6\}$
g. $(A \cap C)^c = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
h. $(B \cup C)^c = \{ 1\}$
i. $(B \cap C)^c = \{ 1, 2, 3, 6, 7\}$
j. $(A + B)^c =\{ 2, 5, 7\}$
k. $(A - B)^c = \{ 2, 4, 5, 6, 7\}$.
l. $(A + C)^c = \{ 3, 6\}$

Rujukan

Putra, 2004, *Matematika SMA Kelas 1 Jilid 1B,* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

BAB III
Relasi dan Fungsi

PENDAHULUAN

Lanjutan dari telah memahami himpunan, pada perkuliahan matematika dasar diberikan materi tenatng relasi dan fungsi. Materi ini diharapkan dapat membantu siswa untuk memahami setiap aturan hubungan yang terbangun antara satu himpunan dengan himpunan lainnya. Dengan demikia, ketika memetakan atau menghubungkan satu himpunan dan lainnya tidak salah. Memahami materi tentang relasi dan fungsi juga diharapkan mahasiswa pandai dalam membangun hubungan atau berinteraksi dengan orang lain dalam kehidupan sehari-hari. Sebab hubungan yang terbangun dengan aturan atau pergaulan yang tidak mematuhi aturan akan membawa dampak kurang baik kepada kedua belah pihak.

Pada bab ini akan dibahas tentang relasi dan fungsi dengan tujuan mahasiswa bias memahami:

1. Pengertian relasi dan fungsi
2. Cara menyatakan relasi
3. Jenis fungsi
4. Sifat fungsi
5. Aljabar fungsi
6. Fungsi komposisi dan invers
7. Akar dan pangkat
8. Fungsi eksponen dan logaritma

MATERI 1

Relasi dan Fungsi

B. Uraian Materi

1. Pengertian Relasi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan anggota-angggota himpunan A (daerah asal) dengan anggota-anggota himpunan B (Daerah lawan. Relasi dapat dinyatakan dengan 3 cara, yaitu :

a. Diagaram panah
b. Himpunan pasangan berurutan
c. Diagram Cartesius

Contoh :

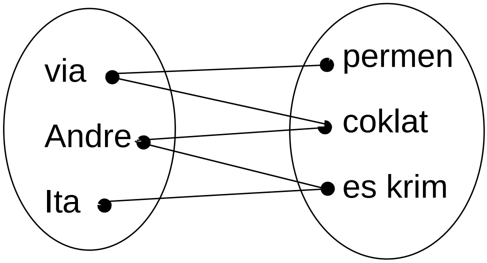
Via : aku senang permen dan coklat
Andre : aku senang coklat dan es krim
Ita : aku suka es krim

Dari contoh di atas dapat dibuat dua himpunan, yaitu :

❖ Himpunan A adalah himpunan nama orang
A = { Via, Andre, Ita }
❖ Himpunan B adalah himpunan makanan kesukaan
B = { es krim, coklat, permen }

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah "makanan kesukaan" dan dapat dinyatakan dengan :

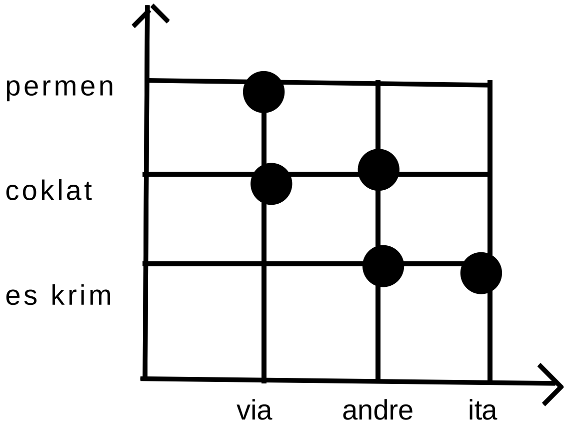
a. Diagram panah



b. Himpunan pasangan berurutan

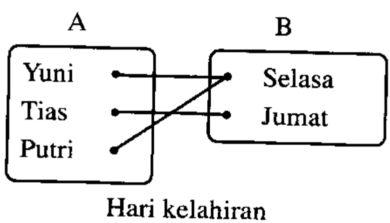
{(Via, permen) , (Via, coklat) , (Andre, coklat) , (Andre, es krim) , (Ita, es krim)}

c. **Diagram Cartesius**



2. Fungsi / Pemetaan

Perhatikan gambar berikut!

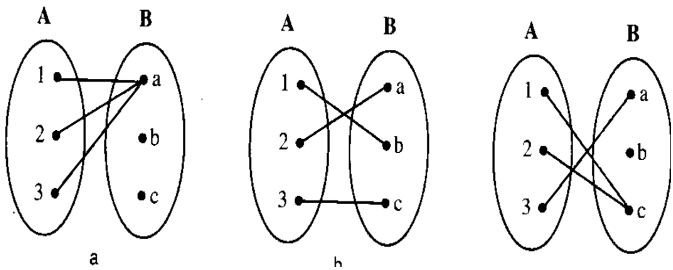


A = { Yuni, Tias, Putri }
B = { Selasa, Jumat }

Pada relasi di atas, adakah relasi yang menghubungkan setiap anggota himpunan A ke himpunan B di mana setiap anggota A mempunyai pasangan satu di anggota B? Relasi seperti ini disebut fungsi atau pemetaan. , Jadi, suatu fungsi/pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah :

"Suatu relasi khusus, sehingga setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan tepat satu anggota himpunan B."

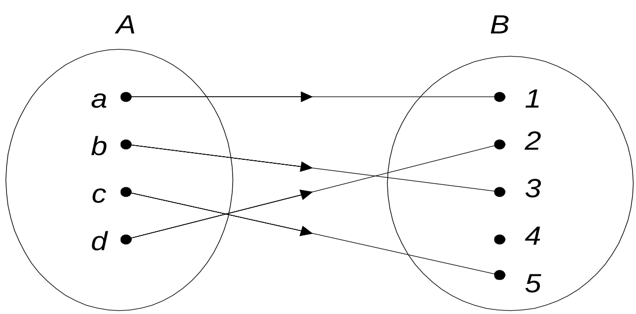
Contoh fungsi/pemetaan:



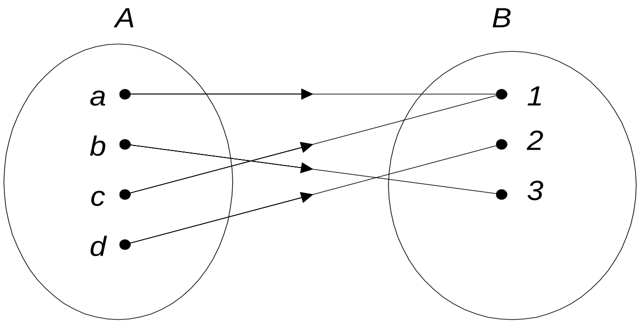
3. Sifat Fungsi

Memperhatikan bagaiman elemen pada masing-masing anggota himpunan yang direlasikan pada suatu fungsi, maka sifat fungsi dapat dibedakan menjadi tiga yaitu :

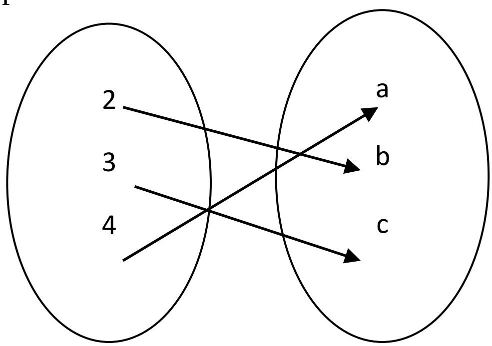
a) Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



b) Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*. Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



c) Fungsi *f* dikatakan Bijektif **(Korespondensi Satu-satu)** jika Suatu pemetaan *f*: A→B sedemikian rupa sehingga *f* merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "*f* adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".



C. Kesimpulan

1. Relasi adalah pemasangan anggota himpunan daerah asal ke himpunan daerah lawan
2. Penyajian relasi dapat dilakukan dengan 3 cara, yaitu diagram panah, pasangan berurutan, dan diagram kartesius
3. Fungsi adalah relasi khusus sehingga setia anggota A memiliki pasangan dengan tepat satu anggota himpunan B
4. Sifat fungsi dalam pemetaan ada tiga yaitu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

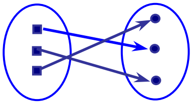
D. Tugas

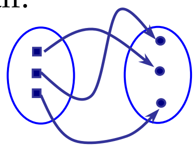
Buatlah tiga pemasangan anggota himpunan berbeda yang memuat hubungan pemetaan sekaligus fungsi dan sajikanlah bentuk pemetaan tersebut menggunakan tiga cara penyajian pemetaan.

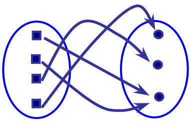
E. Penialaian

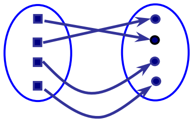
Soal:

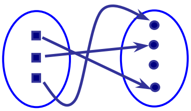
1. Nyatakan fungsi-fungsi berikut sebagai fungsi satu-satu, fungsi surjektif, atau fungsi bijektif.

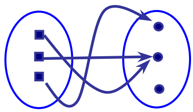
A


B


C


D


E


F


2. Buatlah gambaran relasi dengan menggunakan Diagaram panah, Himpunan pasangan berurutan, Diagram Cartesius pada permasalahan berikut ini :

Husna : aku senang olahraga dan menggambar
Fizki : aku senang renang dan menggambar
Harni : aku suka renang dan olahraga

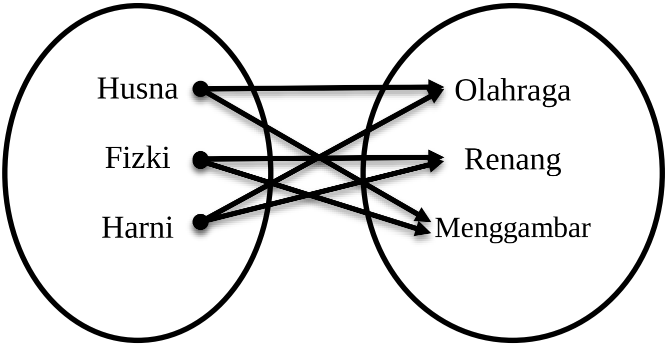
Jawaban:

1. Sifat fungsi pada gambar pemetaan di atas adalah…
   B. Fungsi Bijektif
   C. Fungsi Bijektif
   D. Fungsi Surjektif
   E. Fungsi Bijektif
   F. Fungsi Injektif

G. Fungsi Injektif

2. Berikut gambar sajian pemetaannya:

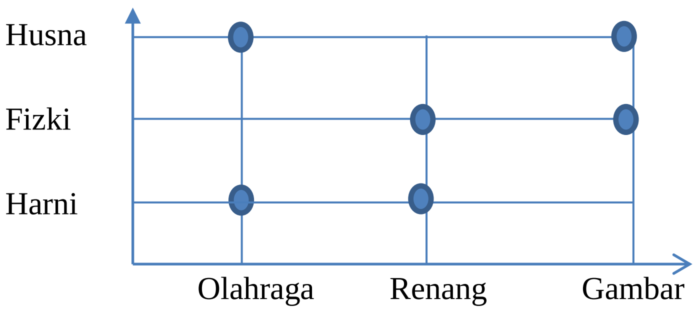
Diagram Panah



Pasangan Berurutan

{(Husna, olahraga) , (Husna, menggambar), (Fizki, Renang), (Fizki, Menggambar), Harni, Olahraga), (Harni, Renang)}

Diagram Kartesius



MATERI 2

Fungsi

A. Uraian Materi

1. Pengertian Fungsi

Fungsi merupakan salah satu jenis relasi. Fungsi disebut juga dengan pemetaan. Suatu relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B disebut fungsi atau pemetaan dari A ke B. Suatu fungsi umumnya dinyatakan dengan huruf kecil. Misalnya, f adalah fungsi dari A ke B, fungsi itu ditulis dengan $f : A \rightarrow B$. Dalam hal ini A disebut domain (daerah asal) dan B disebut kodomain (daeerah kawan).

Jika f memetakan x € A ke y € B maka dapat dikatakan bahwa y adalah peta dari x dan hal ini dapat ditulis dengan $f : x \rightarrow y$ atau $y = f(x)$. Himpunan y € B yang merupakan peta dari x € A disebut range (daerah hasil).

2. Notasi dan Fungsi

Sebuah fungsi f memetakan setiap unsur himpunan A dengan unsure himpunan B. Jika x adalah unsur himpunan A dan y adalah unsur himpunan B, maka pasangan terurut fungsi f memenuhi (x,y) € f dan dinotsikan sebagai berikut :

$$\boxed{f : x \rightarrow y = f(x)}$$

Notasi ini mempunyai arti fungsi f memetakan setiap bilangan real x € A ke bilangan real y € B dengan nilai $y = f(x)$. Hubungan $y = f(x)$ dinamakan rumus atau aturan fungsi. x dinamakan variabel bebas, y dinamakan variabel tergantung atau variabel tak bebas. Untuk memenuhi punulisan biasanya fungsi hanya dituliskan y = *f* (x), misalnya y = 2x + 1 atau *f* (x) = 2x.

3. **Beberapa fungsi khusus**

Sebuah fungsi f memetakan anggota himpunan A ke anggota himpunan B, fungsi dapat dirumuskan y = f(x). Berdasarkan bentuk rumusnya, fungsi dapat digolongkan menjadi beberapa bentuk fungsi khusus diataranya fungsi konstan, fungsi linier, fungsi kuadrat, dan fungsi nilai mutlak.

a. **Fungsi konstan**

Fungsi konstan adalah fungsi yang setiap anggota himpunan asal dipetakan ke satu anggota yang sama pada aerah hasil. Berarti himpunan dari daerah hasilnya memiliki satu anggota himpunan. Contoh fungsi f (x) = 3. fungsi konstan ini dapat diperlihatkan pada grafik cartesius sebagai garis lurus mendatar.

b. **Fungsi identitas.**

Fungsi identitas merupakan fungsi yang akan memetakan anggota dari daerah asal ke dirinya sendiri. Berarti fungsi ini merupakan pemetaan satu-satu dengan anggota yang sama. Fungsi ini hanya ada satu dengan rumus fungsi

$$\boxed{Y = f(x) = x}$$

c. Fungsi linier

Fungsi linier merupakan fungsi yang memetakan setiap anggota daerah asal ke anggota daerah hasil dengan perubahan konstan. Bentuk umum rumus fungsi ini adalah:

$$\boxed{y = f\,(x) = ax + b;\ \text{dengan a dan b} \in R,\ a \neq 0}$$

dari bentuknya fungsi linier disebut juga dengan variable x berderajat satu.

d. Fungsi kuadrat

fungsi kuadrat merupakan fungsi dengan variabel x berpangkat tertinggi dua. Dari pengertian ini, maka fungsi kuadrat dapat dirumuskan dengan bentuk umum

$$\boxed{f\,(x) = ax^2 + bx + c;\ \text{dengan } a \neq 0\ ;\ a, b, c \in R}$$

e. Fungsi modulus atau fungsi nilai mutlak

Nilai mutlak dinotasikan dengan tanda | | artinya selalu berharga positif. Misal $|-2| = 2$, $|\ 4\ | = 4$. berarti nilai mutlak merupakan fungsi yang memiliki nilai selalu positif untuk semua nilai variabel x sehingga berlaku

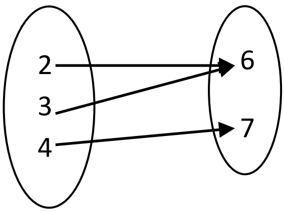
$$\boxed{y = f\,(x) = |F(x)|\ \{F\,(x),\ \text{jika } F\,(x) > 0}$$

B. Kesimpulan

1. Fungsi f : A → B dimana A adalah domain (daerah asal) dan B disebut kodomain (daeerah kawan).
2. Fungsi konstan
   f(x) = c
3. Fungsi identitas
   f(x) = x
4. Fungsi linier
   y = f (x) = ax + b; dengan a dan b € R, a ≠ 0
5. Fungsi kuadrat
   f (x) = ax² + bx + c; dengan a ≠ 0 ; a, b, c € R
6. Fungsi nilai mutlak
   y = f (x) = |f(x) | {f (x), jika f (x) >0

C. Tugas

1. Carilah daerah asal dan daerah hasil dari :
   a. {(4,1),(3,2),(-1,6)}
   b. y= 2x + 4
   c.



2. Apakah ketiga bentuk hubungan di atas merupakan suatu fungsi

D. Penilaian

Soal:

1. Fungsi f memetakan setiap anggota x di daerah asal ke $2x + 1$ dari daerah kawan.
   a. Tulislah notasi fungsi f
   b. Tulislah rumus f
   c. Tentukan nilai f(2)
2. Fungsi $f : x \rightarrow 2x+ 1$, jika x E { 1,2,3,4}, tentukanlah:
   a. Rumus Fungsi
   b. Range
   c. Jika $f(a) = 15$, tentukan nilai a
3. Diketahui $f(x+3)=2x+5$, nilai f(10) adalah...
4. Diketahui fungsi kuadrat $f(x)=3(x-1)^2+5$, nilai a+b+c adalah...
5. Fungsi f memetakan setiap x anggota daerah asal ke $2x + 1$ dari daerah kawan
   a. Tulislah notasi fungsi f
   b. Tulislah rumus f
   c. Tentukan nilai f(2)
6. Fungsi $f : x \rightarrow 2x+ 1$, jika x E { 1,2,3,4}, tentukanlah:
   a. rumus fungsi
   b. range
   c.jika $f(a) = 15$, tentukan nilai a

Jawab :

1. Soal nomor 1
   a.Notasi fungsi f adalah $f : x \rightarrow 2x + 1$
   b.Rumus fungsi f adalah $f(x) = 2x + 1$
   c.Rumus fungsi $f(x) = 2x + 1$

$f(2) = (2 \times 2) + 1$

$f(2) = 4 + 1$

$f(2) = 5$

2. Soal nomor 2
   a. Rumus fungsi adalah $f(x) = 2x + 1$
   b. $f(1) = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3$

      $f(2) = 2.2 + 1 = 4 + 1 = 5$

      $f(3) = 2 . 3 + 1 = 5 + 1 = 6$

      $f(4) = 2 . 4 + 1 = 8 + 1 = 9$
   c. Bila $f(a) = 15$, maka $f(x) = 2x + 1$

      $f(a) = 2a + 1$

      $15 = 2a + 1$

      $2a = 14$

      $a = 7$, maka nilai $a = 7$
3. Soal nomor 3

   $f(x+3) = 2x+5$

   $f(x) = 2(x-3)+5$

   $= 2x-6+5$

   $= 2x-1$

   $f(10) = 2(10)-1$

   $= 19$
4. Soal nomor 4

   $f(x)=ax^2+bx+c = 3(x-1)+5$

   $=3(x^2-2x+1)+5$

   $=3x^2-6x+8$

   Dengan demikian, $a + b + c = 3+(-6)+8 = 5$
5. Soal nomor 5

   a. Notasi fungsi f adalah $f : x \rightarrow 2x + 1$

   b. Rumus fungsi f adalah $f(x) = 2x + 1$

c. Rumus fungsi $f(x) = 2x + 1$

$f(2) = (2 \times 2) + 1$

$f(2) = 4 + 1$

$f(2) = 5$

6. Soal nomor 6
   a. Rumus fungsi adalah
      $f(x) = 2x + 1$, maka $f(x) = 2x + 1$
   b. $f(1) = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3$
      $f(2) = 2.2 + 1 = 4 + 1 = 5$
      $f(3) = 2.3 + 1 = 6 + 1 = 7$
      $f(4) = 2.4 + 1 = 8 + 1 = 9$
      maka range fungsi = $\{3, 5, 7, 9\}$
   b. Bila $f(a) = 15$
      $f(a) = 2a + 1$
      $15 = 2a + 1$
      $2a = 15 - 1$
      $2a = 14$
      $a = 7$; maka nilai a = 7

MATERI 3
Aljabar, Komposisi, dan Ivers Fungsi

A. Uraian Materi

1. Aljabar Fungsi

Jenis operasi aljabar sering dijumpai dalam himpunan bilangan real, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan perpangkatan. Operasi aljabar pada bilangan real dapat diterapkan pada aljabar fungsi, yaitu jika diketahui fungsi f (x) dan g (x), dan n bilangan rasional.

Operasi aljabar pada fungsi ditetapkan sebagai berikut :

1. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Selisih fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
4. Pembagian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
   $$(x)\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
5. Perpangkatan fungsi f (x) dengan bilangan n ditulis:
   $f^n(x) = \{f(x)\}^n$

Contoh :

Diketahui fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus f (x) = 2x – 10 dan g (x) = $\sqrt{2x-1}$. Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut:

a. (f + g) (x)
b. (f – g) (x)
c. (f x g) (x)
d. $\left(\frac{f}{g}\right)$ (x)
e. f^3 (x)

Jawab **:**

a. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) adalah
   (f + g) (x) = f (x) + g (x) = 2x – 10 + $\sqrt{2x-1}$
b. Selisih fungsi f (x) dan g (x) adalah
   (f – g) (x) = f (x) – g (x) = 2x – 10 - $\sqrt{2x-1}$
c. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) adalah
   (f x g) (x) = f (x) x g (x) = (2x – 10) ($\sqrt{2x-1}$) = 2x $\sqrt{2x-1}$ - 10 $\sqrt{2x-1}$

   Pembagian fungsi f (x) dengan g (x) adalah

   $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x-1}}$$
d. Perpangkatan fungsi f (x)
   f^3 (x) = $\{f (x)\}^3$ = $(2x – 10)^3$ = $8x^3 – 160x^2 + 800x – 1000$

2. Fungsi Komposisi

Dari dua buah fungsi f(x) dan g(x) dapat dibentuk fungsi baru dengan menggunakan operasi komposisi. Operasi komposisi dilambangkan dengan o (dibaca : komposisi atau bundaran). Fungsi baru yang dapat dibentuk dengan operasi komposisi itu adalah :

a. *(f o g) (x) dibaca : f komposisi g(x) atau f(g(x))*
b. *(g o f) (x) dibaca : g komposisi f(x) atau g(f(x))*

Dimisalkan fungsi g : A → B ditentukan dengan y = g (x) dan f : B → C ditentukan dengan y = f (x), maka Fungsi komposisi f dan g ditentukan dengan: h(x) = (f o g) (x) = f (g(x)). Begitu juga sebalikanya dimisalkan fungsi f : A → B ditentukan dengan y = f (x) dan g : B → C ditentukan dengan y = g (x), maka Fungsi komposisi g dan f ditentukan dengan h (x) = (g o f) (x) = g (f (x))

Misal fungsi f : R → R dan g : R → R ditentukan dengan rumus f (x) = 4x – 1 dan g (x) = 3x.
Tentukan : a. (f o g) (x) b. (g o f) (x)
Jawab :

a. (f o g) (x) = f (g (x))
= f (3x)
= 4 (3x) – 1
= 12x – 1

b. (g o f) (x) = g (f (x))
= g (4x – 1)
= 3 (4x – 1)
= 12x – 3

Syarat fungsi komposisi (f o g) (x) sebagai berikut:

1. Irisan daerah hasil fungsi g dan f bukan himpunan kosong.

$$\mathbf{R_g \cap D_f \neq \phi}$$

2. Daerah asal fungsi (f o g) (x) merupakan himpunan bagian dari daerah asal fungsi g.

$$\mathbf{D_{(f\,o\,g)} \subseteq D_g}$$

3. Daerah hasil fungsi komposisi (f o g) (x) merupakan himpunan bagian dari daerah hasil fungsi f.

   $\mathbf{R_{(f\ o\ g)} \subseteq R_f}$

Contoh :

Terdapat fungsi f : R → R dan g : R → R yang ditentukan oleh persamaan berikut, dimana:

$f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$

Tentukan hasil dari :

a. (f o g) (x)
b. (g o f) (x)
c. Daerah asal (f o g) (x) dan daerah hasil (f o g) (x)
d. Daerah asal (g o f) (x) dan daerah hasil (g o f) (x)

Jawab :

Daerah asal $f(x) = 3x + 1$ adalah $D_f : \{x \mid x \in R\}$ dan daerah hasil $R_f : \{y \mid y \in R\}$. adapun daerah asal dari fungsi $g(x) = \sqrt{x}$ adalah $D_g : \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ dan daerah hasilnya adalah $R_g : \{y \mid y \geq 0, y \in R\}$. maka hasil dari:

a. $(f\ o\ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 1$
b. $(g\ o\ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = \sqrt{3x+1}$
c. Daerah asal (f o g) (x) = $D_{(f\ o\ g)} = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
   Daerah hasil (f o g) (x) = $R_{(f\ o\ g)} = \{y \mid y \geq 1, y \in R\}$
   Tampak bahwa $D_{(f\ o\ g)} = D_g$ dan $R_{(f\ o\ g)} \subset R_f$
d. Daerah asal (g o f) (x) = $D_{(g\ o\ f)} = \{x \mid x \geq -1/3, x \in R\}$
   Daerah hasil (g o f) (x) = $R_{(g\ o\ f)} = \{y \mid y \geq o, y \in R\}$
   Tampak bahwa $D_{(g\ of)} \subset D_f$ dan $R_{(g\ o\ f)} = R_g$

Menyelesaiakn fungsi komposisi dapat juga dalam bentuk dimana fungsi komposisi dan salah satu fungsi yang lain diketahu dan kita akan menentukan nilai fungsi yang lainnya. Misalkan diketahui fungsi Misal fungsi komposisi (f o g) (x) = -3x + 4 dan f (x) = x + 1. Tentukan fungsi g(x).

Jawab :

(f o g) (x) = -3x + 4
f (g (x)) = -3x + 4
(g (x)) + 1 = -3x + 4
g (x) = -3x + 4 - 1
g (x) = -3 x + 3

Jadi fungsi g (x) = -3x + 3

Contoh lain, terdapat fungsi komposisi (f o g) (x) = 2 + 3x dan fungsi g (x) = x + 2. Tentukan fungsi f (x).

Jawab :

(f o g) (x) = 2 + 3x
f (g (x)) = 2 + 3x
f (x + 2) = 2 + 3x
f (x + 2) = 2 + 3x
f(x) + 2 = 2 + 3x
f (x) = 2 + 3x - 2
f (x) = 3x

3. Fungsi Invers

Invers dari fungsi f yang dinyatakan dalam bentuk pasanagn berurutan f: A → B dengan f : {(a,b) | a ∈ A dan b ∈ B} adalah f^{-1} : B → A sehingga : f^{-1} : {(b,a) | b ∈ B dan a ∈ A}. Ketika invers suatu fungsi merupakan fungsi maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

Misalkan himpunan A: {a, b, c, d} dan himpunan B : {1, 3, 4}. Selanjutnya Fungsi f : A $\rightarrow$ B ditentukan oleh f : {(-2,1), (-1,1), (0,3), (1,4)}. Carilah invers fungsi f.

Jawaban : Invers fungsi f adalah f^{-1} = B $\rightarrow$ A ditentukan oleh : f^{-1} : {(1,-2), (1,-1), (3,0), (4,1)}.

Beberapa cara untuk menentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$ jika fungsi f (x) diketahui yaitu:

1. Rubah persamaan y = f(x) dalam bentuk f sebagai fungsi y.
2. Bentuk x sebagai fungsi y pada langkah 1 dan dinamakan dengan $f^{-1}(y)$.
3. Rubah y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk memperoleh bentuk fungsi invers $f^{-1}(x)$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah rumus fungsi invers fungsi f (x).

Misalkan Fungsi berikut adalah pemetaan dari R ke R. tentukan rumus inversnya

a. f (x) = 3x + 4
b. f (x) = 3x – 2

Jawab :

1. f (x) = 3x + 4

   y = f (x) = 2x + 2

   $x = \dfrac{y-2}{2}$

   $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{2}$

   $f^{-1(}x) = \dfrac{x-2}{2}$

2. f (x) = 3x – 6

$y = f(x) = 3x - 6$

$x = \dfrac{y+6}{3}$

$x = f\text{-}1(y) = \dfrac{y+6}{3}$

$f\text{-}1(x) = \dfrac{x+6}{3}$

B. Kesimpulan

1. Operasi aljabar fungsi ditetapkan sebagai berikut :
   a. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
      $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   b. Selisih fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
      $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
   c. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
      $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
   d. Pembagian fungsi f (x) dan g (x) ditulis:
      $$(x)\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
   e. Perpangkatan fungsi f (x) dengan bilangan n ditulis: $f^n(x) = \{f(x)\}^n$
2. Dari dua buah fungsi f(x) dan g(x) dapat dibentuk fungsi baru dengan menggunakan operasi komposisi.
   a. (f o g) (x) dibaca : f komposisi g(x) atau f(g(x))
   b. (g o f) (x) dibaca : g komposisi f(x) atau g(f(x)
3. Invers dari fungsi f yang dinyatakan dalam bentuk pasanagn berurutan f: A → B dengan f : $\{(a,b) \mid a \in A$ dan $b \in B\}$ adalah f-1 : B → A sehingga : f-1 : $\{(b,a) \mid b \in B$ dan $a \in A\}$.

C. Tugas

1. Fungsi f dan g ditentukan oleh rumus

   $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

   Tentukan :

   a. $(f + g)(x)$ dan $(f + g)(3)$
   b. $(f - g)(x)$ dan $(f - g)(2)$
   c. $(f \times g)(x)$ dan $(f \times g)(2)$
   d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ dan $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)$
   e. $f^2(x)$ dan $f^2(2)$

2. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan dengan rumus :

3. $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$

   a. Tentukan daerah asal fungsi f dan g
   b. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
   c. Tentukan daerah asal dan hasil fungsi $(f \circ g)(x)$
   d. Tentukan daerah asal dan hasil fungsi $(g \circ f)(x)$

4. Tentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$, fungsi berikut :

   a. $f(x) = 2x - 1$
   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
   c. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 3)$
   d. $f(x) = 2(x - 2)$

D. Penilaian

Soal dan Jawabannya:

1. Jika $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = x^2 - 2x - 3$, maka carilah jawabannya dan tentukan daerah asalnya !

   a). $(f + g)(x)$ b). $(f - g)(x)$

   c). $(fxg)(x)$ d). $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

   Jawaban

   a). $(f + g)(x) = (x + 4) + (x^2 - 2x - 3)$

   $x + 4 + x^2 - 2x - 3$

   $x^2 - x + 1$

   Daerahasalnya adalah x setiap elemen bilangan real

   b). $(f - g)(x) = (x + 4) - (x^2 - 2x - 3$

   $x + 4 - x^2 + 2x + 3$

   $-x^2 + 3x + 7$

   Daerahasalnya adalah x setiap elemen bilangan real

   c). $(fxg)(x) = (x + 4)x(x^2 - 2x - 3)$

   $= x^3 - 2x^2 - 3x + 4x^2 - 8x - 12$

   $= x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

   Daerah asalnya adalah {semmua bilanga nyata}

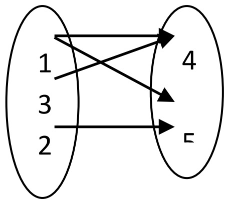
   d). $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 2x - 3}$

   $= \frac{x + 4}{(x - 3)(x + 1)}$

   Pernyataan tidak terdefinisi jika $x = 3$ atau $x = -1$.

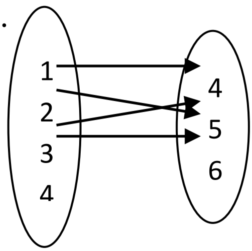
   Jadi, daerah asalnya adalah {semua bilangan nyata kecuali 3 atau -1)/Df=$\{\Re\} - (3 \cap -1)$ }

2. Carilah daerah asal dan daerah hasil dari:
   a. {(4,1), (3,2), (-1,6)}
   b.



   c. $y = 2x + 4$

   Penyelesaian:
   a. Daerah asalnya adalah {-1, 3, 4}
      Dearah hasilnya adalah {1, 2, 6}
   b. Daerah asalnya adalah {1, 2, 3}
      Dearah hasilnya adalah {4, 5}
   c. Daerah asalnya adalah {semua bilangan nyata}
      Dearah hasilnya adalah {semua bilangan nyata}
3. Dari contoh berikut mana yang merupakan fungsi
   a. {(4,1), (3,2), (2,5)}
   b.



   Penyelesaian:
   a. Contoh ini merupakan sebuah fungsi karena tidak mengulang bilangan yang ada pada daerah asal.
   b. Himpunan yang mewakili pasangan berurutan {(1,4), (2,5), (3,5), (4,6)}adalah contoh yang mengulang bilangan yang ada pada daerah asal.

4. Berapakah $f(2)$, jika $f(x) = 3x + 2$ dan
$f(x) = x^2 + 2x + 4$

Penyelesaian:

Jika, $f(x) = 3x + 2$, maka $f(x) = 3x + 2$

$f(2) = 3.2 + 2$

$= 6 + 2$

$= 8$

Jika $f(x) = x^2 + 2x + 4$, maka $f(x) = x^2 + 2x + 4$

$f(2) = 2^2 + 2.2 + 4$

$= 4 + 4 + 4$

$= 12$

5. jika $f(x) = 5x + 4$ dan $g(x) = 6x - 4$, carilah:

a. $f\left[g(x)\right]$ c. $g \circ f(x)$

b. $f\left[g(3)\right]$ d. $g \circ f(4)$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 5x + 4$

$f\left[g(x)\right] = 5\left(g(x)\right) + 4$

$= 5\left(6x - 4\right) + 4$

$= 30x - 20 + 4$

$= 30x - 16$

b. Diketahui $f(x) = 5x + 4$ dimana:

$g(x) = 6x - 4$

$g(3) = 6.3 - 4$

$= 18 - 4$

$= 14$

Dengan demikain

$f\left[g(3)\right] = 5\left(g(3)\right) + 4$

$= 5\left(14\right) + 4$

$= 70 + 2$

$= 72$

c. $g(x) = 6x - 4$

$g \circ f(x) = 6\left(f(x)\right) - 4$

$= 6\left(5x + 4\right) - 4$

$= 30x + 24 - 4$

$= 30x + 20$

$= 3x + 2$

d. Diketahui fungsi $g(x) = 6x - 4$, dimana fungsi:

$f(x) = 5x + 4$

$f(4) = 5.4 + 4$

$= 20 + 4$

$= 24$

Dengan demikian

$g \circ f(4) = 6\left(f(4)\right) - 4$

$= 6\left(24\right) - 4$

$= 144 - 4$

$= 140$

6. Jika $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = x^2 - 4x - 5$, carilah:

   a. $\left(f + g\right)(x)$

   b. $\left(fxg\right)(x)$

   c. $\left(f - g\right)(x)$

   Penyelesaian:

a. $(f+g)(x) = (x+5)+(x^2-4x-5)$

$= x+5+x^2-4x-5$

$= x^2+x-4x+5-5$

$= x^2-3x$

b. $(fxg)(x) = (x+5)(x^2-4x-5)$

$= x^3-4x^2-5x+5x^2-20x-25$

$= x^3-4x^2+5x^2-5x-20x-25$

$= x^3+x^2-25x-25$

c. $(f-g)(x) = (x+5)-(x^2-4x-5)$

$= x+5-x^2+4x+5$

$= -x^2+x+4x+5+5$

$= -x^2+5x+10$

7. Jika $f \circ g(x) = 18x^2+12x+2$ dan $f(x) = 2x^2$, tentukan:

a. $g(x)$

b. $g(4)$

Penyelesaian:

a. $f \circ g(x) = 18x^2+12x+2$

$2(g(x)^2) = 18x^2+12x+2$

$2(g(x)^2) = 2(3x+1)^2$

$$g(x)^2 = \frac{2(3x+1)^2}{2}$$

$g(x)^2 = (3x+1)^2$

$g(x) = (3x+1)$

b. $g(x) = 3x+1$

$g(4) = 3.4+1$

= 12 + 1

= 13

8. Diketahui $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{4}$, carilah

a. $f^{-1}(x)$

b. $f^{-1}(2)$

Penyelesaian :

a. $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{4}$

$y = \frac{2x^2 + 3}{4}$

$4y = 2x^2 + 3$

$-2x^2 = -4y + 3$

$2x^2 = 4y - 3$

$x^2 = \frac{4y - 3}{2}$

$x = \sqrt{\frac{4y - 3}{2}}$

$f^{-1} = \sqrt{\frac{4x - 3}{2}}$

b. $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4x - 3}{2}}$

$f^{-1}(2) = \sqrt{\frac{4.2 - 3}{2}}$

$= \sqrt{\frac{8 - 3}{2}}$

$= \sqrt{\frac{5}{2}}$

9. Suatu fungsi dari $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ dengan fungsi masing-masing $f(x) = 6x - 3$ dan $g(x) = 5x + 4$, jika $f \circ g(a) = 81$ maka nila a adalah…

Penyelesaian:

Diketahui fungsi komposisi $f \circ g(a) = 81$, dimana: $g(x) = 5x + 4$, jika dimisalkan $g(a) = 5a + 4$

Dengan demikian:

$$f(5a+4)=81$$
$$6(5a+4)-3=81$$
$$30a+24-3=81$$
$$30a+21=81$$
$$30a=81-21$$
$$30a=60$$
$$a=\frac{60}{30}$$
$$a=2$$

10. Jika $f(x)=x+4$ dan $g(x)=x^2+5x+4$, tentukan hasil dan daerah asalnya !

a) $(f+g)(x)$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Penelesaian:

a) $(f+g)(x)= f(x)+g(x)$

$$= (x+4)+(x^2+5x+4)$$
$$= x+4+x^2+5x+4$$
$$= x^2+5x+x+4+4)$$
$$= x^2+6x+8$$

Daerah asalnya adalah {semua bilangan nyata}

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$$=\frac{x+4}{x^2+5x+4}$$

$$= \frac{x+4}{(x+4)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

Pernyataan ini tidak terdefinisi jika $x = -1$, sehingg daerah asalnya adalah {semua bilangan nyata keciali -1} atau $\{x \text{I} x \in R; x \notin -1\}$

11. Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{x-1}{x}, x \neq 0$ dan $g(x) = x + 3,$ maka $\left(g \circ f(x)\right)^{-1}$ adalah . . . .

Penyelesaian:

$$\left(g \circ f(x)\right) = g\left[f(x)\right]$$

$$= \left(\frac{x-1}{x}\right) + 3$$

$$= \frac{x-1+3x}{x}$$

$$= \frac{4x-1}{x}$$

$$\left(g \circ f(x)\right)^{-1} = \frac{4x-1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad xy = 4x - 1$$

$$xy - 4x = -1$$

$$x\left(y-4\right) = -1$$

$$x = \frac{-1}{y-4}$$

$$\left(g \circ f(x)\right)^{-1} = \frac{-1}{x-4} \bullet \frac{-1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4-x}, x \neq 1$$

MATERI 4
Fungsi Eksponen Dan Logaritma

A. Uraian Materi

1. Eksponen

Apabila a adalah bilangan real dan n merupakan bilangan bulat positif maka bentuk a^n (a pangkat n) menyatakan perkalian n factor yang setiap faktornya adalah a . secara umum dapat ditulis :

$$a^n = \underbrace{ax\ ax\ a\ x\ \ldots\ xa}_{\text{Sebanyak n faktor}}$$

Dengan,
a^n disebut bilangan berpangkat dengan pangkat bulat positif
a^n dibaca a pangkat n
a disebut bilangan pokok atau basis
n disebut pangkat atau Eksponen

Berdasarkan penjelasan di atas maka berlaku rumus-rumus berikut ini : Misalnya a, b € R dan m,n adalah bilangan bulat positif maka

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m+n}$, m > n
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Jika terdapat $(4a^3)^2 : 2a$ $= 16^{a6} : 2a^2$
$= 8a^{6-2}$
$= 8a^4$

Atau contoh berikutnya. Jika n bilangan bulat maka hasil dari $\frac{2^{n+2}6^{n-4}}{12^{n-1}}$ =......

Penyelesaiannya adalah:

$$\frac{2^{n+2}6^{n-4}}{12^{n-1}} = \frac{2^{n+2}6^{n-4}}{(2.6)^{n-1}} = \frac{2^{n+2}6^{n-4}}{2^{n-1}6^{n-1}} = \frac{8.62^{n}6^{n}}{6^{4}2^{n}6^{n}} = 2^{3}.6^{-3} = \frac{1}{27}$$

Pangkat Nol Dan Bulat Negatif

Perhatikan kembali rumus $a^m : a^n = a^{m+n}$ pada pembahasan sebelumnya. Jika diambil m= n maka diperoleh:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$\Leftrightarrow a^n : a^n = a^{n-n}$$
$$\Leftrightarrow 1 = a^o$$

Jika, $a^o = 1$, $a \neq 0$

Jika diambil m = 0 maka diperoleh :

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$\Leftrightarrow a^0 : a^n = a^{0-n}$$
$$\Leftrightarrow 1 = a^{-n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Jadi, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *atau* $a^n = \frac{1}{a^{-n}}, a \neq 0$

Untuk a = 0, maka a^0 tidak didefinisikan

Perlu diperhatikan bahwa semua rumus-rumus yang berlaku pada pangkat bulat positif juga berlaku pada pangkat nol dan blat negatif.

Tentukanlah hasil dari $\dfrac{\left(3p^{-2}q^{3}\right)^{-2}}{\left(3^{2}p^{-1}q^{2}\right)^{-3}} = \ldots$

Bentuk bilangan berpangkat di atas dapat diselsaikan dengan cara berikut:

$$\frac{\left(3p^{-2}q^{3}\right)^{-2}}{\left(3^{2}p^{-1}q^{2}\right)^{-3}} = \frac{3^{-2}p^{4}q^{-6}}{3^{-6}p^{3}q^{-6}}$$

$$= 3^{4}pq^{0}$$

$$= 81p$$

Pangkat Rasional

Pangkat rasional secara umum dapat ditulis:

$$a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m \quad \Rightarrow \text{ sifat bilangan pangkat bulat}$$

Jadi $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, dengan a $\in$R, m dan n bilangan bulat positif

Rumus-rumus yang berlaku pada pangkat bulat positif, bulat negatif, dan nol berlaku juga pada pangkat rasional.

Berdasarkan rumus-rumus tersebut, maka bentuk $a^{\frac{m}{n}}$ dapat diartikan sebagai berikut: $\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Atau: $a^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Contoh Soal

bentuk $\left[\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{-3}}{a^{-1}\,b^{-\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{2}{3}}$ dapat disederhanakan menjadi . . .

$$\left[\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{-3}}{a^{-1}\,b^{-\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{2}}.a^{1}.b^{-3}.b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}+1}..b^{-3+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= a^{\frac{3}{2}.\frac{2}{3}}.b^{-\frac{3}{2}.\frac{2}{3}}$$

= a1.b-1

$$= \frac{a}{b}$$

2. Logaritma

Logaritma merupakan materi dari perpangkatan atau Eksponen, sehingga antara Eksponen dan logaritma mempunyai hubungan seperti berikut ini:

$$a^{x} = b \Leftrightarrow x = {}^{a}\log b,\ b > 0,\ a > 0,\ \text{dan } a \neq 1$$

Dimana: a = bilangan pokok
b = numerus
x = hasil logaritma

Bentuk x = $^{a}\log b$ dibaca : x adalah logaritma dari b dengan bilangan pokok a. logaritma dengan bilangan pokok 10 cukup log saja, contoh $^{10}\log 8$ cukup ditulis log 8. Rumus untuk menyederhanakan bentuk logaritma.

1. log a . b = log a + log b
2. log $\frac{a}{b}$ = log a – log b = - $\frac{b}{a}$
3. $^{a}\log b$. blog c = alog c
4. log $_{an}$ $\Leftrightarrow$ n log a
5. $^{an}\log b$ = alog b $^{\frac{1}{n}}$ = $\frac{1}{n}$ alog b
6. $^{an}\log bk$ = $\frac{k}{n}$ alog b
7. $^{aa}\log b$ = b
8. $^{a}\log b$= $\frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{^{b}\log a}$
9. $^{a}\log 1 = 0$ sebab $a^{0} = 1$
10. $^{a}\log a = 1$ sebab $a^{1}= a$

Misal, Jika log $\frac{a^2}{b^2}$ 12, maka log $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ =

Pembahasan:

Log $\frac{a^2}{b^2}$ = 12

$\log\left(\frac{a}{b}\right)^2$ = 12

$$2\log\frac{a}{b} = 12$$

$$\log\frac{a}{b} = 6$$

Contoh berikutnya, tentukanlah nilai dari:

$$\text{Log } \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \log\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{b}{a}$$

$$= \frac{1}{3}\ (\text{logb} - \log \text{a})$$

$$= -\ \frac{1}{3}(\log a - \log b)$$

$$= -\ \frac{1}{3}\log\frac{a}{b}$$

$$= -\ \frac{1}{3}.(6)$$

$$= -\ 2$$

3. Fungsi Eksponen

Fungsi Eksponen adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan real (riil) x menjadi a^x. bentuk umum dari fungsi Eksponen dapat ditulis sebagai berikut:

$F(x)=a^x$, dengan $a>0$, $a \neq 1$, dan x € R

Bilangan a disebut bilangan pokok atau basis, Karena $a>0$, maka nilai fungsi $f(x)= a^x$ selalu positif atau selalu berada diatas sumbu X.

Grafik Fungsi Eksponen dengan Basis a>1, Fungsi Eksponen $y = f(x) = a^x$ dengan a>1 merupakan fungsi monoton naik sebab untuk $x_2>x_1$ maka $x^{2x}>a^{x1}$.

Contoh

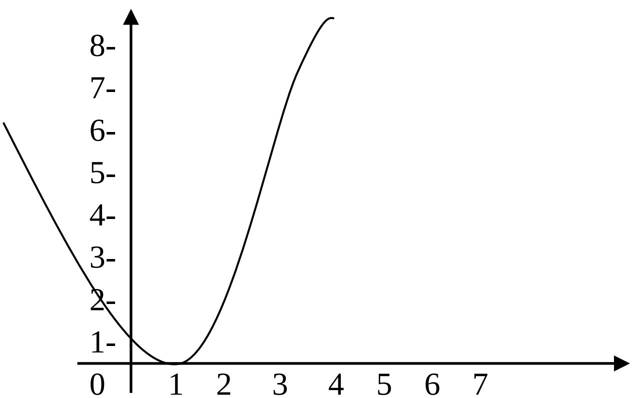
Gambarlah grafik dari dari $y = 2^x$.

Pembahasan:

Buatlah tabel yang menunjukkan hubungan antara x dan $y=f(x)=2^x$.plhlah nilai x sehingga nilai y mudah ditentukan.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
2^x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

Tiap titik (x.y) yang diperoleh dari tabel di atas digambar pada bidang cartesius. Selanjutnya. Tiap titik (x,y)tadi dihubungkan, maka akan terbentuk kurva mulus yang merupakan grafik fungsi Eksponen $y=f(x)=2^x$.



4. Grafik Fungsi Eksponen dengan Basis $0< a <1$

Fungsi Eksponen $y = f(x) = a^x$ dengan $0< a <1$ merupakan fungsi turun, sebab untuk $x_2 > x_1$ maka $a^{x2} < a^{x1}$.

5. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah fungsi invers dari fungsi eksponen.

Jika $x>0$, $a>0$, dan $a \neq 1$ maka:

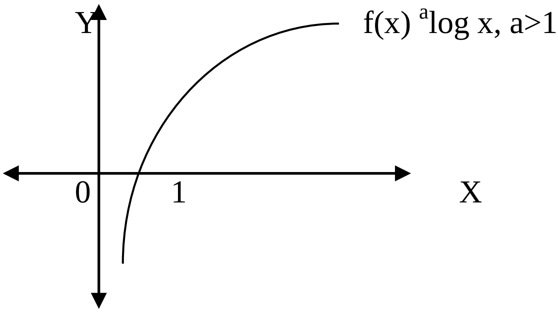
$$Y = {}^a\log x \Leftrightarrow x = a^y$$

Fungsi logaritma dengan bilangan pokok a dapat ditulis dalam bentuk

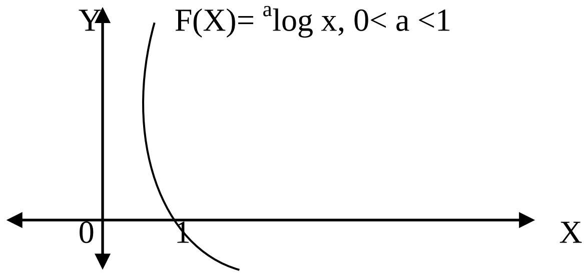
$$f : x \rightarrow {}^a\log x \text{ atau } y = f(x) = {}^a\log x$$

a. Grafik Fungsi Logaritma dengan Bilangan Pokok $a>1$. Fungsi logaritma $y=f(x)={}^a\log x$ dengan $a>1$ merupakan fungsi monoton naik, sebab untuk $x_2>x_1$ maka ${}^a\log x_2 > {}^a\log x_1$.

Bentuk umum dari grafik fungsi f(x)



b. Grafik Fungsi Logaritma dengan bilangan pokok 0< a <1, Fungsi logaritma $y=f(x) = {}^{a}\log x$ dengan 0< a <1merupakan fungsi monoton turun, sebab untuk $x_2 > x_1$ maka ${}^{a}\log x_2 > {}^{a}\log x_{1.}$ Bentuk umum dari grafik fungsi f(x).



B. Kesimpulan

1. Secara umum dapat ditulis :

$$a^n = \underbrace{a x\, a x\, a\ x\ \ldots x a}_{\text{Sebanyak n faktor}}$$

2. Jika a, b € R dan m,n adalah bilangan bulat positif maka:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m+n}$, m > n

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

3. Hubungan Eksponen dan logaritma:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = {}^{a}\log b,\ b > 0,\ a > 0, \text{ dan } a \neq 1$$

4. Fungsi Eksponen adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan real (riil) x menjadi a^x.

$F(x)=a^x$, dengan $a>0$, $a \neq 1$, dan $x \in R$

5. Fungsi logaritma dengan bilangan pokok a dapat ditulis dalam bentuk

$$\boxed{f : x \rightarrow {}^{a}\log x \text{ atau } y = f(x) = {}^{a}\log x}$$

C. Tugas

1. Sederhanakan $\left[\dfrac{x^{\frac{2}{3}}.y}{y^{\frac{2}{3}}.x^2}\right]^{\frac{-4}{3}} = ...$

2. Jika ${}^{a}\log(3x-1).{}^{5}\log a=3$ maka x =....
3. Nilai x yang memenuhi persamaan berikut adalah :

$$5^2 \text{ x } . \left[\left(\frac{1}{25}\right)^{2x+6}\right]^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{25}$$

d. Jika $3^{x+2} + 9^{x+1} = 81$ maka $3^{x-3} = ...$

D. Penilaian

1. Tentukanlah nilai dari $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3 x \left(\dfrac{y^6}{x^3}\right)^6 = \ldots\ldots$

Pembahasan:

$$\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3 x \left(\frac{y^6}{x^3}\right)^6 = \left(\frac{x^6}{y^9}\right) x \left(\frac{y^{12}}{x^6}\right)$$

$$= \left(\frac{x^6}{y^9}\right) x \left(\frac{y^{12}}{x^6}\right)$$

$= 1 \text{ x } y^{12-9}$

$= y^3$

2. Dalam bentuk pangkat positif, $\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1}$ = ……

Pembahasan

Diketahui $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a}{b}$, maka:

$$\left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1} = \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)$$

$$= \left(\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)\frac{xy}{xy}$$

$$= \frac{y-x}{y+x}$$

3. Tentukanlah nilai dari : $\sqrt[3]{0{,}125} + \frac{1}{\sqrt[5]{32}} + (0{,}5)^2$

Jawaban:

$$= \sqrt[3]{(0{,}5)^5} + \frac{1}{\sqrt[5]{(2)^5}} + (0{,}5)^2$$

$$= (0,5)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(2)^{\frac{5}{5}}} + (0,5)^2$$

$$= 0,5 + \frac{1}{2} + 0,25$$

$$= 1,25$$

4. Jika $\left(\frac{3}{3^{x-2}}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, maka x = ……

$$= (3^{1-x+2})^2 = \sqrt[3]{3^{-2}}$$

$$= 3^{6-2x} = 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 6 - 2x = -\frac{2}{3}$$

$$= -2x = -\frac{20}{3}$$

$$= x = -\frac{10}{3}$$

$$= x = 3\frac{1}{3}$$

5. Nilai x yang memenuhi persamaan $5^{x+y} = 49$ dan x – y = 6 adalah ……

Jawaban:

x – y = 6 maka y = x – 6

$5^{x+y} = 49$

$\Leftrightarrow 5^{x+x-6} = 49$

$\Leftrightarrow \quad 5^{2x-6} = 49$

$\Leftrightarrow \quad 5^{2x-6} = 5^{5\log 49}$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 6 = {}^5\log 49$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 6 + {}^5\log 7^2$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 6 + 2\,{}^5\log 7$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 + {}^5\log 7$

6. Harga dari ${}^a\log b$. ${}^b\log c$. ${}^c\log d$. adalah ….

Jawaban:

${}^a\log b$. ${}^b\log c$. ${}^c\log d$. = (${}^a\log b$. ${}^b\log c$) ${}^c\log d$.

= ${}^a\log b$. ${}^b\log c$

= ${}^a\log d$

7. Jika f (x) = $\dfrac{{}^3\log x}{1-2\,{}^3\log x}$, maka f(x) + f($\dfrac{3}{x}$) = ……

Jawaban:

f (x) = $\dfrac{{}^3\log x}{1-2\,{}^3\log x}$

$$f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{{}^3\log\left(\frac{3}{x}\right)}{1-2\,{}^3\log\left(\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{{}^3\log 3 - {}^3\log x}{1-2\left({}^3\log 3 - {}^3\log x\right)}$$

$$= \frac{1 - {}^3\log x}{1-2+2\,{}^3\log x}$$

$$= \frac{1 - {}^3\log x}{-1+2\,{}^3\log x}$$

$$= \frac{-1 + {}^{3}\log x}{1 - 2\,{}^{3}\log x}$$

$$f(x) + f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{{}^{3}\log x}{1 - 2^{3}\log x} + \frac{-1 + {}^{3}\log x}{1 - 2^{3}\log x}$$

$$= \frac{-1 + 2^{3}\log x}{1 - 2^{3}\log x}$$

$$= \frac{-\left(1 - 2\,{}^{3}\log x\right)}{1 - 2^{3}\log x}$$

$$= -1$$

8. log x = $\frac{1}{3}$ log 8 + log 9 – $\frac{1}{3}$ log 27 dipenuhi untuk x sama dengan ……

Jawaban:

log x = $\frac{1}{3}$ log 8 + log 9 – $\frac{1}{3}$ log 27

log x = log $8^{\frac{1}{3}}$ + log 9 $-\frac{1}{3}$ 27

log x= log 2 + log 9 – log 3

log x = log $\frac{2.9}{3}$

x = $\frac{2.9}{3}$

x = $\frac{18}{3}$

x = 6

Rujukan

Putra, 2004, *Matematika SMA Kelas 1 Jilid 1B,* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic*. New York: Macmillan.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Vance, E. P. (1989). *Modern College Algebra.* London : Addison Wesley.

BAB IV
Persamaan

PENDAHULUAN

Pernyataan matematika dinyatakan dalam bentuk matematis. Bentuk matematika ada yang bersifat aritmatik dan juga bentuk aljabar. Bentuk aljabar merupakan bentuk matematika yang terdiri dari angka dan huruf (variabel). Dalam bentuk tersebut mengandung beberapa hubungan. Salah satunya adalah aljabar dalam hubungan persmaan, yaitu pernyataan matematika yang mengandung hubungan sama dengan. Pembahasan tentang persamaan diharapkan dapat memberikan pemahaman bagi mahasiswa dalam memahami:

1. pengertian persamaan
2. jenis persmaan
3. persamaan linier satu dan dua variabel
4. cara menyelesaikan persmaan linier
5. persamaan kuadrat
6. cara penyelesaian persamaan kuadrat
7. persamaan eksponen dan logaritma

MATERI 1
Persamaan

A. Uraian Materi

Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan (“=”)

Contoh :1. $x^2 + 3x - 18 = 0 \rightarrow$ (Persamaan kuadrat)

2. $y = 3x + 1 \rightarrow$ (Persamaan inear/garis)

1. Jenis - jenis persamaan

a. Persamaan Linear:

Yaitu kalimat terbuka yang variabelnya berderajat satu dengan tanda penghubung (“=”). Seperti persamaan berikut:

1. $2x - 4 = 0 \rightarrow$ Persamaan linear satu variabel
2. $3x + 2y + 12 = 0 \rightarrow$ Persamaan linear dua variabel

1) Persamaan Linear Satu Variabel

Bentuk umum dari persamaan linear satu variabel adalah :

$$\boxed{\mathbf{ax + b = 0}}$$

a koefisien *x*, *b* konstanta dan *x* variabel, dimana a,b $\in$ **R** dan $a \neq 0$. Sifat yang berlaku pada persamaan linear satu variabel :

A. Nilai persamaan tidak berubah apabila kedua ruas ditambah atau dikurangi dan dikali atau dibagi dengan bilangan yang sama

B. Jika unsur dari persamaan dipindahkan ruasnya maka akan berlaku, penjumlahan berubah menjadi pengurangan dan perkalian berubah menjadi pembagian.

Contoh : Tentukan penyelesaian dari persamaan–persamaan berikut :

1. $2x + 4 = 8$

$\Leftrightarrow 2x + 4 - 4 = 8 - 4$ (kedua ruas dikurangi 4)

$\Leftrightarrow 2x = 4$

$\Leftrightarrow 2x : 2 = 4 : 2$ (kedua ruas dibagi 2)

$\Leftrightarrow x = 2$

2. $5x - 6 = 3x + 2$

$\Leftrightarrow 5x - 3x = 2 + 6$ (3x dipindah ruas kiri dan -6 dipindah ruas kanan)

$\Leftrightarrow 2x = 8$

$\Leftrightarrow x = 8 : 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

3. $\frac{3x+1}{2} = \frac{3x-4}{3}$

$\Leftrightarrow 3(3x+1) = 2(3x - 4)$

$\Leftrightarrow 9x + 3 = 6x - 8$

$\Leftrightarrow 9x - 6x = -8 - 3$

$\Leftrightarrow 3x = -11$

$\Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}$

2) Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum dari persamaan linear dua variabel adalah :

$$\boxed{\mathbf{ax + by + c = 0}}$$

a koefisien *x*, *b* koefisien *y*, *c* konstanta dan *x,y* variabel dimana *a,b,c* **€** R dan a ≠ 0, b≠0. Diketahui sistem persamaan linear sebagai berikut :

4x – 5y = 6 dan 2x + 3y = 14 , maka sistem persamaan linear dengan dua variabel tersebut dapat diselesaikan dengan beberapa cara yaitu :

a. Cara eleminasi

Yaitu menghilangkan salah satu variabel dari kedua persamaan, yaitu mengalikan salah satu atau kedua persamaan dengan bilangan bukan nol sehingga salah satu koefisien variabelnya sama, kemudian dijumlahkan atau dikurangkan kedua persamaan tersebut, sehingga :

$$\begin{array}{ll|c|l}
4x - 5y = 6 & & x3 & 12x - 15y = 18 \\
2x + 3y = 14 & & x5 & 10x + 15y = 70 \quad + \\
\hline
 & & & 22x \qquad = 88 \\
 & & & \qquad x = 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|c|l}
4x - 5y = 6 & & x1 & 4x - 5y = 6 \\
2x + 3y = 14 & & x2 & 4x + 6y = 28 \quad - \\
\hline
 & & & -11y = -22 \\
 & & & \qquad y = 2
\end{array}$$

jadi nilai x = 4 dan y = 2

b. Cara Substitusi

Yaitu dengan mengubah suatu persamaan menjadi persamaan lain yang ekuivalen, kemudian masukkan persamaan tersebut ke persamaan lainnya. Contoh penyelesaian masalah persamaan linier dua variable dengan menggunakan subtitusi sebagai berikut:

$$4x - 5y = 6 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x + 3y = 14 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dari persamaan (1)

$$\Leftrightarrow \quad 4x = 6 + 5y$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6+5y}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

masukkan persamaan (3) ke persamaan (2), sehingga :

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{6+5y}{4}\right) + 3y = 14$ ruas kiri dan kanan dikali 4

$$\Leftrightarrow \quad 2(6 + 5y) + 12y = 56$$
$$\Leftrightarrow \quad 12 + 10y + 12y = 56$$
$$\Leftrightarrow \quad 12 + 22y = 56$$
$$\Leftrightarrow \quad 22y = 44$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 2 \ldots\ldots(4)$$

masukkan persamaan (4) ke persamaan (3), sehingga :

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6+5(2)}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6+10}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 4$$

jadi nilai x = 4 dan y = 2

c. Cara Gabungan Eleminasi Substitusi

Yaitu menggabungkan langkah eleminasi kemudian substitusi atau sebaliknya, sehingga :

$$4x - 5y = 6 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2x + 3y = 14 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Gunakan Eleminasi dahulu :

$$\begin{array}{ll|c|rcl} 4x - 5y = 6 & & \times 1 & 4x - 5y & = & 6 \\ 2x + 3y = 14 & & \times 2 & 4x + 6y & = & 28 \\ \hline & & & -11y & = & -22 \\ & & & y & = & 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{array}$$

Masukkan persamaan (3) ke persamaan (1) sehingga :

$$\begin{aligned} 4x - 5(2) &= 6 \\ \Leftrightarrow\ 4x - 10 &= 6 \\ \Leftrightarrow\ 4x &= 16 \\ \Leftrightarrow\ x &= 4 \end{aligned}$$

jadi nilai x = 4 dan y = 2

d. Cara Determinan

Pengertian determinan, jika $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ adalah matriks berordo 2 x 2, maka determinan matriks A dituliskan det. A atau $|A|$, sehingga determinan matriks A adalah :

$$\boxed{|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel akan mempunyai penyelesaian apabila determinannya tidak sama dengan nol. Jika menggunakan cara determinan, maka sistem persamaannya diubah dalam bentuk :

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y &= p \\ c\,x + d\,y &= q \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan nilai x dan y dari system persamaan linear dua variabel terlebih dahulu menentukan determinan matriks koefisien sebagai berikut :

$D_A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, merupakan matriks koefisien

$D_X = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$, merupakan matriks D_A dengan koefisien x diganti dengan p dan q

$D_Y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$, merupakan matriks D_A dengan koefisien y diganti dengan p dan q

Setelah determinan - determinannya diketahui, maka nilai variabel x dan y dapat ditentukan dengan rumus :

$$X = \frac{D_x}{D_A} \quad \text{dan} \quad Y = \frac{D_Y}{D_A}$$

Maka untuk sistem persamaan $\quad 4x - 5y = 6$

$\qquad 2x + 3y = 14$

diubah dulu bentuknya menjadi : $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$

sehingga :

$$D_A = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 10 = 22$$

$$D_X = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 70 = 88$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 56 - 12 = 44$$

Jadi $x = \dfrac{Dx}{D_A} = \dfrac{88}{22} = 4$ dan $y = \dfrac{Dy}{D_A} = \dfrac{44}{22} = 2$

B. Kesimpulan

1. Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan ("=")
2. Jenis persamaan linier tergantung pada banyak variabelnya
3. Persamaa linier satu variabel di tulis dalam bentuk:

$$ax + b = 0$$

4. Persamaan linier dua variabel di tulis dalam bentuk:

$$ax + by + c = 0$$

5. Penyelesaian persamaan linier dilakukan dengan tiga cara, yaitu determinasi, subtitusi, eliminasi dan subtitusi, dan determinasi.

C. Tugas

1. Tentukan nilai x yang memenuhi dari persamaan berikut :
   a. $3(x - 5) = 21$
   b. $2(3x + 3) - x - 15 = 0$
   c. $\frac{3}{2}x + 5 = 3(3 - 2x)$
   d. $\frac{4x - 5}{3} = \frac{2x + 1}{2}$
   e. $\frac{x + 3}{4} = 3(\frac{5}{2}x - 2)$
2. Untuk soal nomor a s/d d tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan 4 cara:
   a. $2x - 3y = -1$
      $x + y = -3$
   b. $2x + 3y = 2$
      $3x - 5y = 22$
   c. $3x - 4y = 5$
      $2x + 5y = 11$
   d. $\frac{3}{x} - \frac{6}{y} = -5$
      $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -1$
3. Dua buah bilangan jumlahnya 39. Dua kali bilangan pertama sama dengan bilangan kedua ditambah 6. Hitunglah besar masing – masing bilangan itu.

4. Keliling sebuah segitiga ABC adalah 80 cm, jumlah sisi a dan sisi b sama dengan tiga kali sisi c. Lima kali sisi c sama dengan empat kali sisi a. Hitunglah panjang masing – masing segitiga tersebut.

D. Penilaian

Soal:

Jawaban

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan : $3x - 6 = 12$.

   Untuk menyelesaiakan persamaan di atas dapat dilakukan dengan memindah -6 ke ruas sebelah kanan atau kedua ruas di jumlahkan dengan 6 seperti berikut ini:

   $3x - 6 + 6 = 12 + 6$
   $3x = 18$
   $x = 18/3$
   $x = 6$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel berikut

   $2x + y = 7$
   $3x - 2y = 21$

   <u>**Jawab**</u>

   $2x + y = 7 \quad |\times 2|\ 4x + 2y = 14$
   $3x - 2y = 21\ |\times 1|\ 3x - 2y = 21$
   ------------------ +
   $7x = 35$
   $x = 5$

   $2x + y = 7$
   $2(5) + y = 7$
   $10 + y = 7$

$y \qquad\qquad = 7 - 10$

$y \qquad\qquad = -3$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{(5, -3)\}$

3. Diketahui sistem persamaan linear dua variabel berikut ini:

   $x - 6y = 4$

   $3x + 2y = -8$

   Nilai dari $x + y$ adalah ….

   Jawab

   $x - 6y = 4 \quad |\times 3|\ 3x - 18y = 12$

   $3x + 2y = -8\ |\times 1|\ 3x + 2y = -8$

   $\qquad\qquad\qquad$ ----------------- –

   $\qquad\qquad\qquad -20y = 20$

   $\qquad\qquad\qquad\quad y = -1$

   $x - 6y \qquad = 4$

   $x - 6(-1) \qquad = 4$

   $x + 6 \qquad = 4$

   $x \qquad = 4 - 6$

   $x \qquad = -2$

   Jadi **nilai dari x + y** adalah

   $= x + y$

   $= -2 + (-1)$

   $= -3$

4. Harga 2 bolpoint dan 3 penggaris adalah Rp. 8.500 sedangkan harga 5 penggaris dan sebuah bolpoint adalah Rp. 9.500. Berapa harga satu buah bolpoin dan penggaris?

   Jawab

   Dimisalkan:

   x = harga 1 bolpoint

y = harga 1 Penggaris

maka persamaan linear dua variabelnya yang dapat kita bentuk adalah: $2x + 3y = 8.500$ dan $5y + x = 9.500$. dengan menggunakan metode eliminasi pesamaan tersebut dapat diselsaikan dengan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lll}
2x + 3y = 8.500 & |\times 1| & 2x + 3y = 8.500 \\
x + 5y = 9.500 & |\times 2| & 2x + 10y = 19.000 \\
\hline
 & & -7y = -10.500 \quad - \\
 & & y = 1.500
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x + 5y &= 9.500 \\
x + 5(1.500) &= 9.500 \\
x + 7.500 &= 9.500 \\
x &= 9.500 - 7.500 \\
x &= 2.000
\end{aligned}
$$

Jadi

Harga 1 Bolpoint (x) = Rp. 2.000

Harga 1 Penggaris (y) = Rp. 1.500

5. Lima tahun yang lalu umur Kurniawan 8 kali umur Ahmad, sedangkan 15 tahun yang akan datang umur Kurniawan 2 kali umur Ahmad. Berapakah umur Ahmad saat ini?

   Permasalah di atas dapat diselsaikan jika dimisalkan:

   x = umur Ahmad

   y = umur Kurniawan

   Lima tahun lalu umur Kurniawan 8 kali umur Ahmad

$$
\begin{aligned}
(y - 5) &= 8(x - 5) \\
y - 5 &= 8x - 40 \\
y &= 8x - 40 + 5
\end{aligned}
$$

$y \quad = 8x - 35$

15 tahun kemudian umur Kurniawan 2 kali umur Ahmad, persamaan yang dibentuk yaitu:

$(y + 15) = 2(x + 15)$, diketahui nilai y pada persamaan 1 adalah $8x - 35$, dengan melakukan subtitusi nilai y, didapatkan persamaan baru yaitu:

$$
\begin{aligned}
((8x - 35) + 15) &= 2x + 30 \\
8x - 20 &= 2x + 30 \\
8x - 2x &= 40 + 20 \\
6x &= 60 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

Jadi umur Ahmad sekarang adalah 10 tahun

6. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan di bawah ini dengan menggunakan metode subtitusi:

   $x - 2y + z = 6$

   $3x + y - 2z = 4$

   $7x - 6y - z = 10$

   Jawab:

   Persamaan pertama terlebih dahulu variabel x di nyatakan sebagai fungsi y dan z seperti berikut ini:

   $\Rightarrow x - 2y + z = 6$

   $\Rightarrow x = 2y - z + 6$

   Subtitusikan variabel x ke dalam persamaan kedua

   $\Rightarrow 3x + y - 2z = 4$

   $\Rightarrow 3(2y - z + 6) + y - 2z = 4$

   $\Rightarrow 6y - 3z + 18 + y - 2z = 4$

   $\Rightarrow 7y - 5z + 18 = 4$

   $\Rightarrow 7y - 5z = 4 - 18$

   $\Rightarrow 7y - 5z = -14$ …………… Pers. (1)

Subtitusikan variabel x ke dalam persamaan ketiga

$\Rightarrow 7x - 6y - z = 10$

$\Rightarrow 7(2y - z + 6) - 6y - z = 10$

$\Rightarrow 14y - 7z + 42 - 6y - z = 10$

$\Rightarrow 8y - 8z + 42 = 10$

$\Rightarrow 8y - 8z = 10 - 42$

$\Rightarrow 8y - 8z = -32$

$\Rightarrow y - z = -4$ ……………… Pers. (2)

Persamaan (1) dan (2) membentuk persamaan y dan z:

$7y - 5z = -14$

$y - z = -4$

Dari persamaan kedua, maka kita dapatkan:

$\Rightarrow y - z = -4$

$\Rightarrow y = z - 4$

Subtitusikan peubah y ke dalam persamaan pertama untuk mendapatkan nilai z

$\Rightarrow 7y - 5z = -14$

$\Rightarrow 7(z - 4) - 5z = -14$

$\Rightarrow 7z - 28 - 5z = -14$

$\Rightarrow 2z = -14 + 28$

$\Rightarrow 2z = 14$

$\Rightarrow z = 14/2$

$\Rightarrow z = 7$

Subtitusikan nilai z = 7 ke salah satu persamaan, sebagai contoh $y - z = -4$ sehingga akan kita dapatkan:

$\Rightarrow y - z = -4$

$\Rightarrow y - 7 = -4$

$\Rightarrow y = -4 + 7$

$\Rightarrow y = 3$

Didapatkan nilai $y = 3$ dan $z = 7$ kemudian disubtitusikan ke salah satu persamaan juga, sehingga didapatkan $x - 2y + z = 6$ sehingga akan kita dapatkan:

$\Rightarrow x - 2y + z = 6$

$\Rightarrow x - 2(3) + 7 = 6$

$\Rightarrow x - 6 + 7 = 6$

$\Rightarrow x + 1 = 6$

$\Rightarrow x = 6 - 1$

$\Rightarrow x = 5$

Terlihat sudah didapatkan bahwa $x = 5$, $y = 3$ dan $z = 7$. Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\{(5, 3, 7)\}$.

Untuk memastikan bahwa nilai x, y, dan z yang didapatkan sudah benar, maka kita bisa mengetahuinya dengan cara mensubtitusikan nilai x, y, dan z pada ketiga persamaan, yaitu:

Persamaan I:

$\Rightarrow x - 2y + z = 6$

$\Rightarrow 5 - 2(3) + 7 = 6$

$\Rightarrow 5 - 6 + 7 = 6$

$\Rightarrow 6 = 6$ (benar)

Persamaan II:

$\Rightarrow 3x + y - 2z = 4$

$\Rightarrow 3(5) + 3 - 2(7) = 4$

$\Rightarrow 15 + 3 - 14 = 4$

$\Rightarrow 4 = 4$ (benar)

Persamaan III:

$\Rightarrow 7x - 6y - z = 10$

$\Rightarrow 7(5) - 6(3) - 7 = 10$

$\Rightarrow 35 - 18 - 7 = 10$

$\Rightarrow 10 = 10$ (benar)

Dengan demikian, nilai variabel x, y, dan z yang kita dapatkan benar dan memenuhi ketiga persamaan.

MATERI 2
PERSAMAAN KUADRAT

A. Uraian Materi

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan Kuadrat adalah suatu persamaan berderajat dua yang ekuivalen dengan persamaan yang berbentuk : $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **,** dengan a, b, dan c bilangan real dan a ≠ 0. *x* dinamakan peubah, *a* dinamakan koefisien x^2, *b* dinamakan koefisien *x*, dan *c* dinamakan konstanta.

2. Jenis – jenis Persamaan Kuadrat

Jenis – jenis persamaan kuadrat ditentukan oleh nilai *a*, *b,* dan *c.* sehingga persamaan kuadrat dapat dikelompokkan sebagau berikut :

Jenis Persamaan Kuadrat	Bentuk	Syarat
Persamaan Kuadrat Trivial	$ax^2 = 0$	$a \neq 0$
Persamaan Kuadrat Asli	$ax^2 + c = 0$	$a, c \neq 0$
Persamaan Kuadrat Tidak Lengkap	$ax^2 + bx = 0$	$a, b \neq 0$
Persamaan Kuadrat Lengkap	$ax^2 + bx + c = 0$	$a, b, c \neq 0$

3. Menentukan Akar – akar Persamaan Kuadrat

Akar – akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah suatu bilangan real x_0 sehingga $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi suatu pernyataan yang benar. Akar – akar persamaan kuadrat juga disebut penyelesaian (solusi/jawaban) persamaan kuadrat. Penyelesaian persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan salah satu metode berikut:

a. Metode Faktorisasi

Teorema : Faktor Nol *Misal p dan q adalah bilangan real, maka p.q = 0 jika dan hanya jika p = 0 dan q = 0.*

Contoh : Tentukan akar – akar persamaan kuadrat : $x^2 + 5x + 6 = 0$ dengan cara memfaktorkan.

$x^2 + 5x + 6 = 0$ $x (x + 3) + 2 (x + 3) = 0$ $(x + 3) (x + 2) = 0$ $x + 3 = 0$ atau $x + 2 = 0$ $x = -3$ atau $x = -2$	$5x = 3x + 2x$ Karena $3x . 2x = 6x^2$ $x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$

b. Metode Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Langkah – langkah menentukan akar – akar persamaan kuadrat dengan metode melengkapi kuadrat sempurna :

1. Isolasi suku – suku yang memuat peubah pada salah satu ruas
2. Jika koefisien x^2 bukan 1, bagi kedua ruas dengan koefisien itu.
3. Tambahkan kuadrat dari ½ lkoefisien x pada kedua ruas.
4. Nyatakan kuadrat sempurna trinomial (suku tiga) daei langkah 3 sebagai kuadrat suatu binomial (suku dua).

5. Tentukan penyelesaian dengan menarik akar menggunakan teorema berikut :

> **Teorema** :
> *Jika $a \geq 0$ dan berlaku $x^2 = a$, maka $x = \pm\sqrt{a}$, ditulis $x = \sqrt{a}$ atau $x = -\sqrt{a}$.*

Contoh : Tentukan penyelesaian dari : $2x^2 + 6x - 1 = 0$

$$2x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$2x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{11}{4}}$$

$$x \quad = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

atau : $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{11}$

c. Metode Rumus Kuadrat (rumus *abc*)

Teorema :

Akar – akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ diberikan dengan rumus :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$ atau

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4.a.c}$$

Selesaikan persamaan berikut dengan menggunakan rumus a bc dimana: $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Penyelesaian: diketahui a = 3, b = 5, c = - 2

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$ dengan D = b2 – 4ac

$$= \frac{-5 + \sqrt{(5)^2} - 4.3.2}{2.3}$$

$$= -5 \pm \sqrt{25 - 24}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$= X_1 = \frac{-5+1}{6} = \frac{-4}{6}$$

$$= X_2 = \frac{-5-1}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Jadi, penyelesaiannya ada X_{12}= (-4/6, -1)

4. Jenis Akar Persamaan Kuadrat Dikaitkan dengan Nilai Diskriminan

Pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, *a, b, c € R, a ≠ 0.* bilangan real $\sqrt{b^2 - 4.a.c}$ dinamakan diskriminan dari persamaan kuadrat dan disimbol dengan *D*. Jadi, ***D = b²* – *4 . a. c***

Salah satu terapan dari konsep diskriminan adalah untuk mengetahui jenis (karakter) akar persamaan kuadrat tanpa menghitung terlebih dahlulu akar – akarnya.

Teorema :

Misalkan $ax^2 + bx + c = 0$, *a, b, c € R, a ≠ 0* adalah persamaan kuadrat dan $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, maka akar – akarnya adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1) Jika D > 0, maka √D bilangan real positif, sehingga persamaan kuadrat memiliki dua akar real yang berlainan.
   a. Jika D berbentuk kuadrat sempurna maka persamaan kuadrat itu memiliki dua akar real, berlainan, dan rasional.
   b. Jika D bukan berbentuk kuadrat sempurna, maka persamaan kuadrat itu memiliki dua akar real, berlainan, dan irasional.
2) Jika D = 0, maka √D = 0, sehingga persamaan kuadrat itu memiliki satu akar real atau dikatakan

persamaan kuadrat itu memiliki dua akar real sama (kembar).

3) Jika D < 0, maka √D adalah bilangan imajiner, sehingga persamaan kuadrat itu tidak memiliki akar real atau dikatakan persamaan kuadrat itu memiliki dua akar kompleks berlainan yang merupakan dua bilangan kompleks sekawan.

5. Rumus Jumlah dan Hasil Kali Akar – akar Persamaan Kuadrat

a. Menghitung Bentuk Simetri Akar – akar Persamaan Kuadrat

Teorema :

Misal x_1 dan x_2 adalah akar persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$,

a, b, c € R, a ≠ 0 maka :

1) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

2) $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1 x_2$

4) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 = \dfrac{D}{a^2}$

5) $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4.x_1.x_2}$

6) $x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2.x_1^2.x_1^2$

7) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4.x_1.x_2(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1.x_2$

8) $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$

9) $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3.x_1.x_2(x_1 - x_2)$

10) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2}$

11) $\dfrac{p}{x_1} + \dfrac{p}{x_2} = \dfrac{p(x_1 + x_2)}{x_1.x_2}$

b. Menghitung Koefisien Persamaan Kuadrat yang Akar – akarnya Memiliki Sifat Tertentu

Teorema :

Misal x_1 dan x_2 adalah akar – akar persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$,

a, b, c € R, a ≠ 0 sehingga :

1) Jika perbandingan akar – akarnya $x_1 : x_2 = n : 1$ atau $x_1 = n.x_2$ maka $n.b^2 = (n+1)^2 a.c$

2) Jika selisih akar – akarnya, $x_1 - x_2 = n$ atau $x_1 = n + x_2$ maka $D = (n.a)^2$, dengan

diskriminan $D = b^2 - 4.a.c$

3) Jika akar – akarnya berlawanan, $x_1 = -x_2$ atau $x_1 + x_2 = 0$ maka
b = 0

4) Jika akar – akarnya berkebalikan $x_1 = \frac{1}{x_2}$ atau $x_1.x_2 = 1$ maka $a = c$

5) Jika salah satu akarnya nol, $x_1 = 0$ atau $x_2 = 0$ maka $c = 0$ dan $x_2 = \frac{-b}{a}$ atau $x_1 = \frac{-b}{a}$

6) Jika kedua akarnya sama, $x_1 = x_2$ maka $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

6. Menyusun Persamaan Kuadrat yang diketahui Akar – akarnya

a. Menyusun persamaan kuadrat yang akar – akarnya diketahui
   - ✓ Menggunakan perkalian faktor
     Persamaan kuadrat yang akar – akarnya x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x_1 - x_2) = 0$
   - ✓ Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar
     Persamaan kuadrat yang akar – akarnya adalah $x^2 - (x_1 + x_2) + x_1.x_2 = 0$

b. Menyusun persamaan kuadrat jika akar – akarnya diketahui memiliki hubungan dengan akar – akar persamaan kuadrat yang diberikan.

Menyusun persamaan kuadrat jika akar – akarnya diketahui memiliki hubungan dengan akar – akar persamaan kuadrat yang diberikan dapat dilakukan dengan dua strategi :

- ✓ Menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar – akar
  $x^2 - (x_1 + x_2) + x_1.x_2 = 0$
- ✓ Penghapusan indeks, jika bentuk akar – akarnya simetri (setangkup)

B. Kesimpulan

1. Persamaan Kuadrat adalah suatu persamaan berderajat dua yang ekuivalen dengan persamaan yang berbentuk : $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **,** dengan a, b, dan c bilangan real dan a $\neq 0$.
2. Jenis persamaan kuadrat sebagai berikut:

Jenis Persamaan Kuadrat	**Bentuk**	**Syarat**
Persamaan Kuadrat Trivial	$ax^2 = 0$	$a \neq 0$
Persamaan Kuadrat Asli	$ax^2 + c = 0$	$a, c \neq 0$
Persamaan Kuadrat Tidak Lengkap	$ax^2 + bx = 0$	$a, b \neq 0$
Persamaan Kuadrat Lengkap	$ax^2 + bx + c = 0$	$a, b, c \neq 0$

3. Penyelesaian persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan menggunakan cara pemfaktoran, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus ABC

C. Tugas

1. Selidiki apakah $x_1 = 3$ dan $x_2 = 4$ memenuhi persamaan kuadrat $x^2 - 7x + 12 = 0$
2. Selesaikan persamaan kuadrat berikut ini :
   a. $X^2 + 6x = 0$
   b. $X - \frac{2}{x} = \frac{2-3x}{x}$
   c. $X^2 - 6x + 9 = 0$
3. Tentukan Himpunan Penyelesaian dari persamaan $(x + 3)^2 = 25$
4. Selesaikan persamaan $(3x + 4)^2 = 48$
5. Selesaikan persamaan $5x^2 - 6x - 3 = 0$
6. Tentukan jenis akar masing-masing persamaan kuadrat di bawah ini tanpa menyelesaikan persamaannya!
   a. $2x^2 + 5x +2 = 0$
   b. $X^2 - 6x + 9 = 0$
7. Tentukan nilai m agar persamaan $(m -1)x^2 - 4mx + 5m + 6 = 0$ mempunyai akar kembar!
8. Tentukan nilai p agar persamaan $px^2 - 2(p - 1)x + p = 0$ mempunyai dua akar tidak real!
9. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $3x^2 - 6x +2 = 0$, hitunglah :
   a. $X_1 + x_2$
   b. $X_1 . x_2$

Tentukan nilai k agar akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 8x + k = 0$ mempunyai perbandingan 3 : 1!

D. Penilaian

Soal dan Jawabannya:

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat : *(x + 2)*^{2} *= 25* !

   Jawaban :

$$(x+2)^2 = 25$$
$$(x+2)^2 - 25 = 0$$
$$(x+2)^2 - 5^2 = 0$$
$$\big((x+2)+5\big)\big((x+2)-5\big) = 0$$
$$(x+7)(x-3) = 0$$
$$x = -7 \vee x = 3$$
$$HP = \{-7,3\}$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 2x - 15 = 0$ dengan menggunakan metode melengkapkan kuadrat sempurna !

   Jawaban :

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$x^2 + 2x = 15$$
$$x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}.2\right) = 15 + \left(\frac{1}{2}.2\right)$$
$$x^2 + 2x + 1 = 16$$
$$(x+1)^2 = 16$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{16}$$
$$x = -1 \pm 4$$
$$x = -5 \vee x = 3$$
$$HP = \{-5,3\}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat :

   $x^2 + 10x + 16 = 0$

   Jawaban :

   Dari persamaan kuadrat tersebut maka diperoleh :

   a = 1, b = 10, c = 16

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4.1.16}}{2.1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = -2 \vee x_2 = -8$$

$$HP = \{-8, -2\}$$

4. Jika diketahui persamaan kuadrat : $x^2 + 10x + 16 = 0$

   maka tentukan nilai dari $x_1^2 + x_2^2$!

   Jawaban :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-10}{1} = -10$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{16}{1} = 16$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2$$

$$= (-10)^2 - 2.16$$

$$= 100 - 32$$

$$= 68$$

5. Diberikan persamaan kuadrat $x^2 - (2m+3)x + 3m = 0, m \in R$. Tunjukkan bahwa persamaan kuadrat itu memiliki dua akar real dan berlainan !

Bukti :

$$x^2 - (2m+3)x + 3m = 0$$
$$a = 1, b = -(2m+3), c = 3m$$
$$maka:$$
$$D = b^2 - 4.a.c = (-(2m+3))^2 - 4.1.3m = 4m^2 + 9$$

Akar – akar persamaan kuadrat $2x^2 - 6x - m = 0$ adalah $\alpha^2 - \beta^2 = 15$, hitunglah nilai m.

Jawaban :

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{2} = 3$$
$$\alpha.\beta = \frac{-m}{2}$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = 15$$
$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 15$$
$$(\alpha - \beta)(3) = 15$$
$$\alpha - \beta = 5$$

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh :

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta = 3 \\ \underline{\alpha - \beta = 5 +} \\ 2\alpha = 8 \\ \alpha = 4 \\ 4 + \beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 4.(-1) = \frac{-m}{2} \\ m = 8 \end{array}$$

6. Diberikan persamaan kuadrat $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Akar – akarnya adalah x_1 dan x_2. tentukan persamaan kuadrat yang akar – akarnya $(x_1 + 2)$ dan $(x_2 + 2)$!
   Jawaban :
   Akar –akarnya $(x_1 + 2)$ dan $(x_2 + 2)$. Persamaan kuadratnya adalah : $2(x – 2)^2 – 5(x – 2) – 3 = 0$
   $$2x^2 – 13 + 15 = 0$$
7. Diberikan persamaan kuadrat $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Akar – akarnya adalah x_1 dan x_2. tentukan persamaan kuadrat yang akar – akarnya $1/x_1$ dan $1/x_2$!
   Jawaban :
   Akar – akarnya $1/x_1$ dan $1/x_2$. Persamaan kuadrat adalah :
   $$2\left(\frac{1}{x}\right) - 5\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$
   $$\frac{2}{x^2} - \frac{5}{x} - 3 = 0$$
   $$2 - 5x - 3x^2 = 0$$
   $$3x^2 + 5x - 2 = 0$$
8. Tentukan m, jika $x^2 - mx + 4 = 0$ merupakan kuadrat suatu bentuk linear !
   Jawaban :
   Syarat yang perlu dan cukup adalah
   D = 0
   $(-m)^2 – 4.1.4 = 0$
   $m^2 – 16 = 0$
   $(m – 4)(m + 4) = 0$
   m = -4 atau m = 4
   Jadi, m yang diminta adalah -4 atau 4

9. Jika persamaan kuadrat $x^2 + mx + 1 = 0$ dan $x^2 + x + m = 0$ memiliki satu akar persekutuan, hitunglah m dan akar itu !.

Jawaban :

Misalkan akar yang sama itu adalah x_1, maka :

$$x_1^2 + mx_1 + 1 = 0$$

$$\underline{x_1^2 + x_1 + m = 0 \; -}$$

$$(m-1)x_1 + (1-m) = 0$$

$$(m-1)x_1 = m-1$$

$$x_1 = 1$$

$$x^2 + mx + 1 = 0$$

$$1^2 + m.1 + 1 = 0$$

$$m = -2$$

Jadi, m = -2 dan akar itu adalah 1.

10. Misalnya X_1 dan X_2 aadalah-akar persamaan kudrat $X^2 - 3X + 4 = 0$ maka carilah:

a. $X_1 + X_2$

b. $X_1 . X_2$

c. $X_1^2 + X_2^2$

d. $X_1^3 + X_2^2$

e. $\frac{1}{XI} + \frac{1}{XI}$

Jawab:

Diketahui $x^2 - 3x + 4 = 0$ dengan a = 1, b = -3, c = 4, jadi:

a. $X_1 + X_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(3)}{1} = 3$

b. $X_1 . X_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$

c. $X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + X_2)^2 - 2 . X_1 . X_2$

$$= \left[\frac{-b}{a}\right]^2 - 2.\frac{c}{a}$$

d. $X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)^3 \quad = - 3 . X_1 . X_2 (X_1 + X_2)$

$= 3^3 - 3 . 4 (3)$

$= 27 - 36$

$= - 9$

e. $$\frac{1}{X1} + \frac{1}{X2} = \frac{X1 + X2}{X1.X2}$$

$$= \frac{\frac{-a}{b}}{\frac{a}{c}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

11. Tentukan persamaan kuadrat yangakar-akarnya $\frac{1}{3}$dan -2
    Jawab: $(X - X_1)(X - X_2) = 0$

    $(X - \frac{1}{3})(X - (-2))$

    $X^2 + 2X - \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}$ di kali 3

    $3X^2 + 6X - X - 2 = 0$

    $3X^2 + 5X - 2 = 0$

12. Dengan menggunakan rumus jumlah dan hasil kali akar, tentukan persamaan kuadarat yang akarnya adalah $\frac{1}{3}$dan $\frac{1}{5}$

Jawaban:

$$X_1 + X_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5}{15} + \frac{3}{15}$$

$$= \frac{8}{15}$$

$$= X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{15}$$

Jadi persamaan kuadrat

$X2 - (X_1 + X_2)\,X + X_1 \cdot X_2 = 0$

$X2 - \frac{8}{15}\,X + \frac{1}{15} = 0$ dikali 15

$15\,X^2 - 8X + 1 = 0$

13. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya 2 lebih dari persamaan $X2 - 2X + 4 = 0$

Jawab:

Akar-akar persamaan kuadrat $X^2 - 2X + 4 = 0$ adalah X_1 dan X_2 maka:

$$X_1 + X_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

Misalnya akar-akar persaman kuadratr adalah a dan b, maka:

$a = X_1 + 2$ dan $b = X_2 + 2$ sehingga

$a + b = X_1 + 2 + X_2 + 2$

$= (X_1 + X_2) + 4$

$= 4 + 2\,(2) + 4$

$= 4$

Jadi persamaan kuadrat barunya adalah

$X^2 – (a + b) X + a . b = 0$

$X^2 – 6X + 12 = 0$

14. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya dan kali persamaan kuadrat $X^2 + 8X + 10 = 0$

$X^2 – 2 (X_1 + X_2) + X (2 X_1 + 2 X_2)$

$X^2 – 2 (X_1 + X_2) + X + 4 X_1 X_2 = 0$

$X^2 – 2 (- 8) X + 4 (10) = 0$

$X^2 + 16 X + 40 = 0$

15. Jika seleksi akar-akar persamaan $X^2 – nX \;\; + = 0$ sama dengan 5, maka jumlah akar-akar persamaan adalah:

Misal akar-akar persaman X_1 dan X_2 , $X_1 – X_2 = 5$

$(X_1 – X_2)^2 = (X_1 + X_2)^2 – 4 X_1 X_2$

$$5^2 = (X_1 + X_2)^2 – 4 \left(\frac{24}{1}\right)$$

$(X1 + X2)^2 = 25 + 96$

$X_1 + X_2 = \sqrt{121} = \pm 11$

MATERI 3
Persamaan Eksponen dan Logaritma

A. Uraian Materi

1. Persamaan Eksponen

Persamaa Eksponen dalam x adalah suatu persamaan yang eksponennya paling sedikit memuat fungsi x.

a. jika $a^{f(x)} = a^{p}$ (a > 0 dan a≠ 1), maka f (x) = p
b. jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (a > 0 dan a≠ 1), maka f (x) = g (x)
c. jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ (a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 0,) maka f (x) = 0
d. jika $h(x)^{f(x)} = \{g(x)\}^{q(x)}$, maka kemungkinannya adalah:
   f (x) = g (x)
   h (x) = 1
   h (x) = 0, asalkan f (x), dan g (x) keduanya positif
   h (x) = -1, asalkan f (x) dan g (x) keduanya ganjil, atau f (x) dan g (x) keduanya genap
e. jika $\{f(x)\}^{h(x)} = \{g(x)^{h(x)}$, maka kemungkinannya adalah:
   1) f(x) = g (x)
   2) h(x) = 0 asalkan f(x) dan g(x) ≠ 0

Contoh soal, tentukanlah nilai x dari $3^{5x-1} = 27^{x+3}$:
Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah:

$$3^{5x-1} = 27^{x+3}$$
$$3^{5x-1} = (3^3)^{x+3}$$
$$3^{5x-1} = 3^{3x+9}$$

$$5x - 1 = 3x + 9$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

2. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma dalam x adalah persamaan yang mengandung fungsi x di bawah tanda logaritma atau fungsi x sebagai bilangan pokok suatu logaritma.

Sifat-sifat yang berlaku pada persamaan logaritma.

a. jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$
b. jika ${}^{a}\log f(x) = b\log f(x)$, dengan $(a \neq b)$, maka $f(x) = 1$
c. jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log f(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan f(x) dan g(x) keduanya positif
d. jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x)=g(x)$ asalkan f(x) dan (x) keduanya positif serta $h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$.
e. jika ${}^{f(x)}\log h(x) = {}^{g(x)}\log h(x)$, maka kemungkinan-kemungkinannya :
   1) $f(x) = g(x)$ asalkan $h(x) = 1$, $f(x) > 0$ $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$
   2) $f(x) = g(x)$ asalkan $h(x) \neq 1$, $h(x) > 0$

Carilah penyelesaian dari 34-x = 3

$3^{4-x} = 3$

$3^{4-x} = 31$

$4 - x = 1$

$x = 3$

Tentukanlah nilai x dari ${}^{(3x+2)}\log 27 = {}^{5}\log 3$:

Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah:

${}^{(3x+2)}\log 27 = {}^{5}\log 3$

${}^{(3x+2)}\log 3^2 = {}^{5}\log 3^3 \Leftrightarrow 3x + 2 = 5^3$

$3x + 2 = 125$

$3x = 123$

$x = 41$

B. Kesimpulan

1. Persamaa Eksponen dalam x adalah suatu persamaan yang eksponennya paling sedikit memuat fungsi x.
2. Persamaan logaritma dalam x adalah persamaan yang mengandung fungsi x di bawah tanda logaritma atau fungsi x sebagai bilangan pokok suatu logaritma

C. Tugas

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari

   $$\sqrt{\left(\tfrac{1}{27}\right)^{2x-1}} = \sqrt{243}$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $4^{x+3} = \sqrt[4]{8^{x-2}}$
3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan dari

   $$8^{x^2+x} = 16^{x+1}$$

4. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan xlog 1/100 = - 1/8
5. xlog 81 - 2 xlog 27 + xlog 9 + 1/2 xlog 729 = 6

D. Penilaian

Soal dan Jawaban:

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $3^{x^2-3x+2} = 1$

   Jawab :

   $$3^{x^2-3x+2} = 1$$

   $$3^{x^2-3x+2} = 3^0$$

   $$x^2 - 3x + 2 = 0$$

   $$(x-2)(x-1) = 0$$

   $$x = 2 \vee x = 1$$

Jadi , himpunan penyelesaiannya adalah $\{1,2\}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari $2^{x^2-3x-10}=1$

   Jawab :

   $2^{x^2-3x-10}=1$

   $2^{x^2-3x-10}=2^0$

   $x^2-3x-10=0$

   $(x-5)(x+2)=0$

   $x=5 \vee x=-2$

   Jadi , himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2,5\}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari : $4^{x^2-6x+8}=5^{x^2-6x+8}$

   Jawab :

   $4^{x^2-6x+8}=5^{x^2-6x+8}$

   $x^2-6x+8=0$

   $(x-2)(x-4)=0$

   $x=2 \vee x=4$

   Jadi , Hp = {2,4 }

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari : $6^{x-2}=2^{2x-4}$

   Jawab :

   $6^{x-2}=2^{2x-4}$

   $6^{x-2}=2^{2(x-2)}$

   $8^{x-2}=4^{x-2}$

   $x-2=0$

   $x=2$

   Jadi , Hp-nya adalah {2}

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan berikut :

$$(2x+3)^{x^2+x-2} = (2x+3)^{3x+1}$$

Jawab :

- Kemungkinan 1: pangkat sama

$$x^2 + x - 2 = 3x + 1$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$
$$x = 3 \vee x = -1$$

- Kemungkinan 2: bilangan pokok = 1

$$2x + 3 = 1$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$

- Kemungkinan 3: bilangan pokok = -1

$$2x + 3 = -1$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Uji pada pangkat

$$x = -2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 4 - 2 - 2 = 0(genap)$$
$$x = -2 \rightarrow 3x + 1 = -6 + 1 = -5(ganjil)$$

Jadi , -2 bukan himpunan penyelesaian.

- Kemungkinan 4: bilangan pokok = 0

$$2x+3=0$$

$$x=-\frac{3}{2}$$

$$x=-\frac{3}{2}\rightarrow x^2+x-2=\left(-\frac{3}{2}\right)2+\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-\frac{5}{4}(negatif)$$

$$x=-\frac{3}{2}\rightarrow 3x+1=3\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-\frac{7}{2}(negatif)$$

Jadi, $x=-\frac{3}{2}$ bukan himpunan pneyelesaian dan

Himpunan penyelesaiannya adalah {-1,3}

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari $\left(x^2-2x-1\right)^{2x+3}=\left(x^2-2x-1\right)^{3x-2}$

Jawab :

- Kemungkinan 1: pangkat sama

$$2x+3=3x-2$$

$$x=5$$

- Kemungkinan 2: bilangan pokok =1

$$x^2-2x-1=1$$

$$x^2-2x-2=0$$

$$x_{1.2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.(-2)}}{2}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$=1\pm\sqrt{3}$$

$$x=1+\sqrt{3}\vee x=1-\sqrt{3}$$

- Kemungkinan 3: bilangan pokok = -1

$x^2-2x-1=-1$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0 \vee x=2$

Uji pada pangkat ;

$x=0 \rightarrow 2x+3=2.0+3=3 \qquad (ganjil)$

$\rightarrow 3x-2=3.0-2=-2 \qquad (genap)$

$x=2 \rightarrow 2x+3=2.2+3=7 \qquad (ganjil)$

$\rightarrow 3x-2=3.2-2=4 \qquad (genap)$

Jadi , x=0 dan x=2 bukan himpunan penyelesaian.

- Kemungkinan 4: bilangan pokok = 0

$x^2-2x-1=0$

$x_{1.2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1(-1)}}{2}$

$=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$

$=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$

$=1\pm\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2} \rightarrow 2x+3=2(1+\sqrt{2})+3$

$=5+2\sqrt{2} \qquad (positif)$

$\rightarrow 3x-2=3(1+\sqrt{2})-2$

$=1+3\sqrt{2} \qquad (positif)$

$x=1-\sqrt{2} \rightarrow 2x+3=2(1-\sqrt{2})+3$

$=5-2\sqrt{2} \qquad (positif)$

$\rightarrow 3x-2=3(1-\sqrt{2})-2$

$=1-3\sqrt{2} \qquad (negatif)$

$x = 1 - \sqrt{2}$ bukan himpunan penyelesaian. Jadi , himpunan penyelesaian adalah $\{5, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}\}$

7. Tentukan himpunan penyelesaian dari $(x^2 - x)^{x^2+x-2} = (2x+40)^{x^2+x-2}$

Jawab :

- Kemungkinan 1: pangkat = 0

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x+2)(x-1) = 0$$
$$x = -2 \vee x = 1$$
$$x = -2 \rightarrow x^2 - x = (-2)^2 - (-2) = 6 \neq 0$$
$$x = -2 \rightarrow 2x + 40 = 2(-2) + 40 = 36 \neq 0$$

Jadi , x= -2 merupakan himpunan penyelesaian.

X=1→ x2-x=12-1=0, dan x = 1 bukan merupakan himpunan penyelesian.

- Kemungkinan 2: bilangan pokok sama

$$x^2 - x = 2x + 40$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0$$
$$(x-8)(x+5) = 0$$
$$x = 8 \vee x = -5$$

Jadi , himpuanan penyelesaian adalah { -5 , -2 , 8 }

8. xlog (x+12) - 3 xlog4 + 1 = 0

xlog(x+12) - xlog 4^3 = -1

xlog ((x+12)/4^3) = -1

(x+12)/4^3 = 1/x

$x^2 + 12x - 64 = 0$

$(x + 16)(x - 4) = 0$

$x = -16$ (TM) ; $x = 4$

9. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan:

   ${}^2\log^2 x - 2\ {}^2\log x - 3 = 0$

   Misalkan : ${}^2\log x = p$

   $p^2 - 2p - 3 = 0$

   $(p-3)(p+1) = 0$

   $p_1 = 3$

   ${}^2\log x = 3$

   $x_1 = 2^3 = 8$

   $p_2 = -1$

   ${}^2\log x = -1$

   $x_2 = 2-1 = 1/2$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah = {8, ½}

10. Jika $\left({}^a\log(3x-1)\right)\left({}^5\log a\right) = 3$, maka x = ….

    ${}^a\log(3x - 1).\ {}^5\log a = 3$

    ${}^5\log a\ {}^a\log(3x - 1) = 3$

    ${}^5\log(3x - 1) = {}^5\log 5^3$

    $3x - 1 = 125$

    $3x = 126$

    $x = 42$

RUJUKAN

Putra, 2004, *Matematika SMA Kelas 1 Jilid 1B*, Jakarta: PT

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Vance, E. P. (1989). *Modern College Algebra*. London : Addison Wesley.

BAB V
PERTIDAKSAMAAN

PENDAHULUAN

Selain bentuk persamaan, bentuk aljabar lainnya mengandung hubungan pertidaksamaan, yaitu pernyataan matematika yang antara ruas kiri dan kanan mengandung hubungan tidak sama. Pembahasan tentang pertidaksamaan diharapkan dapat memberikan pemahaman bagi mahasiswa dalam memahami:

1. Pengertian pertidaksamaan
2. Pengertian interval
3. Menggambar garis bilangan
4. Pertidaksamaan linier satu dan dua variabel
5. Cara menyelesaikan pertidaksamaan linier
6. Pertidaksamaan kuadrat
7. Cara penyelesaian pertidaksamaan kuadrat
8. Pertidaksamaan eksponen dan logaritma

MATERI 1
Pertidaksamaan

A. Uraian Materi

Pertidaksamaan merupakan pernyataan terbuka yang memuat variabel dan menggunakan tanda ketidaksamaan ($<$, $\leq$, $>$ atau $\geq$). Menyelesaikan masalah pertidaksamaan artinya kita menentukan nilai variabel yang membuat pertidaksamaan tersebut memiliki nilai benar. Nilai tersebut dinamakan himpunan penyelesaian atau akar penyelesaian dari satu pertidaksamaan.

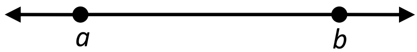
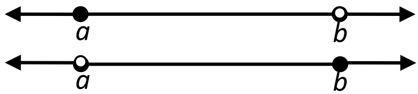
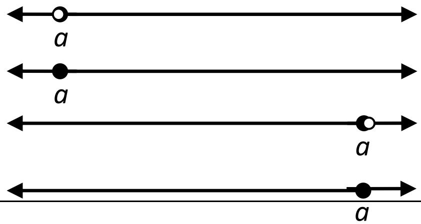
a. Pengertian Interval

Interval atau selang dinyatakan pada garis bilangan dan himpunan dengan tujuan menunjukkan atau menggambarkan batas interval pada garis bilangan. Tanda yang biasa digunakan adalah titik tertutup (●) atau atau titik terbuka (○).

● Titik tertutup : menunjukkan bahwa bilangan pada tanda ini termasuk kedalam interval

○ Titik terbuka : Menunjukkan bahwa bilangan pada tanda ini tidak termasuk kedalam interval

Berikut disajikan bentuk interval yang ditunjukkan pada garis bilangan dan himpunan yang menunjukkan penyelesaian dari satu pertidaksamaan.

Garis Bilangan	Himpunan
1. Interval tertutup 	$\{x \mid a \le x \le b, x \in R\}$
2. Interval setengah tertutup 	$\{x \mid a \le x < b, x \in R\}$ $\{x \mid a < x \le b, x \in R\}$
3. Interval terbuka 	$\{x \mid a < x < b, x \in R\}$
4. Interval setengah garis 	$\{x \mid a \ge a, x \in R\}$ $\{x \mid a > a, x \in R\}$ $\{x \mid a \ge a, x \in R\}$ $\{x \mid a > a, x \in R\}$

b. Sfat-sifat Pertidaksamaan

Beberapa sifat pertidaksamaan yang sangat penting untuk menentukan penyelesaian suatu pertidaksamaan. Sifat-sifat tersebut adalah sebagai berikut.

a. Sifat tak negatif

Untuk $a \in R$ maka $a^2 \ge 0\}$

b. Sifat transitif

Untuk *a, b, c* bilangan real :

Jika a < b dan b < c maka a < c
Jika a > b dan b > c maka a > c

c. Sifat penjumlahan

Untuk *a*, *b*, *c* bilangan real :

Jika a < b maka a + c < b + c
Jika a > b maka a + c > b + c

Pada Sifat penjumlahan jika kedua ruas pertidaksamaan dijumlahkan dengan bilangan yang sama, maka tanda pertidaksamaan tidak berubah.

d. Sifat perkalian

Untuk *a*, *b*, *c* bilangan real :

Jika a < b an c > 0 maka ac < bc
Jika a > b an c > 0 maka ac > bc
Jika a < b an c < 0 maka ac > bc
Jika a > b an c < 0 maka ac < bc

Pada sifat perkalian jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan (real) positif yang sama, maka tanda ketidaksamaan tidak berubah. Akan tetapi, jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan (real) negatif yang sama, maka tanda ketidaksamaan berubah.

e. Sifat kebalikan(invers perkalian)

Untuk bilangan a a $\in R$

Jika a > 0 maka 1/a > 0
Jika a < 0 maka 1/a < 0

Sifat kebalikan menyatakan bahwa tanda dari suatu bilangan dan kebalikannya adalah sama. Jika suatu bilangan adalah negatif, kebalikan bilangan ini juga negatif.

c. Menyelesaikan pertidaksamaan linear

Bentuk umum dari pertidaksamaan linier adalah:

$$ax + b > 0$$
$$ax + b \geq 0$$
$$ax + b < 0$$
$$ax + b \leq 0$$

bentuk tersebut diatas dengan ketentua a $\in$ R dan a $\neq 0$, pertidaksamaan tersebut memiliki pangkat variabel x adalah 1. Pertidaksamaan yang memuat pangkat tertinggi dari variabel x adalah satu dinamakan pertidaksamaan linear. . missal 2x + 1 < 3 merupakan pertidaksamaan linear.

Menyelesaikan pertidaksamaan linier satu variabel dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Pisahkan suku bilanagn yang bervariabel dengan yang tidak. Dapat dilakukan dengan menempatkan suku yang bervariabel di ruas kiri dan yang tidak bervariabel di ruas kanan.
2. Kalikan dengan suatu bilangan yang sama pada masing-masing ruas sehingga variabel di ruas kiri tanpa koefisien dengan aturan sebagai berikut :
   a. Jika dikalikan dengan angka positif maka pertidaksamaan tersebut perlu dilakukan perubahan ($<, <, \geq$ *atau* $\leq$)
   b. Jika dikalikan dengan angka negatif maka pertidaksamaan tersebut akan berubah tanda menjadi lawan dari tanda pertidaksamaan semula.

c. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan menggunakan tanda x sedemikian sehingga yang disingkat $x|$ sebagai tanda anggota himpunan tak terbatas.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x - 4 < 8$!

Jawab : $2x < 8 + 4$

$2x < 12$

$x < 6$

Jadi penyelesaiannya adalah : $\{ x|x < 6, x \in R\}$

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut untuk peubah pada bilangan real, dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan!

a. $5x - 2 < 8$
b. $2x + 7 > x + 4$
c. $2x - 5 \leq 6x + 3$

Jawab

a. $5x - 2 < 8$

$5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$

Jadi HP = $\{ x|x < 2\}$

Bilangan 3 tidak termasuk

b. $2x + 7 > x + 4$

$2x - x > 4 - 7$

$x > - 3$

Jadi HP = $\{x|x > - 3\}$

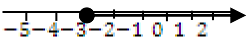
c. $2x - 5 \leq 6x + 3$

$2x - 6x \leq 3 + 5$

$-4x \leq 8$

$x \geq -2$

Jadi HP = $\{x | x \geq -2\}$

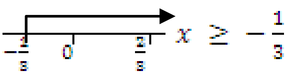


Menyelesaikan Pertidaksamaan Linear dengan Tanda Ketidaksamaan Ganda.

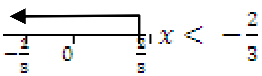
Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-3 \leq 6x - 1 < 3$. Secara umum, pertidaksamaan dengan tanda ganda diselesaikan dengan memisahkannya menjadi dua pertidaksamaan, seperti berikut :

$-3 \leq 6x - 1$	dan	$6x - 1 < 3$
$-2 \leq 6x$	dan	$6x < 4$
$-2/6 \leq x$	dan	$x < 4/6$
$-1/3 \leq x$	dan	$x < 2/3$
$x \geq -1/3$ …(1)	dan	$x < 2/3$ …(2)

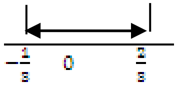
Penyelesainnya dapat diperoleh dengan bantuan garis bilangan, seperti pada gambar berikut.



Penyelesaian 1



Penyelesaian 2



$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ *Penyelesaian 1 dan 2*

Jadi HP $= \{x \mid -\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, x \in R\}$

Alternatif: Oleh karena variabel x hanya terdapat diruas tengah pertidaksamaan, Anda dapat menyelesaikannya secara lebih cepat tanpa perlu memisahkannya menjadi dua bagian, seperti berikut:

$-3 \leq 6x - 1 < 3$

$-2 \leq 6x < 4$

$-2/6 \leq 6x/6 < 4/6$

Ketiga ruas dikalikan dengan 6 dan tanda ketidaksamaannya tidak berubah.

$-1/3 \leq x < 2/3$

-1/3 termasuk sementara 2/3 tidak termasuk himpunan penyelesaiannya.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah =

{x|x $\leq$ -1/3 dan < 2/3, x E *R*}

B. Kesimpulan

1. Pertidaksamaan merupakan pernyataan terbuka yang memuat variabel dan menggunakan tanda ketidaksamaan (<, $\leq$, > atau $\geq$).
2. Titik tertutup menunjukkan bahwa bilangan pada tanda ini termasuk kedalam interval

3. Titik terbuka menunjukkan bahwa bilangan pada tanda ini tidak termasuk kedalam interval
4. Beberapa sifat pertidaksamaan adalah sebagai berikut.
   a. Sifat tak negatif

   Untuk a $\in$ *R* maka $a^2 \geq 0$}

   b. Sifat transitif

   Untuk *a*, *b*, *c* bilangan real :

   Jika a < b dan b < c maka a < c
   Jika a > b dan b > c maka a > c

   c. Sifat penjumlahan

   Untuk *a*, *b*, *c* bilangan real :

   Jika a < b maka a + c < b + c
   Jika a > b maka a + c > b + c

   d. Sifat perkalian

   Untuk *a*, *b*, *c* bilangan real :

   Jika a < b an c > 0 maka ac < bc
   Jika a > b an c > 0 maka ac > bc
   Jika a < b an c < 0 maka ac > bc
   Jika a > b an c < 0 maka ac < bc

   e. Sifat kebalikan(invers perkalian)

   Untuk bilangan a a $\in$ *R*

   Jika a > 0 maka 1/a > 0
   Jika a < 0 maka 1/a < 0

C. Tugas

1. Buatlah bentuk pertidaksamaan dari cerita berikut ini:
   a. sebuah kendaraan yang mana lewat di jalan ini dengan kecepatannya tak boleh lebih hanya dari 60 km per jam.
   b. Daya sebuah bak mobil adalah 700 kg yang artinya muatan maksimum tersebut yang boleh diangkut oleh mobil tersebut adalah 700 kg. Dengan demikian bahwa muatan mobil tersebutlah harus kurang dari yaitu : 700 kg = 700 kg
   c. Usia anak masuk sekolah dasar paling rendah 7 tahun.
   d. Untuk mendapat predikat cumlude, seorang mahasiswa harus lulus dengan nilai komulatif tak boleh kurang dari nilai 4,50
2. Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 150 dan bilangan kedua sama dengan tiga kali bilangan pertama. Tentukan batas-batas nilai dari kedua bilangan itu.
3. Umur Iwan dan Yulia masing-masing (6x – 3) dan (2x + 4). Jika umur Iwan lebih dari umur Yuli, maka tentukanlah batas-batas nilai x.

D. Penilaian

Coal dan Jawaban:

1. Carilah himpunan penyelesaian pertidaksamaan dibawah ini: $4x + 1 < x - 8$

   Jawab:

   $4x + 1 < x - 8$

   $4x - x < -8 - 1$

   $3x < -9$

   $x < -3$

   Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah: {x|x < -3, x ? R}.

2. Carilah himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan linear dibawah ini $2x - 1 < 0$

   Jawab:

   $2x - 1 < 0$

   $2x < 1$

   $x < ½$

   Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 1/2\}$.

3. Carilah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan linear dibawah ini yakni:

   (a) $2x - 4 < 3x - 2$

   (b) $1 + x = 3 - 3x$

   Jawab:

   (a). $2x - 4 < 3x - 2$

   $2x - 3x < -2 + 4$

   $-x < 2$

   $x > -2$

   Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > -2\}$.

(b). $1 + x = 3 - 3x$

$x + 3x = 3 - 1$

$4x = 2$

$x = 2/4$

$x = 1/2$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x = 1/2\}$.

4. Carilah himpunan penyelesaian setiap pertidaksamaan berikut ini.

(a) $x/2 + 2 < x/3 + 21/2$

(b) $1 < 2x - 1 = 3$

Jawab:

(a) $x/2 + 2 < x/3 + 21/2$

$x/2 + 2 < x/3 + 21/2$

$x/2 - x/3 < 21/2 - 2$

$3x/6 - 2x/6 < ½$

$x/6 < ½$

$x < 6/2$

$x < 3$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 3\}$.

(b) $1 < 2x - 1 = 3$

$1+ 1 < 2x = 3+1$

$2 < 2x = 4$

$1 < x = 2$

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3x - 7 > 2x + 2$ yang apabila x adalah anggota dari $\{1,2,3,4,\ldots,15\}$

Jawabnya :

$= 3x - 7 > 2x + 2; x \in \{1, 2, 3, 4\ldots 15\}$

$= 3x – 2x – 7 > 2x – 2x + 2$

$= x – 7 > 2$

$= x – 7 + 7 > 2 + 7$

$= x > 9$

Himpunan penyelesaiannya ialah (x | x > 9 : x dengan bilangan asli adalah ≤ 15). untuk itu, anggota himpunan penyelesaiannya adalah: (10, 11, 12, 13, 14, 15)

6. Tentukanlah shimpunan penyelesaian dari pertidaksamaan: $3x – 1 < x + 3$ dimana x variable pada suatu himpunan bilangan cacah:

   Jawabnya:

   $= 3x – 1 < x + 3$

   $= 3x – 1+ 1 < x + 3 + 1$

   $= 3x < x + 4$

   $= 3x + (-x) < x + (-x) +4$

   $= 2x < 4$

   $= x < 2$

   Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 2\}$.

7. Sebuah alat truk angkut bisa menampung beban dengan berat tidak lebih dari 2 ton. Jika satu paket barang bwaanya seberat 20kg. berapakah paling banyak paket yang dapat diangkut oleh truk itu?

   Jawab:

   Pada kalimat matematika yaitu : 20 kg x ≤ 2 ton

   Penyelesaiannya adalah : 20 kg x ≤ 2000 kg

   $20x \leq 1 .500$

   $x \leq 2000/20$

   $x \leq 100$

   dengan demikian, paling banyak paket yang dapat diangkut oleh truk tersebut adalah 100 paket.

Materi 2
Pertidaksamaan Kuadrat

A. Uraian Materi

Pertidaksamaan kuadrat (atau) pertidaksamaan pangkat dua) adalah suatu pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya dua. Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat sebagai berikut:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

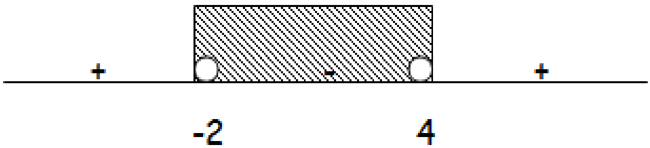
Berikut ini adalah contoh pertidaksamaan kuadrat X2 + 2x – 5 > 0; x2 + -4x + 5 < 0

Menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat dapat dilakukan dengan mengikuti langkah berikut:

a. Usahakan ruas kiri bentuk kuadrat dan ruas kanan hanya 0
b. Tentukan akar-akar dari bentuk kuadrat dengan cara memfaktorkan
c. Gunakan garis bilangan yang ditandai akar-akarnya sehingga terdapat 3 ruang yang akan diisi dengan tanda "+" atau "-". Jika soalnya $< atau >$ maka pada titik akarnya berlubang dan jika soalnya $\leq atau \geq$ maka titik akarnya tertutup. Tanda + untuk nilai bentuk kuadrat > 0 dan tanda – untuk nilai bentuk kuadrat < 0.
d. Tentukan penyelesaiannya disesuaikan dengan soalnya apakah $<, <, \geq atau \leq$ dengan cara mengarsir.

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 - 2x - 8 < 0$

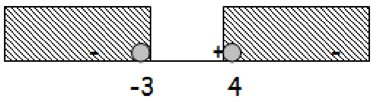
Jawab : $x^2 - 2x - 8 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+2) < 0$



Nilai persamaan yang lebih kecil dari nol berarti yang jika nilai akar x nya disubtitusikan pada persamaan tersebut menghasilkan bilangan negatif dan yang menunjukkan hasil negative adalah pada daerah antara -2 dengan 4. Untuk itu, himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah: $\{x | -2 < x < 4\}$

Tentukan himpunan penyelesaian dari $12 + x - x^2 \leq 0$ *!*

Jawab : $12 + x - x^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-x+4)(x+3) \leq 0$



Jadi, Himpunan Penyelesaiannya adalah:

$$\{x | x \leq -3 \quad atau \quad x \geq 4\}$$

Menyelesaiakan pertidaksamaan kuadrat secara prosedur hamper sama dengan cara menyelesaiakan persamaan kuadrat, hanya di akhir langkah perlu pembuktian dari beberapa akar persamaan untuk menentukan daerah hasilnya yang tepat. Akan tetapi, jika dalam kasus tertentu terdapat pertidaksamaan kuadrat yang daerah hasilnya tidak ada satupun dari anggota bilangan real, maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kososng. Seperti pertidaksamaan $x^2 - 2x + 1 < 0$. Tidak satupun dari x E *R* yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Jadi pertidaksamaan $x^2 - 2x + 1 < 0$ tidak memiliki penyelesaian atau himpunan penyelesainnya adalah himpunan kosong = { … } atau{ Ø }.

B. Kesimpulan

1. Pertidaksamaan kuadrat (atau) pertidaksamaan pangkat dua) adalah suatu pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya dua.
2. Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat sebagai berikut:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

C. Tugas

Tentukanlah himpunan penyelesain dari pertidaksamaan berikut :

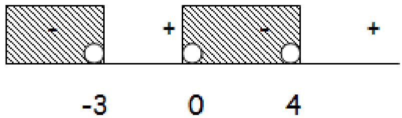
a. $x^2 - 4x - 12 > 0$
b. $x^2 - 3x - 4 < 0$
c. $2x^2 + 3x - 5 < 0$
d. $x^2 + 6x + 8 < 0$
e. $2x^2 + 3x - 5 > 0$
f. $4x^2 + x - 6 < 0$
g. $2x^2 - 7x + 4 \leq 0$

D. Penilaian

Soal dan Jawaban:

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^3 - x^2 - 12x < 0$ **:**

Jawab : $x^3 - x^2 - 12x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4)(x+3) < 0$



Himpunan penyelesaiannya: $\{x | x < -3 \quad atau \quad 0 < x < 4\}$

2. Tentukan selesaian dari x2 – 3x + 2 > 0.

Jawaban:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$

$x = 1$ atau $x = 2$

Dalam garis bilangan

+++++++ ------------ ++++++++

1 2

Himpunan penyelesaiannya adalah $x < 1$ atau $x > 2$.

3. Tentukan nilai-nilai x yang memenuhi $x^2 - 3x - 4 \leq 0$.

Jawaban:

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 4) = 0$

$x = -1$ atau $x = 4$

Dalam garis bilangan

+++++++ ------------ +++++++++++

–1 4

Himpunan penyelesainnya adalah $-1 \leq x \leq 4$.

Materi 3
Pertidaksamaan Eksponen dan Logaritma

A. Uraian Materi

1. Pertidaksamaan Eksponen

Merupakan pertidaksamaan yang mengandung peubah x sebagai pangkat dari bilangan pokok.

a. Sifat monoton naik (a>0)

1) jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ maka $f(x) \geq g(x)$
2) jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ maka $f(x) \leq g(x)$

b. Sifat monoton turun (0<a<1)

1) jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ maka $f(x) \leq g(x)$
2) jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ maka $f(x) \geq g(x)$

Misalnay terdapat pertidaksamaan 3 2x + 1 < √27, tentukanlah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan terseubt:

Jawab:

$$3^{2x+1} < \sqrt{27} \leftrightarrow 3^{2x+1} < 3^{3/2}$$

$$3^{2x+1} < 3^{3/2} \leftrightarrow 2x + 1 < \frac{3}{2}$$

$$2x < \frac{3}{2} - 1$$

$$x < \frac{1}{4}$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah: $\{ x \in R \mid x < \frac{1}{4} \}$

2. Pertidaksamaan Logaritma

Pertidaksamaan logaritma adalah pertidaksamaan yang mengandung fungsi-fungsi logaritma.

${}^{a}\log (x) > {}^{a}\log g(x)$ maka : (i) $f(x) > g(x)$, $a > 1$

(ii) $f(x) < g(x)$, $0 < a < 1$

Perlu diingat bahwa fungsi logaritma hanya berlaku untuk bilangan positif sehingga pada pertidaksamaan logaritma ${}^{a}\log (x) > {}^{a}\log g(x)$, langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Syarat : $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Penyelesaiannya:

$${}^{a}\log f(x) > {}^{a}\log g(x)$$

(i) $f(x) > g(x)$, $a > 1$

(ii) $f(x) < g(x)$, $0 < a < 1$

Penyelesaian = I $\cap$ II.

Tentukanlah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^{2}\log (2x + 7) > 2$ adalah …..

Penyelesaian:

${}^{2}\log (2x + 7) > 2$

I. Syarat

$2x + 7 > 0$

$2x > -7$

II. Penyelesaian

${}^{2}\log (2x + 7) > 2$

${}^{2}\log (2x + 7) > 2\ {}^{2}\log 2^{2}$

$2x + 7 > 2^{2}$

a. Sifat logaritma monoton naik ($a>1$)

- jika ${}^{a}\log f(x) \geq {}^{a}\log g(x) \rightarrow f(x) \geq g(x)$; $f(x)$ dan $g(x)>0$
- jika ${}^{a}\log f(x) \leq {}^{a}\log g(x) \rightarrow f(x) \leq g(x)$; $f(x)$ dan $g(x)<0$

b. Sifat logaritma monoton turun ($0<a<1$)

- jika alog f(x) $\geq$ alog g(x) $\rightarrow$ f(x) $\leq$ g(x); f(x) dan g(x)>0
- jika alog f(x) $\leq$ alog g(x) $\rightarrow$ f(x) $\geq$ g(x); f(x) dan g(x)<0

B. Kesimpulan

1. Pertidaksamaan Eksponen Merupakan pertidaksamaan yang mengandung peubah x sebagai pangkat dari bilangan pokok.
2. Pertidaksamaan logaritma adalah pertidaksamaan yang mengandung fungsi-fungsi logaritma.

C. Tugas

1. Pertidaksamaan logaritma ${}^{6}\log (x^2 - x) < 1$ dipenuhi untuk nilai-nilai x
2. Tentukan hp dari pertidaksamaan logaritma di bawah ini:

   ${}^{2}\log(x^2 - 2x) < 3$

   ${}^{1/2}\log (x^2 - 3) < 0$
3. Tentukanlah nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut: $9^{2x-4} \geq (1/27)^{x2 - 4}$

D. Penilaian

Soal dan Jawaban

1. Akar – akar persamaan $2 \cdot 3^{4x} - 20 \cdot 3^{2x} + 18 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Nilai $x_1 + x_2 = \ldots.$

   Jawaban:

   Misalkan: $p = 3^{2x}$

   $2 \cdot 3^{4x} - 20 \cdot 3^{2x} + 18 = 0$

   $2(3^{2x})^2 - 20 (3^{2x}) + 18 = 0$

   $2p^2 - 20p + 18 = 0$

   $p^2 - 10p + 9 = 0$

   $(p - 9)(p - 1) = 0$

   $p = 9$ atau $p = 1$

   Mencari nilai x untuk p = 9:

   $p = 9$

   $3^{2x} = 3^2$

   $2x = 2$

   $x = {}^2/_2 = 1$

   Mencari nilai x untuk p = 1:

   $p = 1$

   $3^{2x} = 3^0$

   $2x = 0$

   $x = {}^0/_2 = 0$

   Jadi, nilai $x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1$

2. Himpunan penyelesaian dari $2^{2x} - 7 \cdot 2x > 8$ adalah ….

   Misalkan $p = 2^x$ sehingga $2^{2x} = p^2$.

   $2^{2x} - 7 \cdot 2^x > 8$

   $p^2 - 7p - 8 > 0$

   $(p + 1)(p - 8) > 0$

   Karena tanda pertidaksamaannya ‘>’ maka penyelesaiannya berada di sebelah kiri −1 atau di sebelah kanan 8.

$p < -1$ atau $p > 8$
$2^x < -1$ atau $2^x > 8$

Penyelesaian $2^x < -1$ tidak memenuhi karena hasil perpangkatan tidak mungkin negatif. Sehingga kita tinggal menyelesaikan $2^x > 8$.

$$2^x > 8$$
$$2^x > 2^3$$
$$x > 3$$

Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan eksponen adalah: {x|x > 3, x E *R*}

3. Himpunan penyelesaian dari $9^x - 54 > 3^{x+1}$ adalah ….

Jawaban:

Langkah pertama kita pindah ruas sehingga ruas kanan menjadi nol

$$9^x - 3^{x+1} - 54 > 0$$

Selanjutnya pangkat dari 3 kita pecah dengan rumus $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

$$9^x - 3^x \,.\, 3^1 - 54 > 0$$

Misalkan $p = 3^x$ sehingga $9^x = p^2$.

$$p^2 - 3p - 54 > 0$$
$$(p + 6)(p - 9) > 0$$

Karena tanda pertidaksamaannya '>' maka penyelesaiannya berada di sebelah kiri −6 atau di sebelah kanan 9.

$p < -6$ atau $p > 9$
$3^x < -6$ atau $3^x > 9$

Penyelesaian $3^x < -6$ tidak memenuhi karena hasil perpangkatan tidak mungkin negatif. Sekarang kita lanjutkan untuk $3^x > 9$.

$$3^x > 9$$
$$3^x > 3^2$$
$$x > 2$$

Jadi, himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan eksponen di atas adalah x > 2.

4. Nilai x yang memenuhi $3^{x^2-3x+4} < 9^{x-1}$ adalah…..
   Jawaban:

$$3^{x^2-3x+4} < 9^{x-1}$$
$$3^{x^2-3x+4} < 3^{2(x-1)}$$
$$x^2 - 3x + 4 < 2x - 2$$
$$x^2 - 5x + 6 < 0$$
$$(\ x-2)(\ x-3) < 0$$
$$2 < x < 3$$

   Himmpunan Penyelesainnya = $\{x|2 < x < 3, x \in R\}$
5. Tentukan himpunan penyelesaian $2^{x+2} > 16^{x-2}$!
   Jawaban:

$$2^{x+2} > 16^{x-2}$$
$$2^{x+2} > 2^{4(x-2)}$$
$$x + 2 > 4(x-2)$$
$$x + 2 > 4x - 8$$
$$3x < 10$$
$$x < \frac{10}{3}$$

   Himmpunan Penyelesainnya = $\left\{x \middle| x < \frac{10}{3}, x \in R\right\}$
6. Tentukan himpunan penyelesaian $\log_3(\mathrm{x}+5) > 0$.
   Jawaban:

$$\log_3(x+5) > 0$$
$$\log_3(x+5) > \log_3 1$$
$$x + 5 > 1$$
$$x > -4$$

   Perhatikan pula bahwa numerusnya harus lebih dari nol. Berarti, $x + 5 > 0$. Didapat $x > -5$

   Jadi, himpunan penyelesaian $\log_3(x+5) > 0$ adalah HP = $\{x|x > -5\ atau\ x > -4, x \in R\}$

7. Tentukan himpunan penyelesaian $\log_3(x+5) > 0$.

Jawaban:

$$\log_3(x+5) > 0$$
$$\log_3(x+5) > \log_3 1$$
$$x+5 > 1$$
$$x > -4$$

Perhatikan pula bahwa numerusnya harus lebih dari nol. Berarti, $x+5 > 0$. Didapat $x > -5$.

Jadi, himpunan penyelesaian $\log_3(x+5) > 0$ adalah HP = $\{x | x > -5 \; atau \; x > -4, x \in R\}$.

REFRENSI

Irving M. Copi, 1978, *Intoduction to Logic Sixth Edition,* New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Putra, 2004, *Matematika SMA Kelas 1 Jilid 1B,* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

Yaya S. Kusuma, 1986, *Logika Matematika Elementer,* Bandung: Penerbit Tarsito.

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta:: Gramedia.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Vance, E. P. (1989). *Modern College Algebra.* London : Addison Wesley.

HALAMAN INDEKS

Biodata Penulis

Al Kusaeri, lahir, 02 Agustus 1980 di Desa Kembang Kerang Daya Kecamatan Aikmel Lombok Timur, menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SDN Bagek Manis Kembang Kerang Tahun 1993, kemudian dilanjutkan ke MTs NW Darul Kamal Kembang Kerang Daya dan selesai tahun 1996, menempuh pendidikan di MA NW Darul Kamal Kembang Kerang Daya dan selesai tahun 1999, setelah itu, dilanjutkan ke STAIN Mataram mengambil program Studi Tadris Matematika dan mendapat gelar S.Pd.I April 2004. Selepas itu, dipercayakan menjadi guru di MA Mu'allimat Syeh Zainudin Anjani 2004-2006, di MA dan MTs NW Darul Kamal Kembang Kerang Daya tahun 2004 – 2006. Tahun 2006 terangkat menjadi tenaga pengajar di IAIN Mataram dan melanjutkan S2 di Universitas Negeri Yogyakarta mengabil jurusan Pendidikan Matematika SD dan pada tahun 2014 melanjutkan studi S3 ke UNY dengan jurusan Pendidikan Matematika selsai tahun 2018. Saat ini aktif ngajar di UIN Mataram dan STAI Darul Kamal NW Kembang Kerang serta telah dikaruniai putri Fadhilah al-Husna dan Sofia Al-Hanifa hasil pernikahan dengan Fitri Puji Astri, M.Pd. Semoga bahan ajar Matematika Dasar ini menjadi awal untuk terus berkarya dan menghasilkan buku-buku menarik lainnya terkait dengan matematika dan pembeljarannya. Amin