TRIGONOMETRI

Judul	Trigonometri
Penulis	Fadrik Adi Fahrudin, M.Pd.
Editor	Dr. Abdul Quddus, MA
Layout	Sanabil Creative
Desain cover	Sanabil Creative

ISBN	978-623-7090-09-0
Cetakan 1	Desember 2018

Pusat Penelitian dan Publikasi Ilmiah
LP2M Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram
Jln. Pendidikan No. 35 Mataram,
Nusa Tenggara Barat 83125 Telp. 0370-621298
Fax: 625337 .625337

Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13
Puri Bunga Amanah Mataram
Telp. 0370-7505946/Mobile: 0878 5042 5281
Email: sanabilpublishing@gmail.com

KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku dengan judul ‘Trigonometri’ ini dengan lancar. Buku ini digunakan sebagai penunjang perkuliahan Trigonometri yang menjadi salah satu mata kuliah wajib di Program Studi Tadris Matematika.

Trigonometri adalah bagian dari ilmu matematika yang mempelajari hubungan antara sisi dan sudut suatu segitiga, serta fungsi dasar yang muncul dari relasi tersebut. Trigonometri merupakan nilai perbandingan yang didefinisikan pada koordinat kartesius atau segitiga siku-siku. Bagi para mahasiswa, trigonometri identik dengan fungsi yang meliputi sinus (sin), cosinus (cos), tangen (tan), cosecan (cosec), secan (sec), dan cotangen (cot) yang semuanya merupakan cara untuk menentukan suatu sisi sebuah segitiga atau sudut yang terbentuk dari dua buah sisi dalam sebuah segitiga.

Dalam menyelesaikan buku ini, penulis mendapatkan banyak dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, istri dan anakku yang tercinta, yang menjadi sumber inspirasi dan motivasi terbesar dalam hidup;
2. Segenap civitas akademika UIN Mataram, yang memberikan wadah dalam mengembangkan potensi diri;
3. Sahabat-sahabat seluruhnya yang memberikan banyak dukungan dalam kerja.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih terdapat kekurangan dan jauh dari sempurna. Oleh Karena itu, saran dan masukan dar berbagai pihak sangat diharapkan bagi perbaikan buku yang lebih baik lagi. Semoga buku ini dapat memberikan manfat bagi pembaca dan menambah pengetahuan tentang matematika pada umumnya dan materi Trigonometri pada khususnya. Amin.

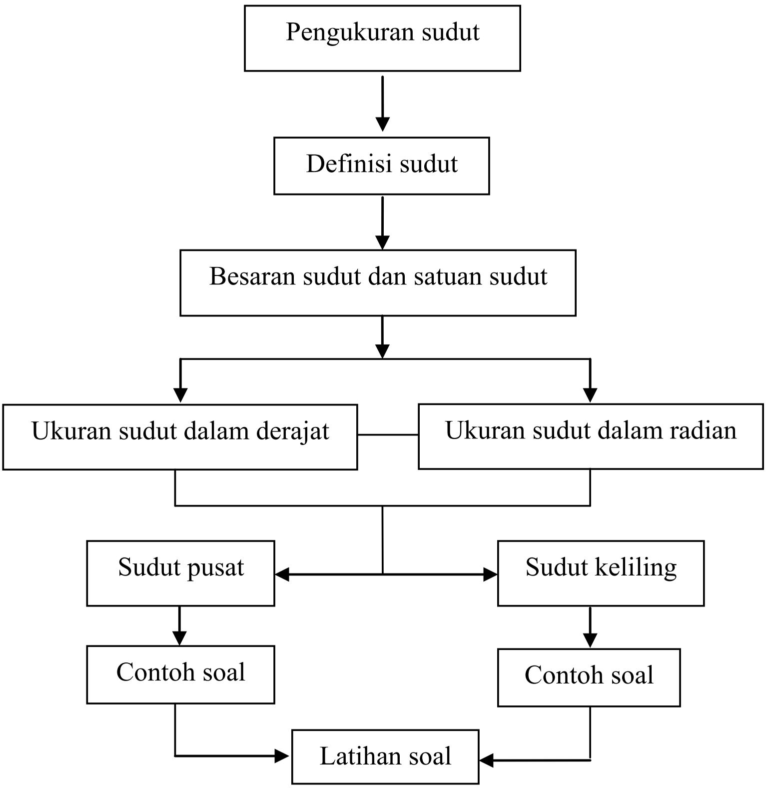
Mataram,   Desember 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1 PENGUKURAN SUDUT

PETA KONSEP



Gambar 1.1

A. Definisi sudut

B. Besaran dan satuan sudut

C. Ukuran sudut dalam derajat

D. Ukuran sudut dalam radian

E. Contoh soal

F. Latihan soal

Ilustrasi

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai benda-benda yang berputar secara beraturan. Salah satu contoh benda yang berputar tersebut adalah jarum detik, jarum menit dan jarum jam pada jam analog. Jarum detik selalu menempuh sudut 360^0 selama satu menit atau menempuh sudut 6^0 selama satu sekon. Jarum menit selalu menempuh sudut 360^0 selama satu jam atau menempuh sudut 6^0 selama satu menit. Jarum jam juga selalu menempuh sudut 360^0 selama satu hari.

Sekarang coba kalian perhatikan benda-benda putar di sekitar kalian, seperti: roda, gir, dan lain sebagainya. Apakah setiap benda putar tersebut memiliki sudut 360^0? Bagaimana kalian bisa memberikan alasannya? Jika kita teliti lebih dalam, maka perputaran benda-benda tersebut secara tidak langsung memberikan gambaran terhadap ukuran dalam sudut.

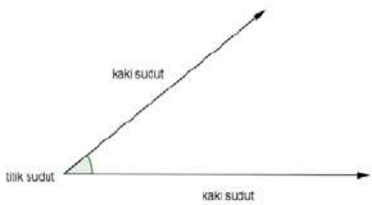
Materi

A. Definisi sudut

Sudut didefinisikan sebagai gabungan sinar yang bersekutu titik pangkalnya atau dengan kata lain titik persekutuan yang membentuk pangkal disebut sebagai sudut. Bagian-bagian dari sebuah sudut adalah[1]:

1. Kaki sudut, sinar garis yang membentuk suatu sudut
2. Titik sudut, titik potong pangkal sinar dari kaki sudut
3. Daerah sudut, daerah yang terbentuk antara dua kaki sudut

Dalam pemberian nama sudut, digunakan huruf kapital yang berada pada tengah-tengah sudut. Bisa juga dengan memberikan simbol-simbol baku dalam matematika, seperti: α (alfa), β (betha), dan γ (gamma). Perhatikan gambar berikut!



Gambar 1.2

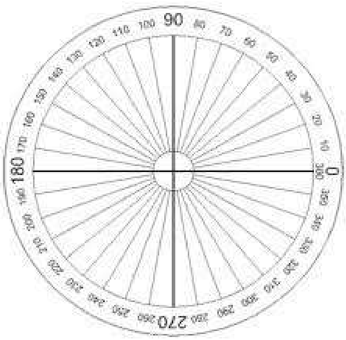
Pemberian nama pada sudut menggunakan tanda yang sudah baku atau sudah ditetapkan, misalkan ∠ABC "dibaca sudut ABC" atau bisa juga menggunakan simbol ∠α, ∠β, dan ∠γ.

B. Besaran sudut dan satuan sudut

Untuk mengukur daerah sudut maka digunakan satuan sudut. Dalam matematika lebih khususnya dalam pembahasan tentang trigonometri, satuan sudut yang digunakan adalah derajat dan radian.

[1] Wahyu S., Trigonometri, Malang, Cahaya Ilmu, 2012, h. 12

1. Derajat



Gambar 1.3

Derajat merupakan satuan besar sudut dengan menggunakan (^{0}) sebagai simbolnya. Satuan ini disebut juga satuan seksagensimal, yaitu satu lingkaran dibagi menjadi 360 bagian yang sama, dimana satu bagiannya disebut "1 derajat". Dengan demikian satu putaran penuh = 360 derajat. Simbol yang menyatakan derajat adalah "…^{0}". Jadi suatu sudut yang besarnya 360 derajat dapat ditulis 360^0.

1 putaran penuh = keliling lingkaran = 360^0

$\frac{1}{2}$putaran penuh = $\frac{1}{2}$keliling lingkaran = 180^0

$\frac{1}{3}$putaran penuh = $\frac{1}{3}$keliling lingkaran = 120^0

$\frac{1}{4}$putaran penuh = $\frac{1}{4}$keliling lingkaran = 90^0

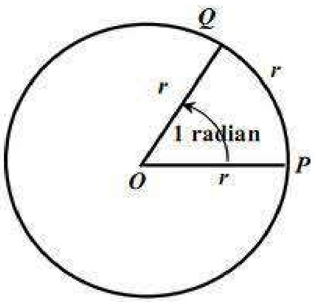
Selain itu terdapat ukuran yang lebih kecil dari derajat, yaitu: menit dan detik. Ukuran menit dinotasikan dengan ('), sedangkan detik dinotasikan dengan ("). Contoh:

1 derajat = 60 menit, ditulis 1^0 = 60'

1 menit = 60 detik, ditulis 1' = 60"

1 derajat = 3600 detik, ditulis 1^0 = 3600"

2. Radian



Gambar 1.4

Radian diartikan sebagai satuan sudut dalam suatu bidang dengan lambang “rad”. Satu radian atau 1 rad didefinisikan sebagai ukuran sudut dalam sebuah lingkaran yang diapit oleh dua jari-jari lingkaran dan panjang busur lingkaran yang sama dengan panjang jari-jari lingkaran tersebut[2].

Perhatikan gambar 1.4 di atas!

Jika panjang OP = OQ dan panjang PQ = r, maka besar sudut POQ disebut satu radian. Berdasarkan gambar tersebut diatas, maka

$$\frac{Panjang busur PQ}{Keliling lingkaran} = \frac{\angle POQ}{360^0}$$

$$\frac{r}{2\pi r} = \frac{1 rad}{360^0}$$

1 rad x 2 π x r = r x 360^0

$$1 \text{ rad} = \frac{r x 360^0}{2\pi r}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi}$$

Jika π diubah dengan pendekatan 3,14 maka diperoleh

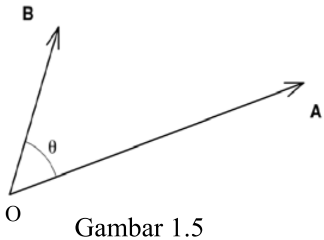
$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{3{,}14} \cong 57{,}288^0$$

[2] Fathurin Zen, Trigonometri, Bandung, Alfabeta, 2014, h. 41

C. Pengukuran sudut dalam derajat dan radian

1. Pengukuran sudut dalam derajat

Sebuah sudut terdiri atas dua buah garis dimana pangkalnya bertemu pada satu titik persekutuan yang disebut titik sudut. Perhatikan gambar 1.5 berikut! Sudut yang terbentuk dapat diberi nama, yaitu:



Gambar 1.5

1. Sudut AOB
2. Sudut O
3. Sudut tetha (θ)

Ukuran sudut yang sering digunakan adalah derajat. Satu derajat (1^0) didefinisikan sebagai besar sudut dalam sebuah lingkaran yang disapu oleh jari-jari lingkaran sejauh $\frac{1}{360}$ putaran, dinotasikan sebagai:

$$1^0 = \frac{1}{360}\text{putaran}$$

Setiap ukuran sudut dapat diubah ke dalam bentuk desimal atau ke dalam bentuk menit (dinotasikan dengan ‘) dan detik (dinotasikan dengan “). 1 menit didefinisikan sebagai $\frac{1}{60}$derajat, 1 detik didefinisikan sebagai $\frac{1}{60}$ menit dan 1 derajat didefinisikan sebagai$\frac{1}{3600}$, sehingga persamaanya menjadi[3]:

[3] Ibid, h. 39

1 derajat = 60 menit

1 menit = $\frac{1}{60}$ derajat

1 menit = 60 detik

1 detik = $\frac{1}{60}$ menit

Contoh Soal

1. Nyatakan ukuran sudut dibawah ini kedalam bentuk desimal!

   a) $36^0\ 4'$ b) $44^0\ 24'\ 15''$

   Jawab

   a) $36^0\ 4' = 36^0 + 4'$

   $= 36^0 + (4 \times \frac{1}{60})^0$

   $= 36 + (0{,}06)^0$

   $= 36{,}06^0$

   b) $44^0 24' 15'' = 44^0 + 24' + 15''$

   $= 44^0 + (24 + \left[15\ \times \frac{1}{60}\right])'$

   $= 44^0 + (24{,}25)'$

   $= \left(44 + \frac{24{,}25}{60}\right)^0$

   $= 44{,}404^0$

2. Nyatakan ukuran sudut di bawah ini kedalam derajat-menit-detik!

   a) $27,1425^0$

   b) $57,0573^0$

Jawab

a) $27,1426^0$ $= 27^0(0,1426 \times 60)'$

$= 27^0 8,556'$

$= 27^0 8' 33,36''$

b) $57,0573^0$ $= 57^0(0,0573 \times 60)'$

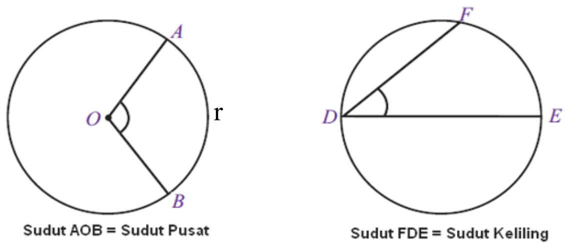
$= 57^0 3,438'$

$= 27^0 3' (0,438 \times 60)''$

$= 27^0 3' 26,28''$

2. Ukuran sudut dalam radian

Selain derajat, ukuran sudut yang lazim digunakan adalah radian (disingkat rad), dimana 1 rad didefinisikan sebagai ukuran sudut dalam sebuah lingkaran yang diapit oleh dua jari-jari dan panjang busur lingkaran yang sama dengan panjang jari-jari tersebut[4]. Perhatikan gambar 1.6 di bawah ini.



Gambar 1.6

Pada gambar di atas busur AB = r

Hubungan radian dengan derajat dapat kita tentukan dengan memperhatikan perbandingan busur lingkaran pada gambar diatas.

[4] Fathurin Zen, *Trigonometri*, Alfabeta, Bandung, 2014, h. 41

$$\frac{\text{panjang busur AB}}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\angle \text{AOB}}{\text{sudut satu putaran}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r}{2\pi} = \frac{1 \text{ rad}}{360^0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \text{ rad} \times 2\pi r = r \times 360^0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \text{ rad} = \frac{r.360^0}{2\pi r}$$

Sehingga diperoleh hubungan :

$$1 \text{ rad} = \frac{180^0}{\pi} \text{ atau } \pi \text{ rad} = 180^0 \text{ atau } 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Jika nilai π diubah kedalam bilangan pendekatan 3,142 maka hubungan di atas ditulis:

$$1 \text{ rad} \cong \frac{180^0}{\pi} \cong 57{,}288^0 \text{ atau } 1^0 \cong \frac{3{,}142}{180} \text{ rad} \cong 0{,}0175 \text{ rad.}$$

Contoh Soal

1. Ubahlah ukuran sudut berikut kedalam ukuran radian!
   a) 30^0
   b) 150^0
   c) 100^0
   d) $30{,}15^0$
   e) $55^0 25'$
   f) $40^0 35' 40''$

   Jawab

   a) $30^0 = 30 \times 1^0 = 30 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

b) $150^0 = 150 \times 1^0 = 150 \times \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{5\pi}{6}$ rad

c) $100^0 = 100 \times 1^0 = 100 \times \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{5\pi}{9}$ rad

d) $30,15^0 = 30{,}15 \times 1^0 \cong 30{,}15 \times 0{,}0175$ r $\cong 0{,}527625$ rad

e) $55^0 25' = 55^0 + \left(0{,}25 \times \frac{1}{60}\right)^0$

$= (55 + 0{,}041\bar{6}) \times 1^0$

$\cong 0{,}969791$ rad

f) $40^0 35' 40'' = 40^0 = \left(\frac{35 \times 60 + 40}{3600}\right)^0$

$= 40{,}594 \cong 40{,}594 \times 0{,}0175$ rad

$\cong 0{,}710396$ rad

2. Ubahlah ukuran sudut berikut kedalam ukuran derajat!

a) $\frac{\pi}{4}$ rad

b) $\frac{2\pi}{3}$ rad

c) $\frac{2\pi}{6}$ rad

d) $\frac{6\pi}{7}$ rad

e) $\frac{11\pi}{12}$ rad

f) $\frac{12\pi}{5}$ rad

Jawab

a) $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{\pi}{4} \times 1$rad $= \frac{\pi}{4} \times \frac{180^0}{\pi} = 45^0$

b) $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2\pi}{3} \times 1$ rad $= \frac{2\pi}{3} \times \frac{180^0}{\pi} = 120^0$

c) $\frac{2\pi}{6}$ rad $= \frac{2\pi}{6} \times 1\text{rad} = \frac{2\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 60^0$

d) $\frac{6\pi}{7}$ rad $= \frac{6\pi}{7} \times 1\text{rad} = \frac{6\pi}{7} \times \frac{180}{\pi} = 154{,}285^0$

e) $\frac{11\pi}{12}$ rad $= \frac{11\pi}{12} \times 1\text{ rad} = \frac{11\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 165^0$

f) $\frac{12\pi}{5}$ rad $= \frac{12\pi}{5} \times 1\text{ rad} = \frac{12\pi}{5} \times \frac{180^0}{\pi} = 435^0$

Latihan Soal

1. Nyatakan ukuran sudut berikut kedalam bentuk desimal!
   a) $15^0 12'$
   b) $32^0 12' 56''$
   c) $56^0 11' 24''$
   d) $360^0 45'$
   e) $365^0 73' 23''$
2. Nyatakan ukuran sudut berikut kedalam bentuk derajat-menit-detik!
   a) $35{,}057^0$
   b) $57{,}0012^0$
   c) $315{,}256^0$
   d) $97{,}12^0$
   e) $357{,}076^0$
3. Nyatakan sudut berikut ke dalam bentuk derajat!
   a) 5 radian
   b) $\frac{10}{3}$ radian

c) $\frac{3}{4}$ radian

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ radian

e) $\left(\frac{2x}{5}\right)$ radian

4. Nyatakan ukuran sudut ini kedalam bentuk radian!

a) 60^0

b) $60^0 45'$

c) 120^0

d) $120^0 60' 45''$

e) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 45' 60''$

5. Sederhanakan bentuk berikut ini!

a) $\sin(\pi + \alpha)$

b) $\cos(\pi - \alpha)$

c) $\tan(2\pi + \alpha)$

d) $\sec(2\pi - \alpha)$

e) $\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

h) $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

i) $\tan\left(\frac{7\pi}{3} + \alpha\right)$

6. Hitunglah nilai dari fungsi trigonometri berikut!

   a) $\sin\frac{\pi}{2}$

   b) $\cos\frac{2\pi}{4}$

   c) $\tan\frac{5\pi}{3}$

   d) $\cot\frac{7\pi}{4}$

   e) $\csc\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

   f) $\sec\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

   g) $\sin\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{7}$

   h) $\sec\frac{2\pi}{3}\{\tan\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{4}\}$

   i) $\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{3\pi}{4}} + \frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{1+\sin\frac{7\pi}{6}}$

   j) $\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\ \pi}{\tan\frac{\pi}{3}+\cot\frac{4\pi}{3}}$

7. Sebuah roda berputar dengan laju sudut 36 putaran per menit. Nyatakan laju sudut putaran roda itu dalam ukuran!

   a) putaran perdetik

   b) radian perdetik

   c) derajat perdetik

   d) radian permenit

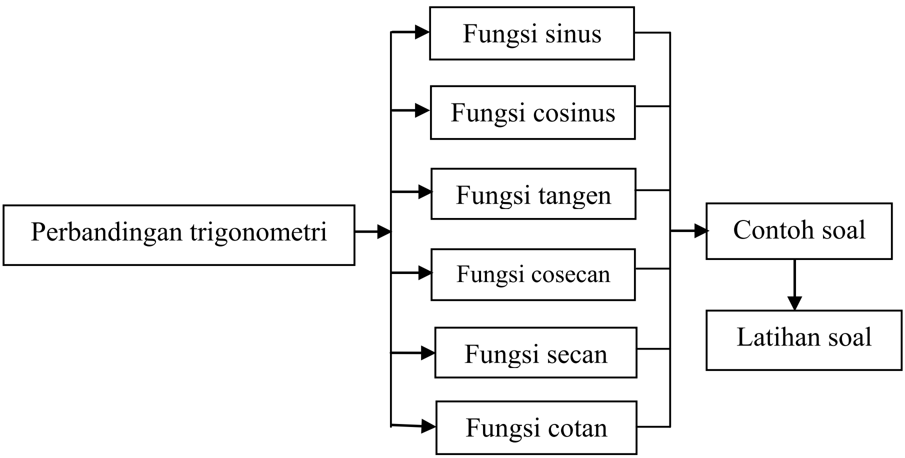
   e) derajat permenit

8. Tentukan besaran sudut (dalam ukuran derajat) yang dibentuk oleh jarum panjang dan jarum pendek dalam sebuah arloji ketika menunjukkan pukul:
   a) 12:15
   b) 08:45
   c) 10:30
   d) 03:30
   e) 11:40
9. Sebuah lingkaran memiliki diameter 14 cm dengan sudut pusat $\frac{4}{7}\pi$ radian. Hitunglah panjang busur yang membatasi sudut pusat tersebut!
10. Busur DE pada sebuah lingkaran membatasi sudut pusat sebesar 5 radian. Tunjukkan bahwa perbandingan keliling lingkaran dengan panjang busur DE adalah $\pi : 3$!

BAB 2

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

PETA KONSEP



1. Fungsi sinus
2. Fungsi cosinus
3. Fungsi tangen
4. Fungsi cosecan
5. Fungsi secan
6. Fungsi cotangen

Ilustrasi

Pernahkah kalian melihat atap rumah kalian masing-masing? Jika belum pernah, sekarang coba perhatikan baik-baik atap rumah kalian dari segi bentuk, luas dan sebagainya. Dapatkah kalian menyebutkan, kira-kira bentuk atap rumah kalian menyerupai bangun apa?

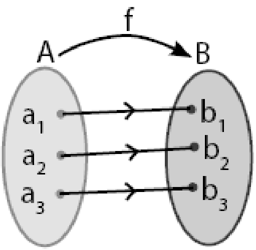
Sebagian rumah mungkin atapnya ada yang berbentuk segi tiga, prisma ataupun limas, tergantung dari bentuk yang diinginkan si pemiliknya. Model atap rumah bagi sebagian orang mungkin merupakan salah satu hal terpenting dalam membangun sebuah rumah yang nyaman.

Nah sekarang kamu teliti baik-baik, di setiap segitiga terdapat sudut dan sisi dimana pada sudut dan sisi tersebut dapat terjadi beberapa hal baru dalam matematika terutama dalam pembahasan kali ini, yakni tentang perbandingan trigonometri.

Materi

A. Fungsi sinus dan cosinus

Fungsi didefinisikan sebagai relasi khusus yang memetakan setiap anggota dari himpunan A tepat satu ke anggota himpunan B[5]. Anggota himpunan A disebut sebagai daerah asal (domain) dan anggota himpunan B disebut sebagai daerah kawan (kodomain). Jika kedua himpunan tersebut dihubungkan, maka hasil pemetaan disebut daerah hasil (range).

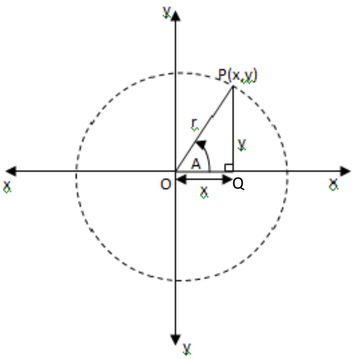


Gambar 2.2

Perhatikan gambar 2.2 di samping! (a_1), (a_2), dan (a_3) merupakan domain (daerah asal), sedangkan (b_1), (b_2), dan (b_3) merupakan kodomain (daerah kawan) yang sekaligus menjadi range (daerah hasil). f menyatakan suatu fungsi yang berlaku dari himpunan A ke himpunan B. f disebut fungsi karena memetakan setiap anggota himpunan A ke tepat satu ke anggota himpunan B.

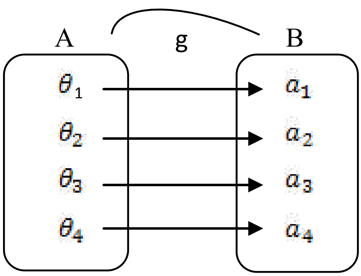
Sekarang perhatikan gambar 2.3 berikut! Jika titik P berada pada koordinat (2,3) dan titik Q (2,0). Maka $\overline{OQ}$ = 2 satuan panjang, $\overline{PQ}$ = 3 satuan panjang. Maka $\overline{OP} = r = \sqrt{13}$ (ingat kembali teorema pythagoras).

[5] S. Wirodikromo, *Matematika SMA X*, Erlangga, Bandung, 2004, h. 58



Gambar 2.3

Untuk sudut $\angle POQ = A$, maka akan timbul nilai perbandingan $\frac{\text{komponen} \quad y}{\text{komponen} \quad r}$ pada ΔPOQ dengan perbandingan nilai sisi $\frac{3}{\sqrt{13}}$. Begitu juga dengan nilai perbandingan $\frac{\text{komponen} \quad x}{\text{komponen} \quad r}$ pada segitiga tersebut menghasilkan $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Selanjutnya kita notasikan $\angle A$ dengan θ, maka secara sederhana untuk nilai sudut θ yang sama akan menghasilkan nilai perbandingan $\frac{y}{r}$ dan $\frac{x}{r}$ yang sama pula. Sebaliknya jika nilai sudut θ berbeda, maka nilai perbandingan $\frac{y}{r}$ dan $\frac{x}{r}$ juga akan berbeda[6]. Misalkan untuk sudut θ_1 nilai perbandingan $\frac{y}{r}$ adalah a_1, θ_2 nilai perbandingan $\frac{y}{r}$ adalah a_2 dan seterusnya, seperti dinyatakan dalam diagram panah berikut.

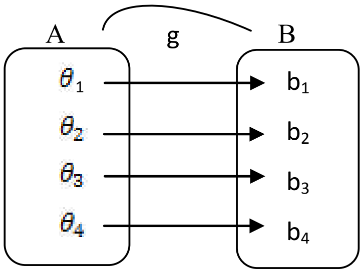


Gambar 2.4

---

[6] Ibid, h. 65

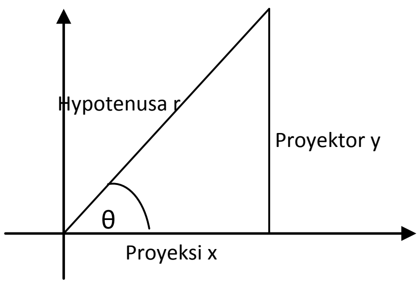
Sedangkan untuk sudut θ_1 nilai perbandingannya $\frac{x}{r}$ adalah b_1, θ_2 dengan nilai perbandingan $\frac{x}{r}$ adalah b_2, θ_3 nilai perbandingan $\frac{x}{r}$ adalah b_3, dan seterusnya, seperti dinyatakan dalam diagram panah sebagai berikut.



Gambar 2.5

Dari dua diagram diatas tampak bahwa suatu fungsi f dan g memetakan θ ke, dan θ ke b. Fungsi f yang menyatakan nilai perbandingan $\frac{y}{r}$ disebut sebagai fungsi sinus (disingkat sin) atau ditulis $\sin\theta = \frac{y}{r}$, dan fungsi g menyatakan nilai perbandingan $\frac{x}{r}$ disebut sebagai fungsi cosinus (disingkat cos) atau ditulis $\cos\theta = \frac{x}{r}$.

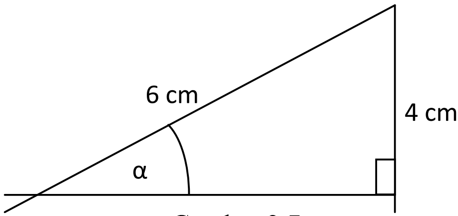
Selanjutnya perhatikan gambar berikut!



Gambar 2.6

Terdapat dalam segitiga siku-siku, jika r = sisi miringnya (proyektum, hipotenusa), x = sisi alas (proyeksi), dan y = sisi tegaknya (proyektor), dan θ sebagai sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut, yakni sisi alas dan sisi miring.

1. Tentukan nilai perbandingan $\sin\alpha$ dan $\cos\alpha$ pada segitiga di bawah!



Gambar 2.7

Jawab

Karena sisi proyeksi x belum diketahui maka kita cari sisi pada sumbu x terlebih dahulu dengan menggunakan teorema pythagoras.

proyeksi $x = \sqrt{r^2 - y^2}$

$x = \sqrt{6^2 - 4^2}$

$x = \sqrt{36 - 16}$

$x = \sqrt{22}$

Maka perbandingan $\sin\alpha$ dan $\cos\alpha$ adalah sebagai berikut:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$= \frac{4}{6}$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{22}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{22}}{6} \times \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{22}}$$

$$= \frac{22}{6\sqrt{22}}$$

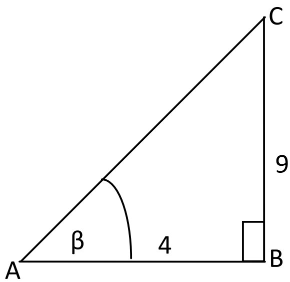
$$= \frac{11}{3\sqrt{22}}$$

Jadi nilai dari perbandingan dari $\sin\alpha$ dan $\cos\alpha$ adalah $\frac{2}{3}$ dan $\frac{11}{3\sqrt{22}}$

2. Jika dalam segitiga siku-siku dengan sudut β adalah 60^0 dan dikutahui pula sisi tegak adalah 9 cm maka tentukan sisi miring dan sisi alasnya!

   Jawab.

   Perhatikan gambar ΔABC berikut!



Gambar 2.8

Karena sudah diketahui sudut dan sisi tegaknya maka dengan perbandingan trigonometri akan diperoleh hasil:

$$\sin\beta = \frac{y}{r}$$

$$\sin 60^0 = \frac{9}{r}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{9}{r}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}.r = 9$$

$$r = \frac{9}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$r = 9 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$r = 6\sqrt{3}$$

Karena sisi miring sudah diketahui maka dengan menggunakan teorema pythagoras akan memperoleh

$$\overline{AB} = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{(6.\sqrt{3})^2 - 9^2}$$

$$= \sqrt{108 - 81}$$

$$= \sqrt{27}$$

$$\overline{AB} = 3\sqrt{3}$$

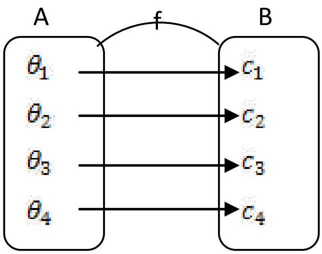
Jadi panjang sisi alas dan sisi miring pada ΔABC adalah $6\sqrt{3}$ dan $3\sqrt{3}$

B. Fungsi tangen

Jika perbandingan $\frac{y}{r}$ dan $\frac{x}{r}$ ditentukan oleh nilai θ (dalam gambar 2.3), maka perbandingan $\frac{y}{x}$ juga ditentukan oleh nilai θ. Jika untuk nilai θ berbeda maka nilai perbandingan $\frac{y}{x}$ pun akan berbeda[7]. Misalkan θ_1 dengan

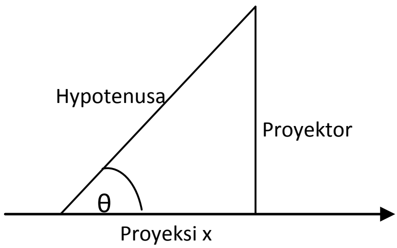
[7] Ibid, h. 67

nilai perbandingan $\frac{y}{x}$ adalah c_1, nilai θ_2 dengan nilai perbandingan $\frac{y}{x}$ adalah c_2, nilai θ_3 dengan nilai perbandingan $\frac{y}{x}$ adalah c_3, dan seterusnya. Maka kita dapat melihat relasi fungsi dengan penyajian diagram panah sebagai berikut.



Gambar 2.9

Dapat dilihat dari diagram panah diatas, terlihat bahwa fungsi f θ ke c. Hal ini memberikan gambaran nilai bahwa fungsi f menyatakan nilai perrbandingan $\frac{y}{x}$ untuk θ disebut dengan nilai perbandingan fungsi tangen (disingkat "tan") atau dapat ditulis $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 2.10

Dalam segitiga siku-siku, jika r = sisi miring (hipotenusa), x = sisi alas (proyeksi), dan y = sisi tegak (proyektor). Dan θ sebagai pangkal pertemuan antara sisi-sisi terebut yang disebut dengan sudut θ atau ditulis ∠θ maka dapat didefinisikan bahwa tangen adalah :

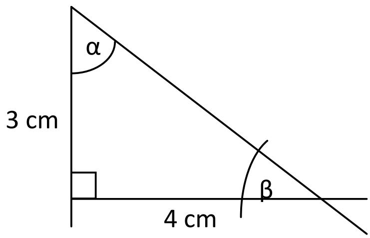
$$\text{tangen} = \frac{\text{panjang sisi tegak (y)}}{\text{panjang sisi alas (x)}}$$

Definisi diatas dapat di tulis dalam bentuk fungsi sebagai berikut.

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Contoh Soal

Tentukan nilai perbandingan antara $\tan\beta$, $\tan\alpha$ dan $\sin\alpha$ pada segitiga berikut.



Gambar 2.11

Jawab.

Jika panjang sisi tegak dan sisi alas sudah diketahui maka kita mulai dengan mencari berapa nilai sisi miringnya dengan menggunakan teorema pythagoras.

$$\begin{aligned} \text{panjang sisi miring} &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

$$= 5$$

Jadi panjang sisi miringnya adalah 5 cm.

Karena semua panjang sisi-sisi sudah lengkap oleh karena itu kita akan mencari nilai perbandingan tan α dan tan β sebagai berikut.

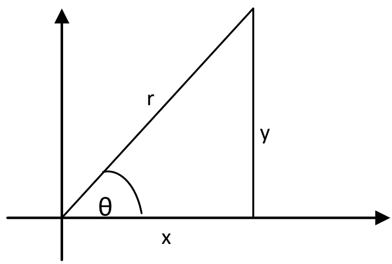
$\tan\alpha = \frac{4}{3}$ cm

$\tan\beta = \frac{3}{4}$ cm

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ cm

C. Fungsi trigonometri lainnya

Selain fungsi sin, cos dan tangen, kita juga mengenal fungsi lainnya, yaitu: fungsi secan (sec), fungsi cosecant (csc), dan fungsi cotangen (cot). Ketiga fungsi ini didefinisikan sebagai kebalikan dari perbandingan fungsi sinus ($\sin\theta$), cosinus ($\cos\theta$), tangen ($\tan\theta$). Perhatikan gambar 2.12 berikut.



Gambar 2.12

fungsi-fungsi tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}$$

Dari beberapa definisi di atas jika kita menghubungkan dengan fungsi awal maka kita mendapatkan beberapa rumus baru yang dimana kita sebut rumus ini dengan 'rumus kebalikan' yaitu sebagai berikut.

a) $\sin\theta = \frac{1}{\csc\,\theta}$

b) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\,\theta}$

c) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\,\theta}$

d) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\,\theta}$

e) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\,\theta}$

f) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\,\theta}$

Adapun jika dilihat dari rumus kebalikan diatas kita dapat menghubungkan sebagai berikut.

a) $\sin\theta.\csc\theta = 1$

b) $\cos\theta.\sec\theta = 1$

c) $\tan\theta.\cot\theta = 1$

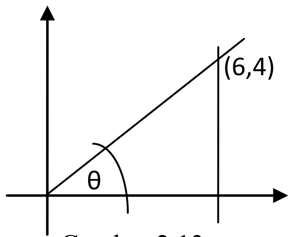
Sedangkan untuk perbandingan antar sudut kita memperoleh rumus perbandingan sebagai berikut.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Contoh Soal

1. Pandanglah dengan seksama gambar dibawah ini:



Gambar 2.13

Dari gambar diatas carilah nilai perbandingan dari enam fungsi trigonometri untuk sudut θ dimana sisi-sisinya didapatkan dari titik (6,4).

Jawab

Dari gambar tersebut sudah dipaparkan nilai sisi-sisi melalui titik (6,4) dengan titik tersebut merupakan titik (x,y) maka kita mendapatkan nilai $x = 6$ dan $y = 4$ dan karena permasalahannya sekarang berada pada garis miringnya maka kita cari terlebih dahulu nilai dari garis miringnya dengan menggunakan teorema pythagoras.

$$r = \sqrt{6^2 + 4^2}$$

$$r = \sqrt{36 + 16}$$

$$r = \sqrt{52}$$

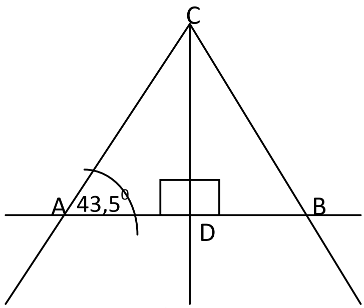
Karena kita sudah mendapatkan nilai dari sisi miring (r) maka nilai perbandingan dari keenam fungsi trigonometri adalah sebagai berikut:

$\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{52}}$ $\qquad \cos\theta = \frac{6}{\sqrt{52}}$ $\qquad \tan\theta = \frac{4}{6}$

$\sin\theta = \frac{1\sqrt{52}}{13}$ $\qquad \cos\theta = \frac{3\sqrt{52}}{26}$ $\qquad \tan\theta = \frac{2}{6}$

$\csc\theta = \frac{13}{\sqrt{52}}$ $\qquad \sec\theta = \frac{26}{13\sqrt{52}}$ $\qquad \cot\theta = 3$

2. Diketahui dalam ΔABC sama kaki dengan alas 580 cm dan $\angle A = 43,5^0$, seperti pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.14

Jawab :

Karena AD = DC, maka AD $= \frac{1}{2}$x $580 = 290$ cm

Maka dapat kita menuliskan persamaan:

a) $\cos 43{,}5^0 = \frac{290}{AB}$ dan

b) $\sec 43{,}5^0 = \frac{AB}{290}$

Dari persamaan (a) didapat $AB \cos 43{,}5^0 = 290$, sehingga:

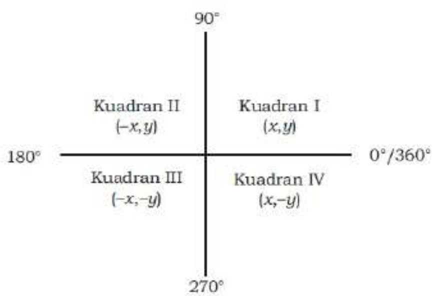
$$AB = \frac{290}{\cos 43{,}5^0} = \frac{290}{0{,}725} = 400 \text{ cm}$$

Sedangkan dari persamaan (b) diperoleh:

$AB = 290 \csc 43{,}5^0 = (290)(1{,}379) = 400$

D. Nilai fungsi trigonometri di berbagai kuadran

Di dalam suatu lingkaran yang menyangkut tentang trigonometri mempunyai beberapa bagian yang dinamakan daerah kuadran. Dimana semua fungsi trigonometri dalam kuadran pertama (I) sudah kita bahas sedangkan untuk kuadran ke (II), (II), dan (IV). Akan dibahas dengan jelas pada pemaparan di bawah ini. Namun untuk lebih memahaminya mari kita lihat gambar berikut.



Gambar 2.15

Dengan melihat gambar diatas kita mendapatkan tanda fungsi di berbagai kuadran sebagai berikut. Jika β^0 di kuadran I atau x positif dan y positif (gambar 2.15) maka nilainya adalah sebagai berikut.

a) $\sin \beta^0 = \frac{y}{r}$ positif

b) $\cos \beta^0 = \frac{x}{r}$ positif

c) $\tan \beta^0 = \frac{y}{x}$ positif

d) $\csc \beta^0 = \frac{r}{y}$ positif

e) $\sec \beta^0 = \frac{r}{x}$ postif

f) $\tan \beta^0 = \frac{x}{y}$ positif

Jika β^0 berada di kuadran II atau x negatif dan y positif dalam gambar 2.15 maka :

a) $\sin \beta^0 = \frac{y}{r}$ positif

b) $\cos \beta^0 = -\frac{x}{r}$ negatif

c) $\tan \beta^0 = -\frac{y}{x}$ negatif

d) $\csc \beta^0 = \frac{r}{y}$ positif

e) $\sec \beta^0 = -\frac{r}{x}$ negatif

f) $\cot \beta^0 = -\frac{x}{y}$ negatif

Jika β^0 berada di kuadran ke III atau x negatif dan y negatif, dalam gambar 2.15 maka :

a) $\sin \beta^0 = -\frac{y}{r}$ negatif

b) $\cos \beta^0 = -\frac{x}{r}$ negatif

c) $\tan \beta^0 = \frac{y}{x}$ positif

d) $\csc \beta^0 = -\frac{r}{y}$ negatif

e) $\sec \beta^0 = -\frac{r}{x}$ negatif

f) $\cot \beta^0 = \frac{x}{y}$ positif

Jika β^0 berada di kuadran ke IV dimana x positif dan y negatif pada gambar 2.15 maka :

a) $\sin \beta^0 = -\frac{y}{r}$ negatif

b) $\cos \beta^0 = \frac{x}{r}$ positif

c) $\tan \beta^0 = -\frac{y}{x}$ negatif

d) $\csc \beta^0 = -\frac{r}{y}$ negatif

e) $\sec \beta^0 = \frac{r}{x}$ positif

f) $\cot \beta^0 = -\frac{x}{y}$ negatif

Dengan pemaparan pembahasan diatas maka dapat ditarik kesimpulan dalam tabel berikut tentang fungsi trigonometri di berbagai kuadran:

Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tan	+	–	+	–
csc	+	+	–	–
sec	+	–	–	+
cot	+	–	+	–

Contoh Soal

Carilah nilai enam fungsi trigonometri untuk sudut θ yang sisi miringnya melalui titik P dengan koordinat:

a) (-12,5)

b) (-8,-6)

c) (4,-3)

Jawab

a) Dengan menggunakan teorema pythagoras maka panjang OP = r = 13, sehingga:

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = -\frac{12}{13}$$

$$\tan\theta = -\frac{5}{12}$$

$$\csc\theta = \frac{13}{5}$$

$$\sec\theta = -\frac{13}{12}$$

$$\cot\theta = -\frac{12}{5}$$

b) Dengan mengguanakan teorema yang sama maka panjang OP = r = 10, sehingga:

$$\sin\theta = -\frac{6}{10}$$

$\cos\theta = -\frac{8}{10}$

$\tan\theta = \frac{6}{8}$

$\csc\theta = -\frac{10}{6}$

$\sec\theta = -\frac{10}{8}$

$\cot\theta = \frac{8}{6}$

c) Dengan menggunakan teorema yang sama pula maka panjang OP= r = 5, sehingga:

$\sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\csc\theta = -\frac{5}{3}$

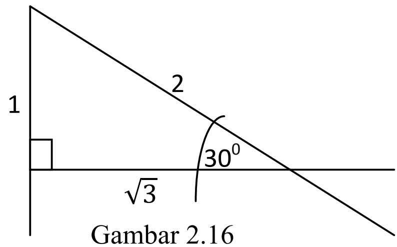
$\sec\theta = \frac{5}{4}$

$\cot\theta = -\frac{4}{3}$

E. Nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

Untuk sudut-sudut istimewa yang berada dalam fungsi trigonometri yakni 30^0, 45^0, 60^0, dan 90^0. Untuk dapat mencari nilai-nilai dari sudut-sudut istimewa tersebut maka kita akan mengingat kembali tentang pembahasan sebelumnya. Perhatikan gambar 2.16 berikut.

a) Sudut istimewa 30^0



Gambar 2.16

Maka dengan menggunakan perbandingan trigonometri kita akan memperoleh nilai dari sudut istimewa 30^0 sebagai berikut.

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

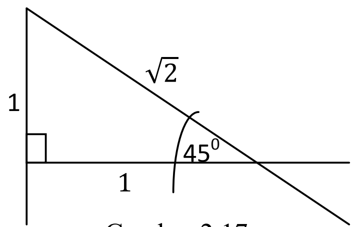
$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\csc 30^0 = 2$

$\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cot 30^0 = \sqrt{3}$

b) Sudut istimewa 45^0



Gambar 2.17

Dengan menggunakan perbandingan trigonometri maka akan mendapatkan nilai sudut istimewa 45^0 sebagai berikut.

$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

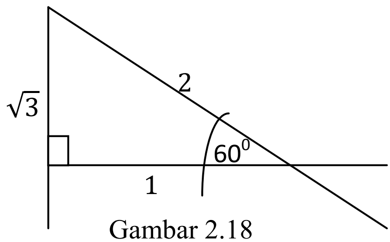
$\tan 45^0 = 1$

$\csc 45^0 = \sqrt{2}$

$\sec 45^0 = \sqrt{2}$

$\cot 45^0 = 1$

c) Sudut istimewa 60^0



Gambar 2.18

$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\csc 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec 60^0 = 2$

$\cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) Sudut istimewa 90^0

Untuk sudut 0^0 dan 90^0 kita dapat mnemukan nilainya dengan menggunakan definisi perbandingan trigonometri. Dimana untuk sudut 0^0 berarti r berimpit dengan X atau r = x sedangkan y = 0, maka :

$\sin 0^0 = 0$

$\cos 0^0 = 1$

$\tan 0^0 = 0$

$\csc 0^0 = \sim$

$\sec 0^0 = 1$

$\cot 0^0 = \sim$

Untuk sudut 90^0 berarti r berimpit dengan sumbu Y atau r = y, sedangkan x = 0, maka :

$\sin 90^0 = 1$

$\cos 90^0 = 0$

$\tan 90^0 = \sim$

$\csc 90^0 = 1$

$\sec 90^0 = \sim$

$\cot 90^0 = 0$

Nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut istimewa 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0. Dapat dilihat pada tabel berikut ini:

θ^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin \theta^0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

$\cos\theta^0$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta^0$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	~
$\csc\theta^0$	~	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta^0$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	~
$\cot\theta^0$	~	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Keterangan :

Tanda '~' dibaca tak terdefinisi

Ada beberapa cara untuk bisa mengingat nilai beberapa sudut istimewa ini adalah sebagai berikut.

(i) Perhatikan nilai fungsi $\sin\theta^0$ dan $\cos\theta^0$ untuk 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0. Perhatikan tabel :

θ^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\theta^0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\theta^0$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(ii) Untuk menentukan nilai empat fungsi trigonometri lainnya ($\tan\theta^0, \csc\theta^0, \sec\ \theta^0$, dan $\cot\theta^0$) gunakan rumus perbandingan trigonometri.

Contoh Soal

1. Hitunglah :

   a) $\sin 60^0 + \cos 30\ ^0$

   b) $\cos 30^0 . \sin 45^0 + \cos 90^0 . \tan 45^0$

   c) $\frac{\sec\ 45^0 + \sec\ 30^0}{\tan\ 60^0}$

   Jawab

   a) $\sin 60^0 + \cos 30^0$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{6}$

   b) $\cos 30^0 . \sin 45^0 + \cos 90^0 . \tan 45^0$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{3}. \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0.1$

   $= \frac{1}{4}\sqrt{6} + 0$

   $= \frac{1}{4}\sqrt{6}$

   c) $\frac{\sec\ 45^0 + \sec\ 30^0}{\tan\ 60^0}$

   $= \frac{\sqrt{2} + {}^2/_{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$

   $= \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

   $= \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) . \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}$$

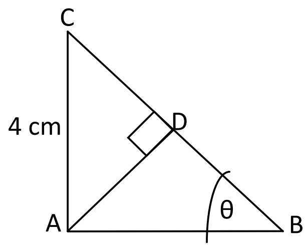
$$= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{15\sqrt{15}}{9}$$

$$= \frac{5\sqrt{15}}{3}$$

2. Tunjukkan panjang AD dari ΔABC berikut ini :



Gambar 2.19

dengan sudut $\theta = 30^0$

Jawab :

$\sin 30^0 = \frac{AC}{BC} \leftrightarrow \sin 30^0 = \frac{4}{AB}$

$\frac{1}{2} = \frac{4}{BC} \leftrightarrow BC = 8$

Sekarang perhatikan $\angle ACD = 60^0$

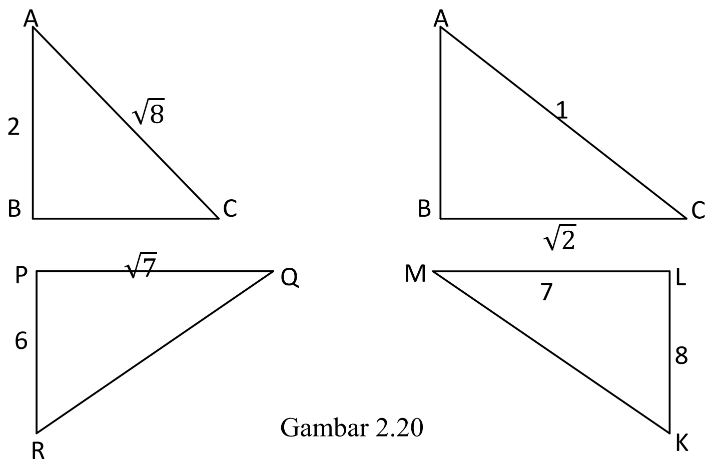
Maka $\sin 60^0 = \frac{AD}{AC}$

$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{x}{4}$

$x = 2\sqrt{3}$

Latihan Soal

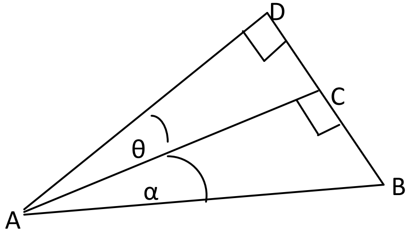
1. Tentukan nilai perbandingan sinus dan cosinus sudut lancip dari segitiga berikut.



Gambar 2.20

2. Diketahui ΔABC siku-siku di C. Panjang sisi tegaknya 5 cm dan $\sin \angle BAC = 0{,}5$ tentukan :
   a) panjang kedua sisi lainnya
   b) $\cos\ \angle BAC$
   c) $\sin \angle ABC$
   d) $\cos \angle ABC$

3. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.21

Diketahui ΔABC diatas adalah segitiga sebarang dimana ΔABD dengan siku-siku di D dan ΔADC dengan siku-siku di C dan panjang garis AD = 9 cm, panjang DB = 3 cm. Tentukan :

a) $\sin\alpha$

b) $\sin\theta$

c) panjang CD

d) panjang AC

e) panjang AB

f) $\cos\alpha$

g) $\cos\theta$

4. Misalkan γ adalah sudut segitiga pada bidang ΔKLM dengan alas sejajar dengan sumbu x dan sisi tegak sejajar dengan sumbu y. dengan menggunakan lampiran tabel pada buku ini. Hitunglah nilai $\sin\gamma$ dan $\cos\gamma$ untuk koordinat titik-titik di bawah ini :

a) (4,6)

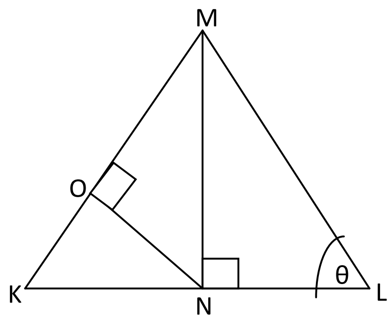
b) (3,4)

c) (4,8)

d) (6,8)

e) (9,9)

5. Diketahui ΔPQR dengan siku-siku di Q. panjang sisi tegaknya 14 cm dan $\angle RPQ = 60^0$ tentukan :
   a) kedua sisi lainya
   b) $\sin \angle RPQ$
   c) $\cos \angle RPQ$
   d) $\tan \angle RPQ$
   e) $\csc \angle RPQ$
   f) $\sec \angle RPQ$
6. Perhatikan gambar :



Gambar 2.24

Jika diketahui ΔKLM sama kaki dengan panjang garis LM = 12 dan panjang garis KL = 10. MO = 8 sedangkan NO ⊥ OK tentukan panjang

a) panjang OK

b) panjang NO

c) $\sin \theta$

d) $\cos\theta$

e) $\tan\theta$

f) sudut $\angle MLN$

g) sudut $\angle NMK$

7. γ adalah sudut sebuah segitiga pada bidang XOY yang terletak pada titik pusat dengan alas sejajar sumbu X dan sisi tegak sejajar sumbu Y. dengan menggunakan tabel lampiran pada buku ini. Hitunglah nilai perbandingan dari $\sin\gamma, \cos\gamma, \tan\gamma, \csc\gamma, \sec\gamma,$ dan $\cot\gamma$. Untuk segitiga yang sisi miringnya melalui koordinat titik-titik sebagai berikut

a) (1,2)

b) (3,2)

c) (6,8)

d) (8,10)

e) (12,13)

8. Manakah fungsi trigonometri berikut yang bertanda positif dan bertanda negatif?

a) $\sin 238^0$

b) $\cos 143^0$

c) $\tan 325^0$

d) $\csc 356^0$

e) $\sec 298^0$

9. Diketahui $\sin\beta^0 = -\frac{2}{3}$ dan $\tan\beta^0$ positif. Maka tentukanlah

a) $\cos\beta^0$

b) $\tan \beta^0$

c) $\sec \beta^0$

10. Hitunglah nilai dari

    a) $\sin 60^0 + \sec 45^0$

    b) $\cos 45^0 + \tan 60^0$

    c) $\tan 60^0 + \cot 45^0$

    d) $\sin 60^0 + \cos 60^0$

    e) $\sin 60^0 - \cos 45^0$

    f) $\sin 30^0 . \cos 60^0 + \sin 60^0 . \cos 30^0$

    g) $\sin 45^0 \sin 60^0 + \cos 45^0 \cos 60^0$

    h) $\cos 45^0 - \csc 45^0$

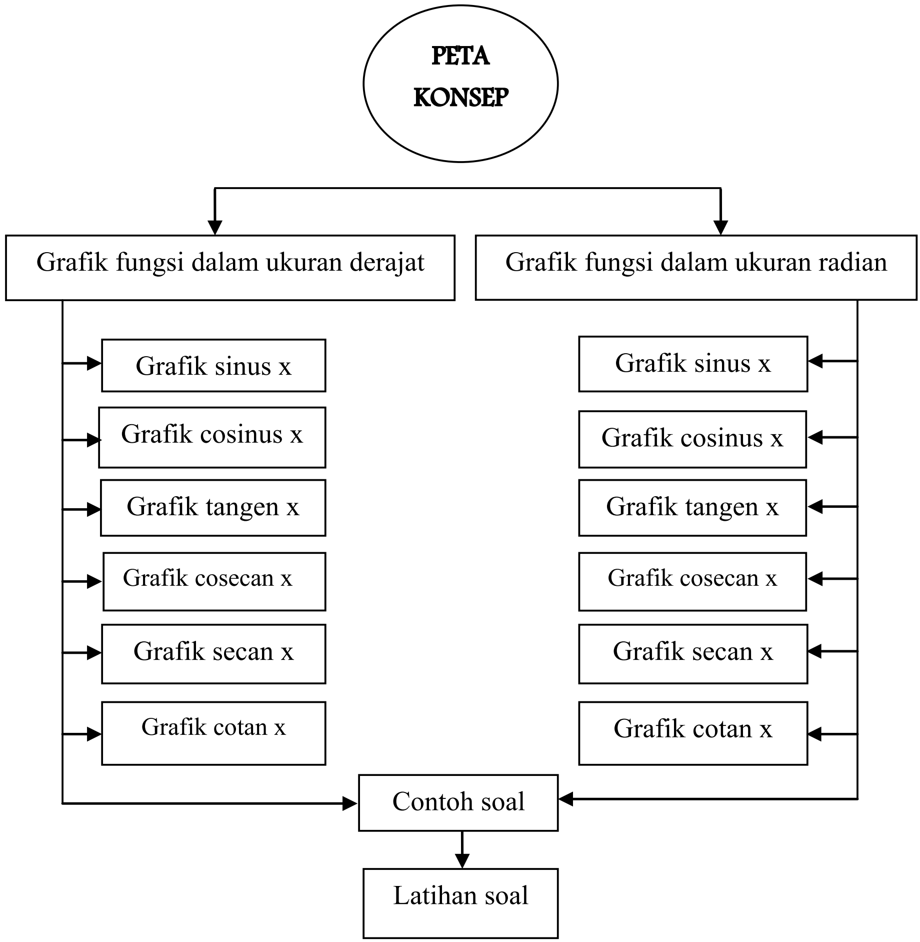
    i) $\csc 30^0 + \sec 60^0$

    j) $\cot 30^0 [\sin 45^0 - \cos 30^0]$

    k) $\sin 60^0 \cos 30^0 - \sin 30^0 \cos 60^0$

    l) $\cos 30^0 \cos 45^0 - \sin 30^0 \sin 45^0$

BAB 3 GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI



Gambar 3.1

1. Grafik fungsi sin x
2. Grafik fungsi cos x
3. Grafik fungsi tan x
4. Grafik fungsi cosec x
5. Grafik fungsi sec x
6. Grafik fungsi cot x

Ilustrasi

Pernahkah kalian masuk ruang ICU sebuah rumah sakit? Jika pernah, pasti tidak asing dengan gambar 3.1. Ya, itu adalah *patient monitor* yang digunakan untuk memantau kondisi fisiologis pasien, yang dilakukan secara real time sehingga dapat diketahui dari waktu ke waktu. *Patient monitor* menampilkan parameter-parameter yang dibutuhkan dokter untuk mengecek keadaan dan pemberian tindakan lanjut terhadap pasien.

Parameter-parameter tersebut terdiri dari: monitor jantung, peredaran darah, pernafasan, syaraf, gula darah dan suhu tubuh. Bagi orang awam, alat tersebut cukup membantu untuk mengetahui secara umum kondisi pasien melalui angka indikator dan grafik yang muncul dalam alat.

Materi

A. Grafik fungsi dalam ukuran derajat

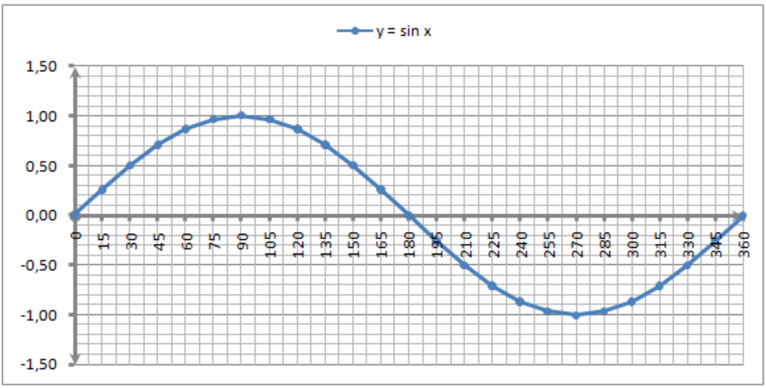
Dari perbandingan trigonometri suatu segitiga siku-siku, persamaan $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ merupakan persamaan dari grafik fungsi $f : x^0 \to \sin x^0$ dan $f : x^0 \to \cos x^0$ (dimana x dalam derajat). Dalam menggambar grafik fungsi trigonometri tersebut, dapat dilakukan dengan cara memakai tabel trigonometri atau dengan memakai lingkaran satuan.

1. Manggambar grafik fungsi $y = \sin x$, dengan $0^0 \leq x \leq 360^0$
    a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

    Perhatikan tabel berikut.

x^0	0	30	60	90	120	150	180	210	140	270	360
$\sin x^0$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0

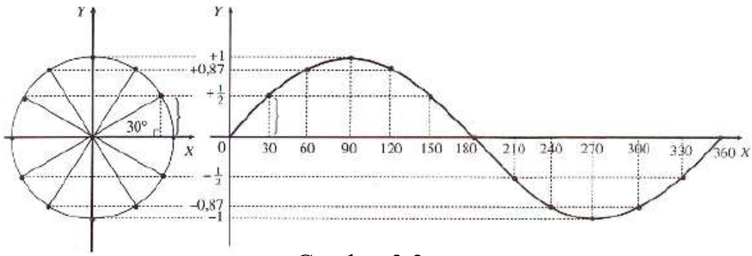
Jika nilai $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 0,87; sehingga grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.2

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Gambar grafik fungsi dengan menggunakan lingkaran satuan dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.3

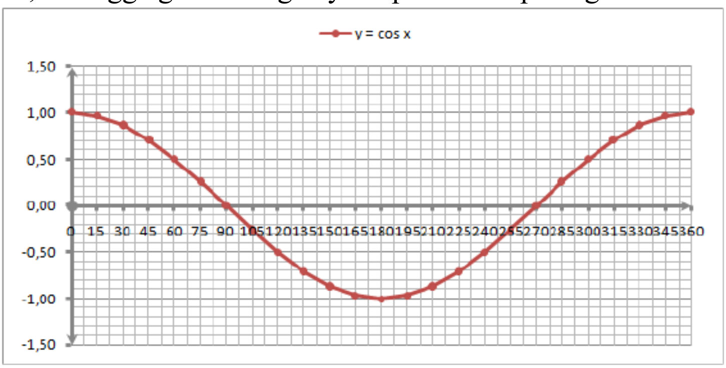
2. Menggambar grafik fungsi $y = \cos x$ dengan $0^0 \leq x \leq 360^0$

a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

Perhatikan tabel berikut.

x^0	0	30	60	90	120	150	180	210	240	360
$\cos x^0$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	1

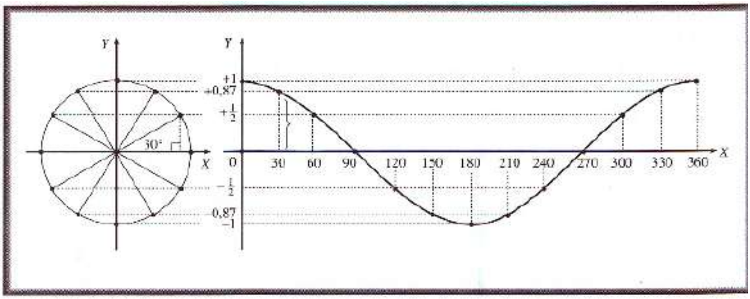
Jika nilai $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 0,87; sehingga grafik fungsinya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.4

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Gambar grafik fungsi dengan menggunakan satuan lingkaran sebagai berikut.



Gambar 3.5

Catatan.

Berdasarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1) Nilai maksimum fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ adalah 1 atau dapat ditulis:

   a) $-1 \leq \sin x \leq 1$

   b) $-1 \leq \cos x \leq 1$

2) Periode dasar untuk fungsi $y = \sin x \leq$ dan $y = \cos x$ adalah 360^0. Artinya, setiap interval 360^0 grafik fungsi akan mengulangi bentuknya yang sama dengan grafik sebelumnya.

3. Menggambar grafik fungsi $y = \tan x$, dengan $0^0 \leq \tan x \leq 360^0$

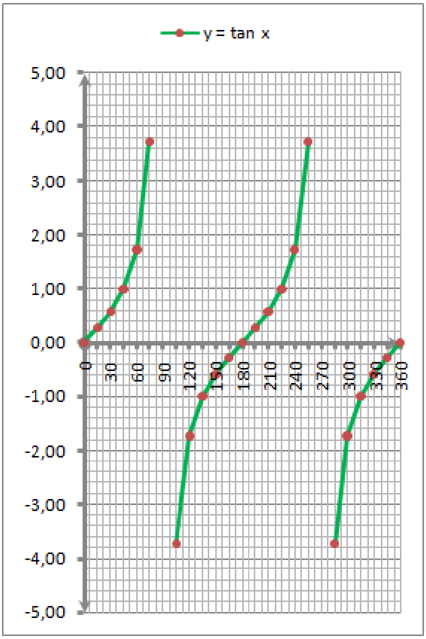
   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x^0	0	45	$\to 90$	$90\leftarrow$	135	180	225	$\to 270$	360
$\tan x^0$	0	1	$+\infty$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	0

Keterangan.

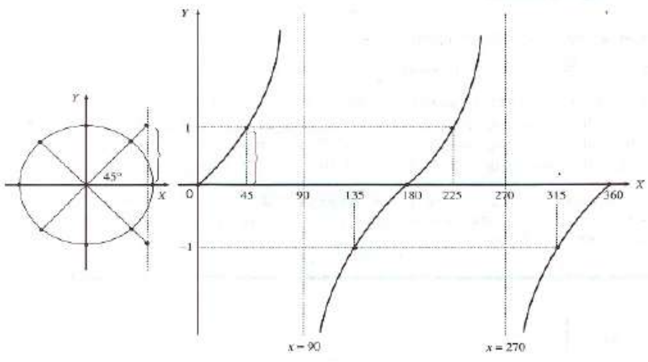
$\to 90$ dimaksud sebagai nilai x yang mendekati 90^0 dari kiri yang nilainnya adalah $+\infty$ (tak hingga), sedangkan $90 \leftarrow$ menyatakan sebagai nilai yang mendekati 90^0 dari sebelah kanan yang yang nilai tangennya adalah $-\infty$ (nilai takhingga). Garis putus-putus pada x disebut dengan garis asimtot $x = 90^0 \pm k.180^0$ (k adalah bilangan bulat). Sedangkan nilai 90^0 dan 270^0 tidak terdefinisi. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.6

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Cara untuk menggambar grafik fungsi trigonometri adalah salah satunya dengan memakai lingkaran satuan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.7

4. Menggambar grafik fungsi $y = \cot x$ dengan $0^0 \leq x \leq 360^0$

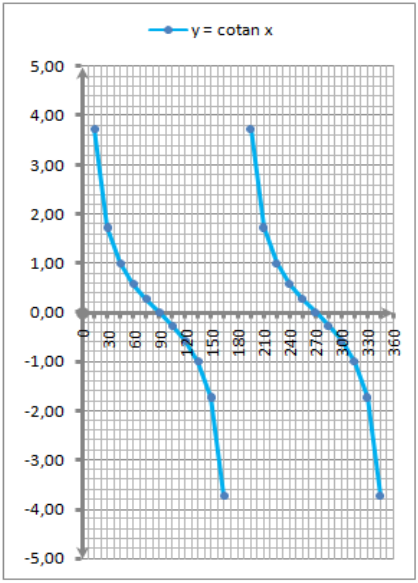
a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

Perhatikan tabel berikut.

x^0	$0 \leftarrow$	45	90	135	$\rightarrow 180$	$180\leftarrow$	225	270	315	$\rightarrow 360$
$\cot x^0$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$

Keterangan.

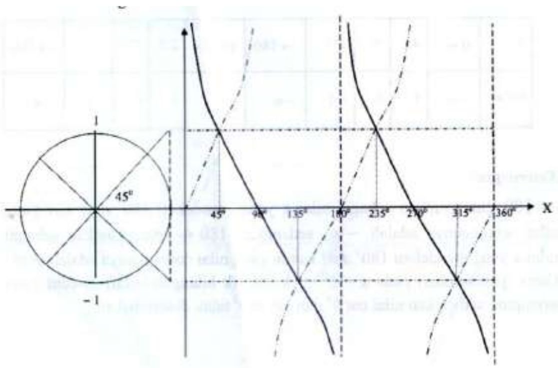
$\rightarrow 180$ dimaksudkan sebagai nilai tak hingga yang mendekati 180^0 dari kiri. Yang nilai cotangennya adalah $-\infty$. Sedangkan $180 \leftarrow$ dimksudkan sebagai nilai x yang mendekati 180^0 dari kanan yang nilai cotangen nya adalah $+\infty$. Garis putus-putus dalam grafik disebut sebagai garis asimtot, sedangkan nilai $\cot 0^0$ dan $\cot 180^0$ tidak didefinisikan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.8

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.9

Keterangan.

Berdasarkan grafik fungsi $y = \tan x$ dan $y = \cot x$ diatas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1) Nilai maksimum fungsi $y = \tan x$ dan $y = \cot x$ adalah $+\infty$, sedangkan nilai minimum kedua fungsi itu adalah $-\infty$, atau sering dikatakan kedua fungsi itu tidak memiliki maksimum maupun minimum.
2) Grafik fungsi $y = \tan x$ selalu mendekati garis asimtot pada $x = 0^0 \pm k.180^0$ dengan $k \in$ bilangan bulat.
3) Grafik fungsi $y = \cot x$ selalu mendekati garis asimtot pada $x = 0^0 \pm k.180^0$ dengan $k \in$ bilangan bulat.
4) Periode dasar untuk fungsi $y = \tan x$ dan $y = \cot x$ adalah 180^0. Artinya, setiap interval 180^0 grafik fungsi akan mengulangi bentuknya yang sama dengan grafik yang sebelumnya

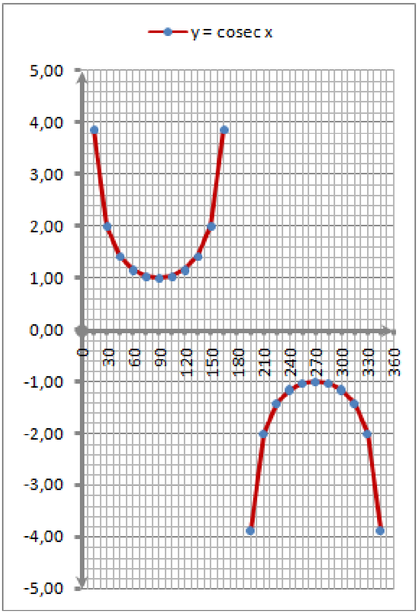
5. Menggambar grafik fungsi $y = \csc x$, dengan $0^0 \le x \le 360^0$

   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x^0	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	360
$\csc x^0$	∞	2	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	∞	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	∞

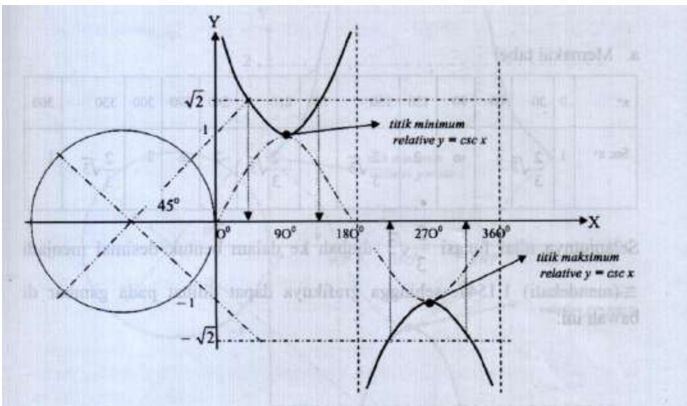
Jika nilai fungsi $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 1,1547; sehingga grafik fungsi dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.10

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.11

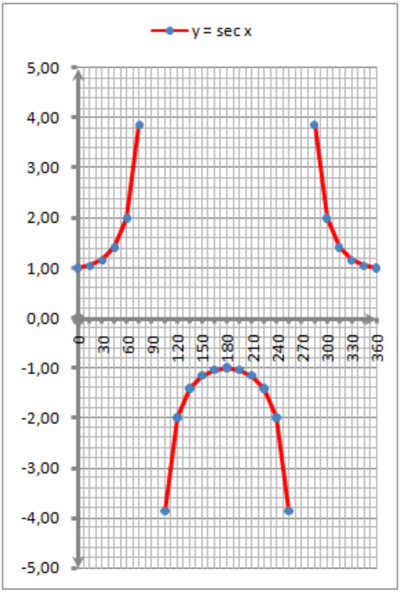
6. Menggambar grafik fungsi $y = \sec x$, dengan $0^0 \leq x \leq 360^0$

   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

      Perhatikan tabel berikut.

x^0	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	360
$\sec x^0$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	∞	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2	∞	1

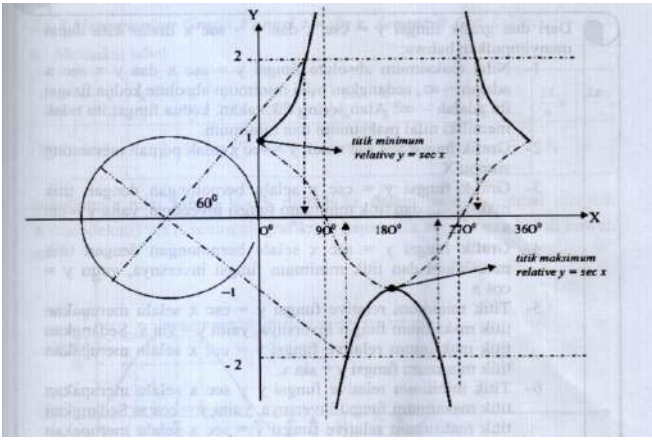
Jika nilai fungsi $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 1,1547; sehingga grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.12

   b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

      Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.13

B. Grafik fungsi dalam ukuran radian

1. Menggambar grafik fungsi $y = \sin x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$

   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

   Jika nilai fungsi $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 0,78. Grafik fungsi $y = \sin x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ dijadikan sebagai bahan latihan mandiri.

   b. Menggunakan satuan lingkaran

   Selain menggunakan tabel, menggambar grafik fungsi $y = \sin x$ bisa menggunakan lingkaran satuan (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

2. Menggambar grafik fungsi $y = \cos x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$

   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

   Jika nilai fungsi $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 0,87. Grafik fungsi $y = \cos x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ digunakan sebagai bahan latihan mandiri.

   b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

   Selain menggunakan tabel, untuk menggambar grafik fungsi $y = \cos x$ juga dapat menggunakan lingkaran satuan (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

3. Menggambar grafik fungsi $y = \tan x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$

   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\leftarrow$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\rightarrow\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi\leftarrow$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\tan x$	0	1	$+\infty$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	$-\infty$	-1	0

   Keterangan.

   $\rightarrow\frac{\pi}{2}$ dimaksudkan sebagai nilai x yang mendekati $\frac{\pi}{2}$ dari kiri yang nilai tangennya adalah $+\infty$, sedangkan $\frac{\pi}{2}\leftarrow$ dimaksudkan sebagai nilai x yang mendekati $\frac{\pi}{2}$ dari kanan yang nilai tangennya adalah $-\infty$.

   Garis putus-putus dalam grafik disebut garis (asimtot) sedangkan nilai dari $\tan \frac{\pi}{2}$ dan $\tan \frac{3}{2}\pi$ tidak terdefinisi. Grafik fungsi $y = \tan x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ digunakan sebagai bahan latihan mandiri.

b. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

Selain menggunakan tabel, nilai trigonometri menggambar grafik fungsi $y = \tan x$ juga dapat dilakukan dengan menggunakan satuan lingkaran (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

4. Menggambar grafik fungsi $y = \cot x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$

a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

Perhatikan tabel berikut.

x	$0 \leftarrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\rightarrow \pi$	$\pi \leftarrow$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\rightarrow 2\pi$
$\cot x$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$

Keterangan :

$\rightarrow \pi$ dimaksudkan sebagai nilai yang mendekati π dari kiri yang nilai cotangen adalah $-\infty$, sedangkan $\pi \leftarrow$ dimaksudkan sebagai nilai x yang mendekati nilai π dari kanan adalah $+\infty$ grafik fungsi yang putus-putus pada grafik fungsi ddisebut dengan garis (asimtot) pada $x = 0 \pm k.\pi$ (k bilagan bulat) dan $\cot x$ tidak terdefinisikan. Grafik fungsi $y = \cot x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ digunakan sebagai bahan latihan mandiri.

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Selain menggunakan tabel untuk menggambar grafik fungsi $y = \cot x$ juga dapat menggunakan satuan lingkaran. (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

5. Menggambar grafik fungsi $y = \csc x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$
   a. Menggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

   Perhatikan tabel berikut.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	2π
$\csc x$	∞	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	∞	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	∞

   Jika nilai fungsi $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 1,1547. Grafik fungsi $y = \csc x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ digunakan sebagai bahan latihan mandiri.

   b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

   Selain menggunakan tabel untuk menggambar grafik fungsi $y = \csc x$ juga dapat menggunakan satuan lingkaran. (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

6. Menggambar grafik fungsi $y = \sec x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$
   a. Mnggambar dengan menggunakan tabel nilai fungsi trigonometri

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sec x$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	∞	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2	∞	1

   Jika nilai fungsi $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ diubah ke bentuk desimal, maka hasilnya mendekati 1,1547. Grafik fungsi $y = \sec x$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ digunakan sebagai bahan latihan mandiri.

b. Menggambar dengan menggunakan lingkaran satuan

Selain mengguankan tabel untuk menggambar grafik fungsi $y = \sec x$ juga dapat menggunakan satuan lingkaran. (digunakan sebagai bahan latihan mandiri).

Latihan Soal

1. Untuk interval $-\pi \leq x \leq \pi$, gambarlah grafik fungsi berikut.
   a) $y = \sin x$
   b) $y = \cos x$
   c) $y = \tan x$
2. Untuk $-180^0 \leq x \leq 180^0$, gambarlah grafik fungsi berikut.
   a) $y = \csc x^0$
   b) $y = \sec x^0$
   c) $y = \cot x^0$
3. Dengan menggunakan tabel, gambarlah grafik fungsi berikut dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$
   a) $y = 2\cos x$
   b) $y = \sin^2 x$
   c) $y = 2\cos x + 3$
4. Dengan menggunakan tabel, gambarlah fungsi berikut pada interval $0^0 \leq x \leq 180^0$
   a) $y = 3\sec x$

b) $y = 2 - \sin x + 6x$

c) $y = 5 \cos x - 5$

5. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi-fungsi berikut.

   a) $y = 3 \sin x - 15$

   b) $y = \cot x + 15$

   c) $y = -\tan x - 12$

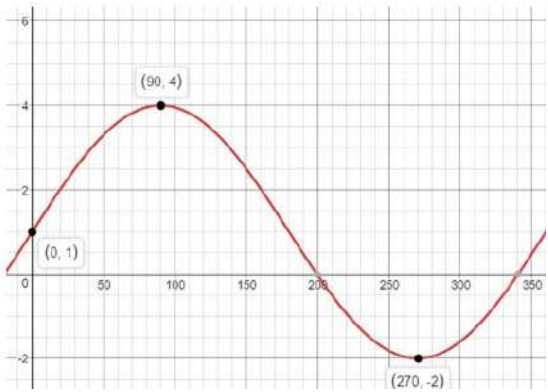
6. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi-fungsi berikut.

   a) $y = \sec x + 12$

   b) $y = \csc x - 2$

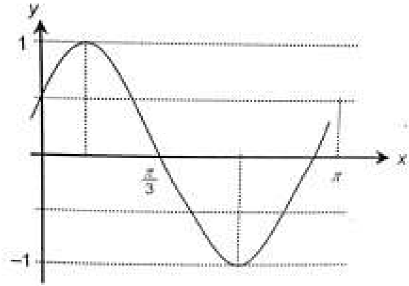
   c) $y = \cot x + 1$

7. Carilah persamaan grafik fungsi dari gambar berikut!



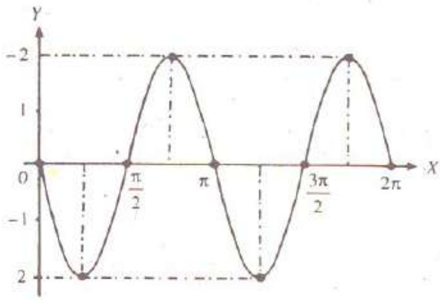
Gambar 3.14

8. Carilah persamaan grafik fungsi dari gambar berikut!



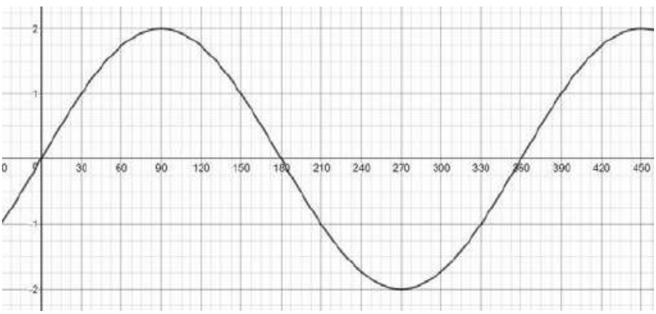
Gambar 3.15

9. Carilah persamaan grafik fungsi dari gambar berikut!



Gambar 3.16

10. Carilah persamaan grafik fungsi dari gambar berikut!

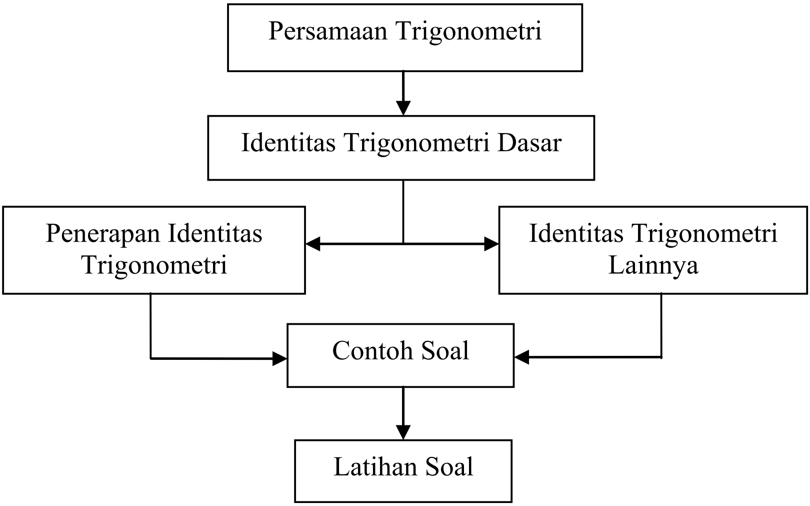


Gambar 3.17

BAB 4

IDENTITAS TRIGONOMETRI

PETA KONSEP



Gambar 4.1

1. Identitas yang dihasilkan dari perbandingan trigonometri
2. Identitas trigonometri yang dihasilkan dari kebalikan trigonometri

Ilustrasi

Gambar 4.1 adalah kondisi lalu lintas jembatan layang Semanggi, Jakarta Selatan. Mungkin kalian juga sering menjumpai hal yang sama ketika berkunjung ke kota-kota besar lainnya, seperti Surabaya atau Bandung. Jembatan layang merupakan perlengkapan jalan bebas hambatan untuk mengatasi hambatan karena konflik di persimpangan, melalui kawasan kumuh, yang sulit ataupun melalui kawasan rawa-rawa yang dibangun untuk mengatasi permasalahan transportasi di kawasan perkotaan atau geografi tanah tertentu.

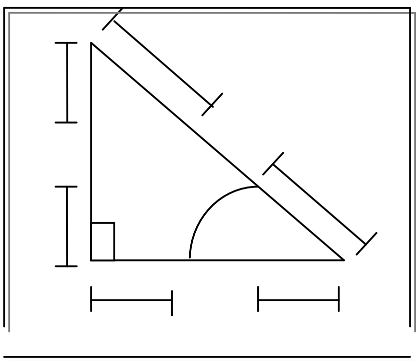
Untuk menuju sebuah tujuan maka haruslah memahami petunjuk yang tertera pada jalan, karena setiap jalur percabangan memiliki tujuan yang berbeda, meskipun berawal dari titik yang sama. Jadi yang harus diperhatikan oleh pengguna jalan adalah memahami arah tujuan berkendara agar jangan sampai salah mengambil keputusan memilih jalur, terutama ketika hendak memasuki jembatan layang.

Materi

Sebelum membahas identitas trigonometri, akan diulas terlebih dahulu sisi segitiga siku-siku yang terdiri atas tiga sisi, yaitu sisi depan, sisi samping, dan sisi miring. Sisi depan merupakan sisi yang berada di depan sudut. Sedangkan sisi samping berada pada samping sudut. Sisi miring merupakan sisi yang selalu berhadapan dengan sudut. Jadi, letak sisi depan, sisi samping, dan sisi miring tergantung pada letak sudut.

Seperti yang sudah dipaparkan diatas, berawal dari sebuah segitiga siku-siku kemudian dilakukan perbandingan untuk mendapatkan nilai sudut fungsi trigonometri maka diperoleh rumus pertama yakni rumus identitas trigonometri.

Perhatikan gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.2

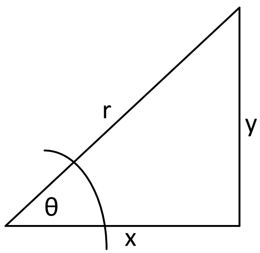
Sebelumnya, telah disinggung bahwa fungsi trigonometri menyatakan hubungan sudut dengan sisi yang terdapat pada sebuah segitiga. Tiga fungsi trigonometri yang utama adalah fungsi sin, cos, dan tan. Definisi ketiga fungsi tersebut dengan sisi dan sudut pada segitiga dapat dilihat pada gambar dan persamaan di bawah.

$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \sin\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \cos\theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \tan\theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$

Selain tiga sudut utama pada fungsi trigonometri, yaitu fungsi sin, cos, dan tan, terdapat fungsi kebalikannya, yaitu fungsi coses, sec, dan cotan. Perhatikan persamaan yang diberikan di bawah.



Gambar 4.3

$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

Pembahasan berikutnya adalah rumus identitas trigonometri. Simak materinya di bawah. Sebelum membahas trigonometri perlu di ingat kembali pembahasan terdahulu tentang perbandingan dalan segitiga yang lebih khususnya dalam segitiga siku-siku, yaitu sisi depan (proyektor), sisi samping (proyektum atau proyeksi), dan sisi miring (hipotenusa).

Diawali oleh pemaparan diatas maka selanjutnya jika dihubungkan akan diperoleh beberpa rumus identitas trigonometri sebagai berikut.

A. Rumus identitas trigonometri dasar

Rumus kebalikan yaitu salah satu dari rumus identitas trigonometri dikarenakan hasil kebalikan yang dihasilkan melalui hubungan-hubungan rumus perbandingan yang sudah ada.

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\ \theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\ \theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\ \theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\ \theta}$$

Dari rumus kebalikan diatas dapat juga di tulis sebagai berikut[8].

a) $\sin\theta.\csc\theta = 1$

b) $\cos\theta.\sec\theta = 1$

c) $\tan\theta.\cot\theta = 1$

Sedangkan untuk identitas yang dihasilkan oleh perbandingan dapat dilihat sebagai berikut.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Sehingga dari persamaan satu dan persamaan dua jika duhubungkan akan menghasilkan identitas baru:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

[8] Rahayu Kariadinata, *Trigonometri Dasar*, Pustaka Setia, Bandung, 2017, h. 93

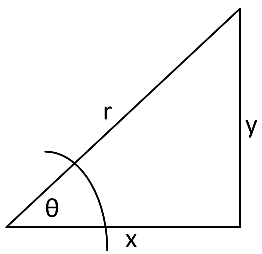
B. Rumus identitas trigonometri lainnya

Rumus identitas trigonometri menyatakan hubungan suatu fungsi dengan fungsi trigonometri lainnya, misalkan fungsi secan yang merupakan fungsi kebalikan dari fungsi cosinus. Begitu juga dengan fungsi kebalikan lain. Selain fungsi kebalikan, ada fungsi identitas trigonometri yang juga menyatakan hubungan antar fungsi trigonometri sebagaimana penjelasan sebelumnya.

Sebenarnya, ada banyak fungsi identitas trigonometri. Tiga fungsi identitas trigonometri yang diberikan di atas hanyalah sebagian. Rumus tersebut merupakan rumus turunan yang diperoleh dengan menghubungkan satu fungsi trigonometri dengan fungsi trigonometri lainnya. Karena merupakan fungsi identitas, fungsi-fungsi tersebut dapat dibuktikan kebenarannya. Cara membuktikannya dapat dengan cara merubah ruas kiri agar sama dengan ruas kanan, ataupun sebaliknya.

Contoh Soal

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.4

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2+y^2}{r^2}$ .... persamaan (1)

Sebelum melanjutkan pembuktian rumus, ingat kembali persamaan pada pythagoras seperti yang terlihat pada gambar di bawah.

$r = \sqrt{y^2 + x^2}$

$r^2 = y^2 + x^2$ .... persamaan (2)

Dengan mensubstitusikan nilai $x^2 + y^2$ ke persamaan 1 maka diperoleh :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{r^2}{r^2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (terbukti)

Untuk pembuktian rumus identitas lainnya dapat dibuktikan dengan teknik dan melibatkan persamaan yang telah dibuktikan sebelumnya.

Selanjutnya, akan diulas identitas trigonometri lain yang tidak kalah penting dengan rumus identitas trigonometri yang sudah diberikan sebelumnya. Selain rumus identitas di atas, terdapat rumus identitas lain yaitu rumus identitas trigonometri dari rumus sudut rangkap fungsi trigonometri. Perhatikan persamaan di bawah.

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

Fungi identitas trigonometri yang diberikan di atas dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan soal limit fungsi trigonometri atau berbagai topik masalah dalam pembahasan matematika lain.

Contoh Soal

Buktikan bahwa identitas dibawah ini benar !

1. $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = \sin\beta$

   Jawab

   $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = 1 - \frac{1-\sin^2\beta}{1+\sin\beta}$

   $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = 1 - \frac{(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}{1+\sin\beta}$

   $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = 1 - (1 - \sin\beta)$

   $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = 1 - 1 + \sin\beta$

   $1 - \frac{\cos^2\beta}{1+\sin\beta} = \sin\beta$ (terbukti)

2. $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

   Jawab

   $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

   $= \sin^2\alpha$

$= 1 - \cos^2 \alpha$

$= (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ (terbukti)

3. $\sin \beta \tan \beta + \cos \beta = \sec \beta$

   Jawab

   $$\sin \beta \tan \beta + \cos \beta = \sin \beta \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \cos \beta$$

   $$= \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos^2 \beta}{\cos \beta}$$

   $$= \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta \text{ (terbukti)}$$

Latihan Soal

Buktikan identitas berikut ini!

1. $\sec^2 x(1 - \cos^2 x) = \tan^2 x$
2. $\cos x(\sec x - \cos x) = \sin^2 x$
3. $\sec y - \cos y = \sin y . \tan y$
4. $\frac{\sin \theta}{\csc \theta} + \frac{\cos \theta}{\sec \theta} = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta$
5. $\cos \theta + \sin \theta . \tan \theta = \sec \theta$
6. $\frac{\sec^2 \beta - 1}{\csc^2 \beta - 1} = \tan^4 \beta$
7. $\frac{1}{1 + \tan^2 \delta} + \frac{1}{1 + \cot^2 \delta} = 1$
8. $\sec^2 t + \csc^2 t = \sec^2 t . \csc^2 t$

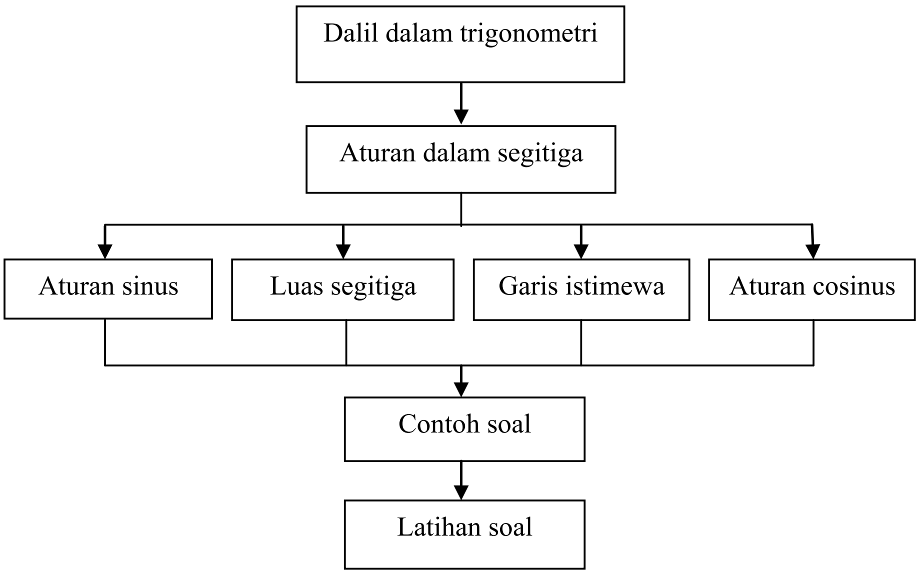
9. $\frac{\cos\ \theta}{1-\sin\ \theta} - \frac{\cos\ \theta}{1+\sin\ \theta} = 2\tan\theta$

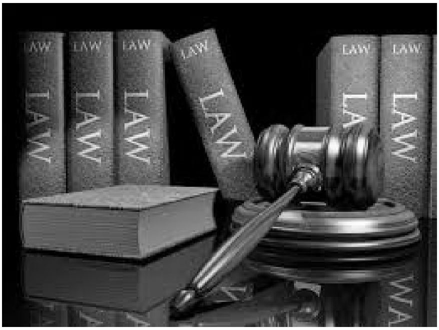
10. $\sec\theta(\csc\theta - \cot\theta\cos\theta) = \tan\theta$

BAB 5

DALIL-DALIL TRIGONOMETRI

PETA KONSEP





Gambar 5.1

1. Aturan sinus
2. Aturan cosinus
3. Luas segitiga

Ilustrasi

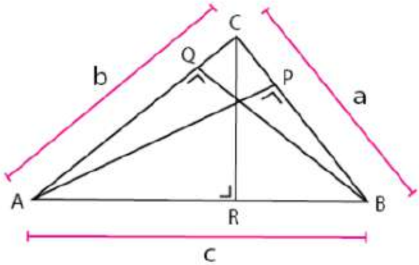
Dalam suatu kasus persidangan, sering kita mendengarkan istilah ‘ketuk palu’. Hal itu diartikan sebagai putusan pengadilan terhadap seorang terdakwa yang sudah memiliki kekuatan hukum tetap. Dalam memutuskan suatu perkara, seorang hakim tentunya melihat dari berbagai sudut pandang, salah satu diantaranya adalah peraturan atau hukum yang berlaku atas suatu kasus tersebut.

Seorang hakim dalam hal menjatuhkan pidana kepada terdakwa tidak boleh menjatuhkan pidana tersebut, kecuali apabila dengan sekurang-kurangnya dua alat bukti yang sah, sehingga hakim memperoleh keyakinan bahwa suatu tindak pidana benar-benar terjadi dan terdakwalah yang bersalah melakukannya. Alat bukti sah yang dimaksud adalah: (a) keterangan saksi; (b) keterangan ahli; (c) surat; (d) petunjuk; (e) keterangan terdakwa atau hal yang secara umum sudah diketahui sehingga tidak perlu dibuktikan.

Materi

A. Aturan sinus

Aturan sinus adalah perbandingan sisi depan sudut sama dengan perbandingan nilai sinus sudut. Untuk memahami aturan sinus, perhatikan segitiga ABC lancip pada gambar berikut ini. Garis-garis AP, BQ, dan CR merupakan garis tinggi pada sisi a, sisi b, sisi c.



Gambar 5.2

Perhatikan pada ΔACR

$\sin A = \frac{CR}{AC}$

$\Leftrightarrow$ CR = AC. Sin A

Pada ΔBCR:

$\sin B = \frac{CR}{CB}$

$\Leftrightarrow$ CR = CB . sin B

Persamaan (1) = (2), diperoleh:

AC . sin A = CB. sin B

$\Leftrightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{CB}{\sin A}$

$\Leftrightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

Pada ΔBAP:

$\sin B = \frac{AP}{AB}$

$\Leftrightarrow$ AP = AB . sin B

Pada ΔCAP :

$\sin C = \frac{AP}{AC}$

$\Leftrightarrow$ AP = AC.sin C

Persamaan (4) = (5), diperoleh:

AB. sin B = AC. sin C

$\Leftrightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

$\Leftrightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

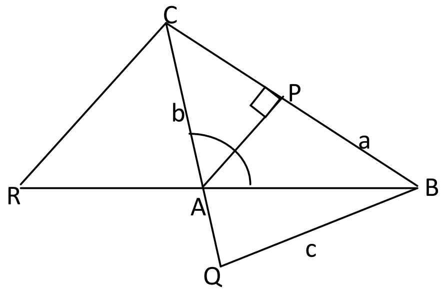
Persamaan (3) = (6), diperoleh:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Persamaan yang terakhir ini disebut aturan sinus atau dalil sinus.

Catatan: aturan sinus juga berlaku pada segitiga tumpul

Perhatikan segitiga ABC tumpul pada gambar 5.3 berikut.Garis-garis AP merupakan garis tinggi pada sisi a.



Gambar 5.3

Pada ΔACR:

$\angle RAC = (108° - A)$

sin ∠ RAC = $\frac{CR}{Ac}$

⇔ CR = AC . sin ∠ RAC

⇔ CR = AC . sin (180° −A)

⇔ CR = AC . sin A …………….. (persamaan 1)

Pada ΔBCR :

sin B = $\frac{CR}{CB}$

⇔ CR = BC. sin B …………….. (persamaan 2)

Persamaan (1) = (2), diperoleh:

AC. sin A = BC . sin B …………….. (persamaan 3)

$\frac{AC}{sin\ B} = \frac{BC}{sin\ A}$

⇔ $\frac{b}{sin\ B} = \frac{a}{sin\ A}$

Pada ΔBAP:

sin B = $\frac{AP}{AB}$

$\Leftrightarrow$ AP = AB . sin B …………….. (persamaan 4)

Pada ΔCAP:

sin C = $\frac{AP}{AC}$

$\Leftrightarrow$ AP = AC . sin C …………….. (persamaan 5)

Persamaan (4) = (5), diperoleh:

AB. sin B = AC . sin C …………….. (persamaan 6)

$\frac{AB}{sin\ C} = \frac{AC}{sin\ B}$

$\Leftrightarrow \frac{c}{sin\ C} = \frac{b}{sin\ B}$

Persamaan (3) = (6), diperoleh $\frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C}$

Jadi, aturan sinus juga berlaku pada segitiga tumpul, sehingga rumus aturan sinus adalah:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Fungsi aturan sinus di atas dapat digunakan untuk menentukan panjang sisi segitiga yang belum diketahui. Selain itu, juga dapat digunakan untuk mencari besar sudut segitiga yang belum diketahui. Secara umum, aturan sinus di pakai untuk menemukan unsur-unsur dalam segitiga apabila unsur-unsur yang lainnya telah diketahui. Kemungkinan unsur yang diketahui tersebut adalah:

1. Sisi, sudut, sudut disingkat dengan ss, sd, sd.
2. Sudut, sisi, sudut disingkat dengan sd, ss, sd.
3. Sisi, sisi, sudut disingkat dengan ss, ss, sd.

Contoh Soal

Dalam segitiga ABC, diketahui besar sudut A = 36° dan besar sudut B = 125° jika panjang sisi a adalah 8 cm, maka hitunglah panjang sisi b!

Jawab :

Dik : A = 36°, B = 126°, a = 8 cm

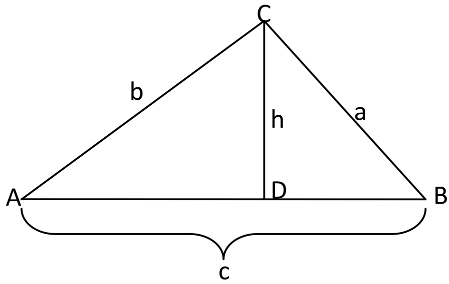
Dit : b = …?

Berdasarkan

- $\frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ b}$
- $\frac{8}{sin\ 36°} = \frac{b}{sin\ 125°}$
- $\frac{8}{0{,}587} = \frac{b}{0{,}819}$
- b = 11,2 cm

B. Aturan cosinus

Untuk memahami aturan cosinus, perhatikan dua contoh berikut ini! Perhatikan gambar 5.4 berikut! Segitiga ABC lancip A = 40^0, panjang sisi b = 6 cm, dan panjang sisi C = 4 cm. Unsur yang di ketahui pada ABC tersebut adalah panjang dua sisi dan besar sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut (sisi, sudut, sisi).



Gambar 5.4

sehingga pada gambar diatas diperoleh :

dari ΔACD diperoleh :

$\cos\theta = \frac{AD}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{AD}{B} \quad \Leftrightarrow \quad AD = b.\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{CD}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta = \frac{CD}{b} \quad \Leftrightarrow \quad CD = b.\sin\theta$

Sedangkan :

$BD = AB - AD$

$BD = c - b.\cos\theta$

Sekarang perhatikan :

$BC^2 = CD^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow BC^2 = CD^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow a^2 = (b.\sin\theta)^2 + (c - b.\cos\theta)^2$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2.\sin^2\theta + (c^2 - 2bc.\cos\theta + b^2\cos^2\theta)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2.\sin^2\theta + c^2 - 2bc.\cos\theta + b^2.\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + c^2 + 2bc.\cos\theta$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$

Sehingga dengan cara analogi diperoleh hubungan :

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\beta$

Ketiga kesamaan terakhir ini disebut dengan aturan cosinus yang berlaku untuk setiap segitiga yang dapat ditulis dengan:

$$\boxed{\begin{gathered} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{gathered}}$$

Untuk menentukan besarnya sudut dalam suatu segitiga, dimana ketiga sisinya diketahui, rumus diatas dapat diubah menjadi :

a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$\Leftrightarrow\ -2bc.\cos A = (b^2 + c^2) - a^2$

$\Leftrightarrow\ -2bc.\cos A = b^2 - c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow\ -2bc.\cos A = b^2 - c^2 + a^2$

$\Leftrightarrow\ \cos A = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$

b. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$\Leftrightarrow\ -2ac.\cos B = (a^2 + c^2) - b^2$

$\Leftrightarrow\ -2ac.\cos B = a^2 - c^2 - b^2$

$\Leftrightarrow\ 2ac.\cos B = a^2 + c^2 - b^2$

$\Leftrightarrow\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

c. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

$\Leftrightarrow \; -2ab.\cos C = (a^2 + b^2) - c^2$

$\Leftrightarrow \; -2ab.\cos C = a^2 - b^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \; 2ab.\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \; \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Sehingga diperoleh kesimpulan untuk rumus cosinus sebagai berikut.

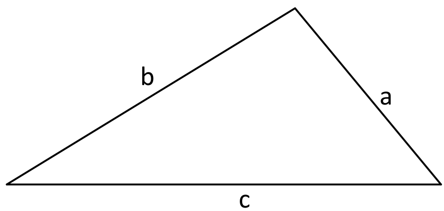
$$\boxed{\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}}$$

Contoh Soal

Dalam segitiga ABC diketahui panjang sisi a = 7 cm, b = 8 cm, dan c = 9 cm. besar sudut di hadapan sisi terpendek adalah….

Jawab

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.5

Dik. a= 7 cm, b = 8 cm, dan c = 9 cm

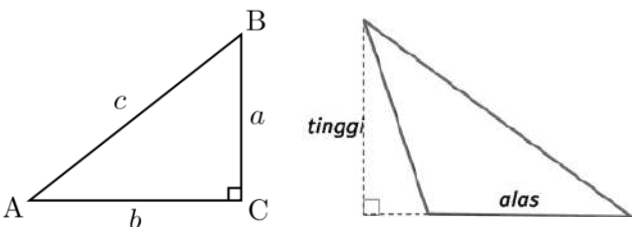
Dit : A =…?

Penyeleasian :

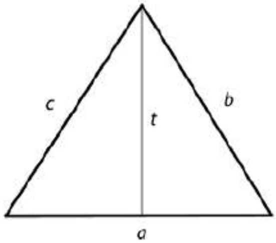
- cos A = $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
- cos A = $\dfrac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2x8x9}$
- cos A = $\dfrac{64 + 81 - 749}{144}$
- cos A = $\dfrac{96}{144}$
- cos A = 0,666
- A = 48,2°

C. Luas segitiga

Seperti kita tahu bahwa di sekolah dasar maupun menengah kita sudah membahas tentang masalah luas segitiga dan sekarang kita akan lebih memperdalam pemahaman kita tentang luas segitiga dalam aturan trigonometri. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.6

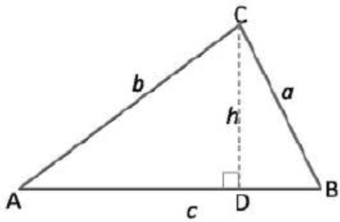


Gambar 5.7

Dalam mencari luas segitiga rasanya tidak asing lagi dengan rumus $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$. Namun dalam pembahasan kali ini kita akan kaitkan dengan trigonometri yang dimana untuk dapat memahami materi yang sebelumnya sudah dibahas, yaitu aturan sinus dan aturan cosinus.

1. Mencari luas segitiga jika diketahui satu sudut yang diapit oleh dua sisi

   Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.8

Perhatikan ΔACD:

sin A = $\frac{CD}{AC} = \frac{t}{AC}$

⇔ t = AC . sin A ………………. (persamaan 1)

luas ΔABC = $\frac{1}{2}$ alas x tinggi

⇔ L = $\frac{1}{2}$ AB x t ………………. (persamaan 2)

Subsitusikan persamaan (1) ke persamaan (2):

L = $\frac{1}{2}$ AB x AC . sin A

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ c . b . sin A

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ bc . sin A ………………. (persamaan 3)

Perhatikan ΔBCD:

sin B = $\frac{CD}{BC} = \frac{t}{BC}$

$\Leftrightarrow$ t = BC . sin B ………………. (persamaan 4)

Luas Δ ABC = $\frac{1}{2}$ alas x tinggi

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ AB x t ………………. (persamaan 5)

Subsitusikan persamaan (4) ke persamaan (5):

L = $\frac{1}{2}$ AB x BC . sin B

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ c.a . sin B

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ ac . sin B ………………. (persamaan 6)

Berdasarkan aturan sinus pada ΔABC:

$\frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C}$

$\Leftrightarrow$ Sin B = $\frac{b\ sin\ C}{c}$ ………………. (persamaan 7)

Subsitusikan persamaan (7) ke persamaan (6):

L = $\frac{1}{2}$ ac . sin B

$\Leftrightarrow$ L = $\frac{1}{2}$ ac $\frac{b\ sin\ C}{c}$

$\Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$

Berdasarkan uraian di atas dan melihat bentuk persamaan (3), (6), dan (8), persamaan-persaman tersebut merupakan rumus luas sebuah segitiga.

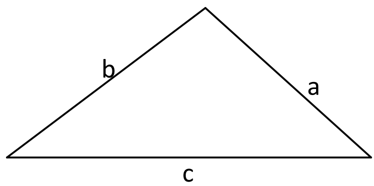
Jika dalam ΔABC diketahui dua sisi dan benar sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut, maka luasnya dapat ditentukan dengan menggunakan salah satu rumus berikut.

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A \\ L &= \frac{1}{2} ac \cdot \sin B \\ L &= \frac{1}{2} ab \cdot \sin C \end{aligned}}$$

2. Mencari luas segitiga jika diketahui ketiga sisinya

   Sekarang bagaimanakah caranya untuk mencari luas sebuah segitiga jika diketahui ketiga sisinya (sisi, sisi, sisi)?

   Perhatikan gambar berikut[9].



Gambar 5.9

[9] Rahayu Kariadinata, *Trigonometri Dasar*, Pustaka Setia, Bandung, 2017, h. 121

keliling segitiga = a + b + c

setengah keliling segitiga (s) = $\frac{1}{2}$ (a + b + c)

Berdasarkan identitas trigonometri:

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = (1 - \cos A)\,(1 + \cos A)$

Berdasarkan aturan cosinus, kita peroleh :

$$\sin^2 A = [1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}]\,[1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [1 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(2bc) + (b^2 + c^2 - a^2)\}}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2\}\{-(b^2 - 2bc + c^2) - a^2}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(b+c)^2 - a^2\}\{-(b-c)^2 - a^2}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(b+a+c)(b+c-a)\}\{-(b-c+a)(b-c-a)\}}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(a+b+c)(b+c-a)\}\{-(b-c+a)-(-b+c+a)\}}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = [\frac{\{(a+b+c)(b+c-a)\}\{-(b-c+a)-(-b+c+a)\}}{(2bc)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \left[\frac{\{(a+b+c)(b+c-a)\}\{-(a+b-c)-(a-b+c)\}}{(2bc)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \left[\frac{\{(a+b+c)(b+c-a)\}\{(a+b-c)-(a-b+c)\}}{(2bc)^2}\right]$$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \frac{1}{2bc}\sqrt{\{(a+b+c)(b+c-a)\}\{(a+b-c)(a-b+c)}$

Jika $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

maka $2s = (a+b+c)$ atau $a+b+c = 2s$

$(b+c-a) = (a+b+c) - 2a = 2s - 2a = 2(s-a)$

$(a+b-a) = (a+b+c) - 2c = 2s - 2c = 2(s-c)$

$(a-b+c) = (a+b+c) - 2b = 2s - 2b = 2(s-b)$

Subtitusikan

$\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(2s)(2(s-a)(2(s-c)(2(s-b))}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{16(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{4}{2bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$L = \frac{1}{2} b \,.\, c \,.\, \sin A$

Maka diperoleh :

$L = \frac{1}{2} b \,.\, c \frac{2}{bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad L = \sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{4}{2bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

Maka diperoleh :

$L = \frac{1}{2} b \,.\, c \frac{2}{bc}\sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Leftrightarrow \quad L = \sqrt{(s)(s-a)(s-b)(s-c)}$

Catatan.

Uraian di atas akan sama hasilnya apabila kita mensubstitusikan ke rumus segitiga ABC yang lainnya, tentunya aturan cosinus yang diambil adalah cos B atau cos C. Akibatnya :

Luas segitiga ABC jika diketahui ketiga sisinya dapat di tentukan dengan rumus :

$$\text{L} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dengan s = (a + b + c) = setengah keliling segitiga ABC

Contoh Soal

Hitunglah luas ΔPQR jika diketahui panjang sisi PQ = 9 cm, PR = 13 cm, dan QR = 10 cm!

Jawab :

Keliling luas ΔPQR $(2\text{s}) = (9 + 13 + 10)$ cm atau s = 16 cm

$\Leftrightarrow$ Luas $\Delta\text{PQR} = \sqrt{\text{s}(\text{s}-\text{a})(\text{s}-\text{b})(\text{s}-\text{c})}$

$\Leftrightarrow$ Luas $\Delta\text{PQR} = \sqrt{16(16-9)(16-3)(16-10)}$

$\Leftrightarrow$ Luas $\Delta\text{PQR} = \sqrt{16 \times 7 \times 6}$

$\Leftrightarrow$ Luas $\Delta\text{PQR} = \sqrt{2016} \cong 44{,}9$ cm^2

3. Menentukan luas segitiga, jika diketahui besar sudut dan panjang sisi yang terletak diantara dua sudut tersebut.

Sebelumnya sudah dibahas untuk mencari luas segitiga. Maka dari rumus

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$ dan rumus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}$

Maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow a.\sin B = b.\sin A \;\; \Leftrightarrow \;\; b = \frac{a.\sin B}{\sin A}$ sehingga :

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \; \frac{a.\sin B}{\sin A}.a.\sin C$ atau luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \; \frac{a^2 \sin B.\sin C}{\sin A}$

Sehingga dengan cara yang sama, maka kita peroleh juga rumus untuk mencari sudut sebagai berikut.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin A.\sin C}{\sin B}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin A.\sin B}{\sin C}$$

Hitunglah luas segitiga ΔPQR jika diketahui $\angle A = 25^0$ dan $\angle B = 35^0$ sedangkan panjang sisi $c = 5$ cm

Jawab :

Jumlah sudut dalam segitiga $= 180^0$, sehingga

$\angle C = 180^0 - (25^0 + 35^0) = 120^0$

Dengan rumus luas $\Delta PQR = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin P.\sin Q}{\sin R}$

$\Leftrightarrow \quad \text{Luas } \Delta PQR = \frac{1}{2} 5^2 \frac{\sin 25^0.\sin 35^0}{\sin 120^0}$

$\Leftrightarrow \quad \text{Luas } \Delta PQR = \frac{1}{2} 25 \left[\frac{(0{,}5226)(0{,}5736)}{0{,}8660}\right]$

$\Leftrightarrow \quad \text{Luas } \Delta PQR = 12{,}5(0{,}2799)$

$\Leftrightarrow$ Luas $\Delta PQR \cong 3{,}499 \text{cm}^2$

D. Rumus Gauss

Hubungan antar sudut dan sisi dalam sebuah segitiga, dapat juga ditentukan berdasarkan rumus Gauss. Rumus Gauss ini diperoleh dengan menentukan turunan rumus sudut rangkap yang berbentuk $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ dan $\cos 2A = 1 - 2.\sin^2 A$, dengan mengganti A dengan $\frac{1}{2}$A, diperoleh hubungan baru yang berbentuk:

$\cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1$ dan $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A$.

Sedangkan dari rumus cosinus diperoleh $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.bc}$, dengan mengganti cos A dengan $2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1$ sehingga diperoleh hubungan :

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{2s(2s-2a)}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Jika cos A diganti dengan bentuk 1 – 2 $\sin^2 \frac{1}{2}$, maka akan diperoleh

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b.c}}$$

Contoh Soal

Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi AB = 5 cm, AC = 7 cm, dan BC = 4 cm. Hitunglah nilai untuk sin A!

Jawab :

Berdasarkan rumus $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(8-7)(8-4)}{7.4}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1x4}{7x4}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{7}$

Berdasarkan rumus cos $A = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A$, diperoleh $\cos A = 1 - 2\left(\frac{1}{7}\right)$ atau cos $A = \frac{5}{7}$, sehingga dengan rumus sin A $= \pm\sqrt{1-\cos^2 A}$, maka diperoleh nilai sin A sebagai berikut.

$\Leftrightarrow \sin A = \pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \sin A = \pm\sqrt{\frac{49-25}{49}}$

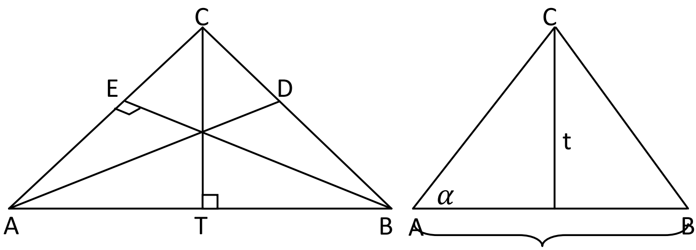
$\Leftrightarrow$ $\sin A = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$ (karena A lancip, maka nilai sin A positif)

E. Garis-garis istimewa dalam segitiga

Ada tiga garis istimewa dari segitiga yang membagi segitiga itu menjadi dua bagian. Ketiga garis istimewa itu adalah : garis tinggi, garis bagi, dan garis berat. Pada subbab ini kita akan membahas tuntas tentang garis-garis istimewa dalam segitiga.

1. Garis tinggi

Setiap bangun datar segitiga terdapat yang namanya garis tinggi yang merupakan jarak dari kedua sisi yang berhadapan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.9

Perhatikan ΔABC pada (gambar 5.9), garis tingginya adalah AD[t_a] (jarakdari titik A ke sisi BC), BE [t_b] (jarak dari B ke sisi AC), dan CF [t_c] (jarak dari C ke sisi AB) ketiga garis tersebut berpotongan di titik tinggi [T]. Selanjutnya perhatikan ΔABC pada (gambar 5.9) panjang garis tinggi dapat ditentukan dengan memperhatikan:

$\sin\alpha = \frac{tc}{b} \Leftrightarrow t_c = b.\sin\alpha$ dan $\sin\beta = \frac{tc}{a} \Leftrightarrow t_c = a.\sin\beta$

Mengingat kembali aturan sinus yang segitiganya berada dalam lingkaran $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ atau $a = 2R \sin \alpha$;$b = 2R. \sin \beta$; dan $c = 2R. \sin \theta$, maka rumus garis tinggi t_c dapat ditulis sebagai berikut.

$t_c = a. \sin \beta$ atau

$$\boxed{t_c = 2R \sin \alpha \ \sin \beta}$$

sehingga dengan cara yang sama, maka panjang garis tinggi lainnya adalah :

$$\boxed{t_a = 2R \sin \beta \sin \alpha}$$

$$\boxed{t_b = 2R \sin \alpha \ \sin \theta}$$

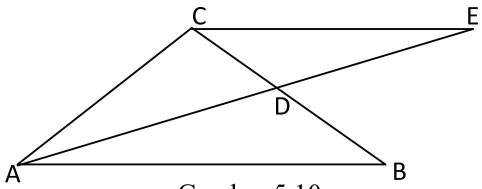
Dari rumus panjang garis tinggi diatas, dapat diturunkan rumus luas segitiga ABC [L] dimana $L = \frac{1}{2} a.t_a = \frac{1}{2} b.t_b = \frac{1}{2} c.t_c$ atau :

$$\boxed{L = 2R^2 \sin \alpha \ \sin \beta \sin \theta}$$

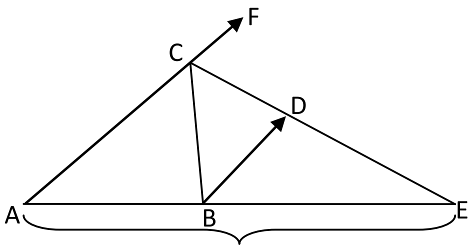
Untuk menyelesaikan soal-soal mengenai panjang garis tinggi suatu segitiga, tentu akan lebih mudah dengan mencari terlebih dahulu luas segitiga tersebut.

2. Garis bagi

Dalam segitiga, terdapat tiga garis bagi yang masing-masing membagi tiga sudutnya menjadi dua bagian yang sama. Ketiga garis bagi ini akan berpotongan di sebuah titik yang disebut titik pusat lingkaran dalam segitiga tersebut.



Gambar 5.10



Gambar 5.11

Perhatikan ΔABC pada (gambar 5.10), yang mempunyai garis bagi (birektris) sudut dalam AD yang membagi $\angle BAC$ menjadi dua sama besar, yaitu: $\angle BAD = \angle CAD$. Sedangkan pada gambar 5.11, ΔABC mempunyai garis bagi (birektris) sudut luar CE yang membagi $\angle BCF$ menjadi dua sama besar, yakni $\angle BCE = \angle FCE$. Dalil garis bagi sudut dalam pada (gambar 5.11) dapat diperoleh[10]:

Luas $\Delta ABC =$ luas $\Delta ABD + L\Delta ACD$, sehingga :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\mathrm{b.c.}\sin\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{AD.c.}\sin\frac{1}{2}.\alpha + \frac{1}{2}.\mathrm{AD.b.}\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\mathrm{b.c.}\sin\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{AD.}\sin\frac{1}{2}\alpha(\mathrm{a}+\mathrm{b})$$

[10] Fathurin Zen, op. cit, h. 135

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}. b. c. 2. \sin\frac{1}{2}\alpha. \cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}AD. \sin\frac{1}{2}\alpha\ (b + c)$

$\Leftrightarrow \quad b. c. 2. \cos\frac{1}{2}\alpha \qquad\qquad = AD(b + c)$

$\Leftrightarrow \quad AD = \frac{2.b.c.\cos\frac{1}{2}\alpha}{(b+c)}$

Dengan cara yang sama maka dalil garis bagi sudut luar segitiga menjadi :

$\Leftrightarrow \quad CE = \frac{2.b.c.\cos\frac{1}{2}\beta}{(b-a)}$ dengan syarat $b > a$

Cara lain untuk menentukan panjang garis bagi adalah dengan menggunakan "Dalil Stewart". Sekarang perhatikan kembali gambar 5.9

Karena $\angle ABD = \angle CDE$ (bertolak belakang), $\angle DBA = \angle DEC$, dan $\angle ABD = \angle DCE$ (bersebrangan), maka ΔABD sebangun dengan ΔCED atau $\Delta ABD \sim \Delta CED$, sehingga diperoleh:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{EC} \Leftrightarrow \frac{a1}{a2} = \frac{c}{EC}$

Mengingat kembali ΔAEC yang merupakan segitiga sama kaki, maka $AC = EC = b$, sehingga :

$\frac{a1}{a2} = \frac{c}{EC} \quad \Leftrightarrow \frac{a1}{a2} = \frac{c}{b}$

Dari perbandingan tersebut maka diperoleh

$a_1 = \frac{c.a}{b+c}$ dan $a_2 = \frac{b.a}{b+c}$...............(1)

Kemudian ΔACD didapatkan hubungan

$b^2 = AD^2 + a^2 - 2AD \,.\, a_2. \cos \angle AD_1$ .... (2)

Pada ΔABD memperoleh hubungan $c^2 = AD^2 + a_1.\cos \angle D_2$ atau

$c^2 = AD^2 + a_1^2 + 2AD \,.\, a_1. \cos \angle D_1$............... (3)

jika persamaan (2) dikalikan dengan a_1 dan persamaan (3) dikalikan dengan a_2, maka

$$a_1b^2 = a_1AD^2 + a_1.{a_2}^2 - 2AD.a_1a_2 \cos\angle D_1$$

$$\underline{a_2c^2 = a_1AD^2 + a_2{a^2}_1 + 2AD.a_1a_2 \cos\angle D_1} \; +$$

$$a_1b^2 + a_2c^2 = AD^2(a_1 + a_2) + a_1a_2(a_1 + a_2)$$

$$a_1b^2 + a_2a^2 = AD^2a + a_1a_2a$$

Sehingga diperoleh:

$$\boxed{AD^2a = a_1b^2 + a_2c^2 - a_1a_2a}$$

Persamaan diatas dikenal dengan Dalil Stewart

Apabila nilai a_1 dan a_2 yang diperoleh pada persamaan (1) disubstitusikan ke Dalil Steward, maka akan diperoleh dalil garis bagi sudut dalam berikut.

$$AD^2a = a_1b^2 + a_2c^2 - a_1a_2a$$

$$AD^2a = \frac{b^2ca}{b+c} + \frac{c^2ba}{b+c} - a_1a_2a$$

$$AD^2a = \frac{abc\,(b+c)}{b+c} - a_1a_2a$$

$$\boxed{\begin{gathered} AD^2 = bc - a_1a_2 \\ AD^2 = \sqrt{bc - \ a_1a_2} \end{gathered}}$$

Sedangkan untuk menentukan dalil garis bagi sudut luar, perhatikan kembali kesebangunan antara ΔAEC dan ΔBEA pada gambar 5.11 karena $\Delta AEC \sim \Delta BEF$, maka:

$$\frac{BF}{AC} = \frac{BE}{AE} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_2}$$

Karena $c_1 + c_2 = c$ maka $c_1 = \frac{ac}{b-a}$ dan $c_2 = \frac{bc}{b-a}$

Selanjutnya nilai c_1 dan c_2 disubstitusikan kedalam Dalil Steward, sehingga akan diperoleh dalil garis bagi sudut luar sebagai berikut.

$$c_2 a = CE^2 c + b^2 c_1 - c_1 c_2 c$$

$$CE^2 c = a^2 c_2 - b^2 c_1 + c_1 . c_2 . c$$

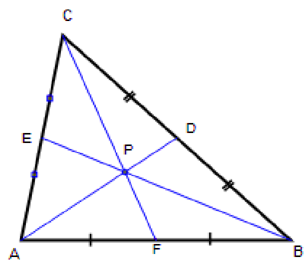
$$CE^2 c = \frac{a^2 bc}{b-a} - \frac{b^2 ac}{b-a} + c_1 . c_2 . c$$

$$CE^2 c = \frac{abc\,(a-b)}{b-a} + c_1 c_2 c$$

$$\boxed{\begin{array}{c} CE^2 = c_1 c_2 - ab \\ AD^2 = \sqrt{c_1 c_2 - ab} \end{array}}$$

3. Garis berat

Dalam setiap segitiga terdapat tiga buah garis berat yang berpotongan di sebuah titik yang disebut dengan titik berat. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.12

Ketiga garis berat ΔABC, yakni AD, BE, dan CF masing-masing memotong sisi di hadapannya menjadi dua bagian yang sama panjang.

Ketiga garis itu bertemu di satu titik Z yang di sebut titik berat. Misalkan masing-masing sudut A, B, dan C adalah α, β, dan θ maka $\angle GAB = \angle ABC = \beta$. Dengan menggunakan dalil cosinus dalam ΔACG

Maka diperoleh[11]:

$$CG^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)$$

Karena $CG = 2CF$ dan $(\alpha + \beta) = 180^0 - \theta$

$$(2\,CF)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^0 - \theta)$$

$$4\,CF^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

$$\boxed{CF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}}$$

Persamaan ini disebut rumus panjang garis berat. Dengan cara yang sama diperoleh juga rumus berat lainnya yaitu :

$$\boxed{AD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}}$$

$$\boxed{BE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta}}$$

Latihan Soal

1. Hitunglah panjang luas segitiga ABC yang diminta, jika kedua sudut dan panjang sisi lainnya diketahui :

   a. $\angle A = 45^0, \angle B = 90^0$, dan $a = 6$ cm

[11] Ibid, h. 137

b. $\angle A = 75^0, \angle B = 55^0$, dan $b = 7{,}5$ cm

c. $\angle A = 100^0, \angle B = 25^0$, dan $a = 8$ cm

d. $\angle A = 120^0$, $\angle C = 15^0$, dan $c = 5{,}5$ cm

e. $\angle B = 24{,}6^0, \angle C = 95{,}5^0$ dan $b = 12$cm

f. $\angle B = 32{,}5^0, \angle C = 49{,}5^0$ dan $c = 15$ cm

2. Hitunglah besar sudut-sudut segitiga ABC yang diminta, jika kedua panjang sisinya dan sebuah sudut lainnnya.

a. $\angle A = 30^0, a = 13$ cm, dan $b = 16$ cm

b. $\angle A = 45^0, a = 4$ cm, dan $b = 7{,}5$ cm

c. $\angle B = 24{,}6^0, b = 7$ cm, dan $c = 6$ cm

d. $\angle B = 120^0, b = 11$ cm dan $c = 12$ cm

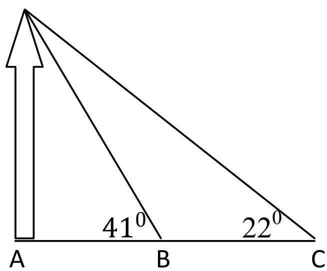
e. $\angle C = 85^0, a = 5$ cm, dan $c = 17$ cm

3. Diketahui bahwa ΔKLM dengan $\angle K = 33^0$, sisi $p = 31{,}5$ cm dan $q = 51{,}8$ cm. Tentukan :

a. Besar $\angle Q$ (ada dua kemungkinan)

b. Jelaskan kedua kemungkinan teersebut

4. Perhatikan gambar berikut.

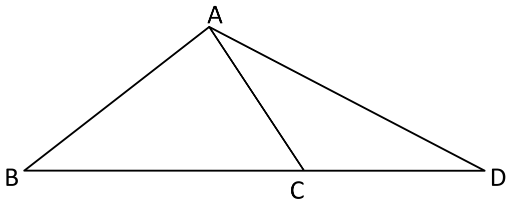


Gambar 5.13

Diketahui bangunan menara memiliki puncak D dari titik dasar C, kemudian memiliki suatu sudut elevasi 22^0 dan jika dari titik B memiliki sudut elevasi 41^0 sedangkan panjang CB $= 12cm$. Maka tentukan :

a. Panjang CD
b. Panjang AB
c. Tinggi menara AD

5. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.14

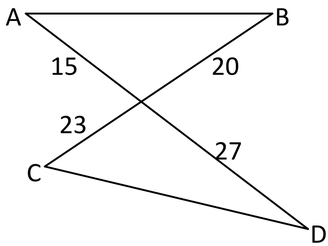
Jika diketahui $\mathrm{AC} = \mathrm{CD} = \mathrm{b}$ dan $\angle\mathrm{DAB} = \theta$, dan $\angle\mathrm{ADB} = \emptyset$ maka tentukanlah :

a. $\theta = \frac{\angle\mathrm{A} - \angle\mathrm{B}}{2}$
b. $\emptyset = \frac{1}{2}\angle\mathrm{C} + 90^0$

6. Hitunglah besar sudut yang diminta jika ketiga sisi segitiga ABC diketahui.

a. $\angle\mathrm{A}$; jika $\mathrm{a} = 12\ \mathrm{cm}, \mathrm{b} = 13\ \mathrm{cm}$ dan $\mathrm{c} = 5\ \mathrm{cm}$
b. $\angle\mathrm{B}$; jika $\mathrm{a} = 15\ \mathrm{cm}, \mathrm{b} = 3{,}2\ \mathrm{cm}$ dan $\mathrm{c} = 5\ \mathrm{cm}$
c. $\angle\mathrm{C}$; jika $\mathrm{a} = 6\ \mathrm{cm}, \mathrm{b} = 7\ \mathrm{cm}$ dan $\mathrm{c} = 10\ \mathrm{cm}$

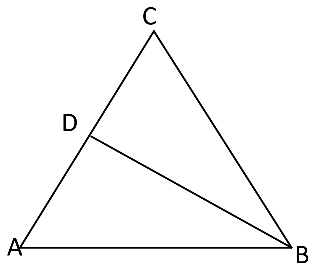
7. Dua kapal A dan B meninggalkan pelabuhan C pada saat yang sama. Keduanya berlayar pada jalur yang lurus dengan membentuk sudut 60^0 satu sama lain. Jika kecepatan kapal A 25 km/jam dan kecepatan kapal B 15 km/jam, berapakah jarak antara A dan B setelah berlayar selama 1 jam ?
8. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.15

Jika CD = 30, maka hitunglah panjang AB!

9. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.16

Jika D berada pada garis AC yakni sebagai titik tengah dan AC = BCA, maka berapakah panjang AB?

10. Hitunglah luas ΔABC jika diketahui ketiga sisinya.
    a. $a = 4\ cm, b = 5\ cm$,dan $c = 6$ cm

b. $a = 12\ cm, b = 13\ cm$, dan $c = 7\ cm$

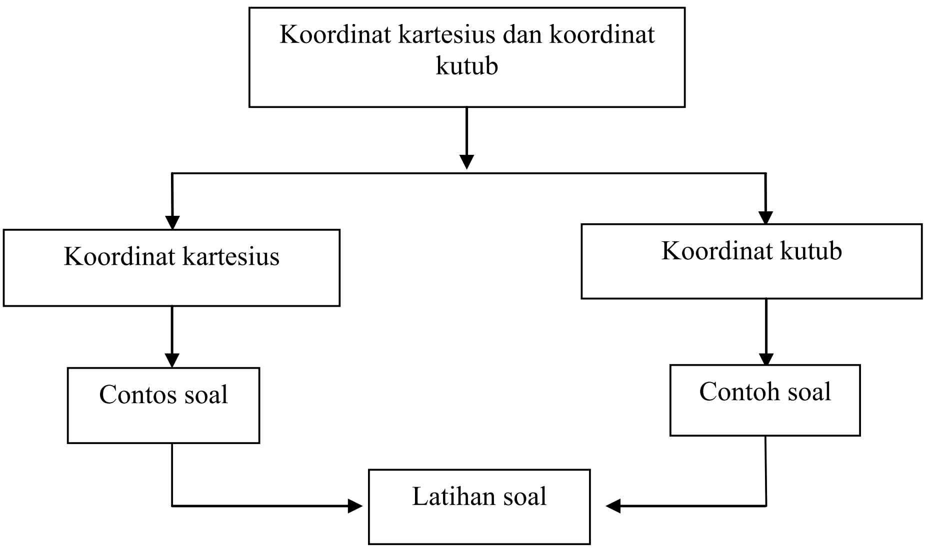
c. $a = 12\ cm, b = 14\ cm$, dan $c = 17\ cm$

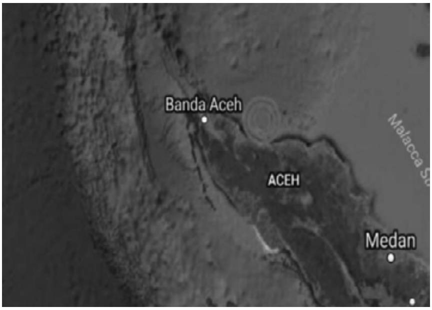
d. $a = 4{,}5\ cm, b = 3{,}5\ cm$ dan $c = 5\ cm$

BAB 6

KOORDINAT KARTESIUS DAN KOORDINAT KUTUB

PETA KONSEP





Gambar 6.1

1. Definisi koordinaat kartesius dan koordinaat kutub
2. Hubungan antara koordinat kartesius dan koordinat kutub
3. Perbedaan dan persamaan antara koordinat kartesius dan koordinat kutub

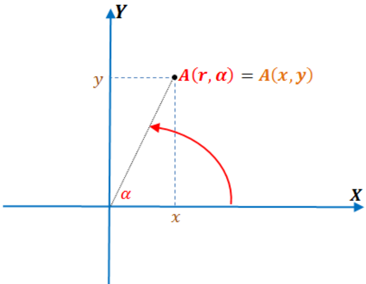
Ilustrasi

Masih ingatkah kalian dengan gempa di Aceh yang terjadi pada beberapa waktu yang lalu? Aceh diguncang gempa berkekuatan 5,4 SR. Berdasarkan data Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) Stasiun Aceh Besar menyebutkan titik episentrum atau pusat gempa berlokasi 3,91 lintang utara, dan 95,76 bujur timur. Gempa bumi ini terjadi di laut dengan jarak sekitar 74 kilometer barat daya Kabupaten Aceh Singkil dengan kedalaman 25 kilometer. Gempa tersebut juga terasa hingga hampir seluruh wilayah Aceh.

Masih seringnya peristiwa gempa yang terjadi di Indonesia membat pengetahuan tentang kegempaan menjadi penting untuk dilakukan, karena terjadinya gempa tidak pernah bisa diprediksi. Hal ini untuk mencegah banyaknya korban jiwa yang terdampak akibat gempa, mengingat sejumlah wilayah di Indonesia tergolong daerah yang rawan terhadap gempa.

Materi

Dalam matematika ada beberapa macam koordinat, antara lain koordinat kartesius, koordinat kutub, koordinat tabung, koordinat bola, dan lainya. Tetapi yang sering digunakan adalah koordinat kartesius dan koordinat kutub. Berikut ini akan dijelaskan tentang koordinat kartesius dan koordinat kutub.



Gambar 6.2

A. Pengertian koordinat kartesius

Koordinat kartesius adalah letak suatu titik pada bidang yang dinyatakan dalam absis (x) dan ordinat (y). Pada koordinat kartesius letak suatu titik P dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut P(x,y). Koordinat x sebagai absis, yaitu jarak titik ke sumbu y dan koordinat y sebagai ordinat, yaitu jarak titik ke sumbu x.

B. Pengertian koordinat kutub

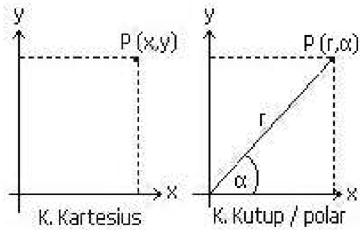
Koordinat polar atau koordinat kutub adalah letak suatu titik pada bidang yang dinyatakan dalam bentuk jarak (r) dan sudut (α). Pada koordinat kutub (polar), letak suatu P dinyatakan dengan dua ukuran, yaitu jarak r dan ukuran sudut α atau dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut P(r, α).

C. Hubungan antara koordinat kartesius dan koordinat kutub

Jarak r adalah jarak titik P(x,y) ke titik asal O(0,0). Jarak r diperoleh dengan rumus pythagoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sudut α adalah sudut antara sumbu X positif dengan garis penghubung titik P dengan titik asal O(0,0) yang dihitung berlawanan arah dengan arah jarum jam. Koordinat kutub titik P dinyatakan dengan P(r, α). Jika digambarkan, grafik koordinat kartesius dan grafik koordinat polar sebagai berikut:



Gambar 6.3

Pada koordinat polar atau kutub dengan titik pusat O, posisi titik (objek) P dinyatakan dengan (r,α) dimana r adalah jarak OP dan α adalah sudut antara OP dengan sumbu OX positif. Besar sudut α dihitung mulai dari sumbu OX positif berputar berlawanan arah dengan arah perputaran jarum jam. Pada koordinat kartesius, letak suatu titik P dinyatakan dengan himpunan pasangan berurut P(x,y), dimana koordinat x sebagai absis, yaitu jarak titik ke sumbu y dan koordinat y sebagai ordinat, yaitu jarak titik ke sumbu x.

Pada koordinat kutub, letak suatu titik P dinyatakan dengan dua ukuran, yaitu jarak r dan ukuran sudut α. Jarak r adalah titik P (x,y) ke titik asal O (0,0). Jarak r diperoleh dengan rumus pythagoras, r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ Sudut α adalah sudut antara sumbu X positif dengan garis penghubung titik P dengan titik asal 0 (0,0) yang dihitung berlawanan arah dengan arah jarum jam. Koordinat kutub titik P dinyatakan dengan P (r, α^0).

Apabila koordinat kutub titik P(r, α^0) diketahui, maka koordinat kartesius P(X, Y) ditentukan dengan rumus:

$$\sin \alpha^0 = \frac{y}{r}, \Leftrightarrow y = r \sin \alpha^0$$

$$\cos \alpha^0 = \frac{x}{r}, \Leftrightarrow x = r \cos \alpha^0$$

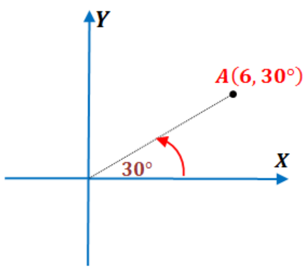
Sebaliknya, apabila koordinat titik P(x,y) diketahui, maka koordinat kutub titik P(r,α) dapat ditentukan dengan rumus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ dan } \tan \alpha^\circ = \frac{y}{x}$$

Contoh Soal

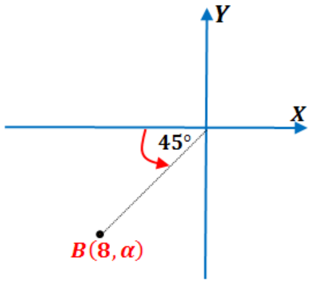
1. Nyatakan titik A dan B di bawah ini dalam koordinat cartesius !

   a.



Gambar 6.3

b.



Gambar 6.4

Jawab

a. Diketahui koordinat polar A(6, 30°)

$A(6, 30°) = A(r,\alpha)$

$r = 6$ dan $\alpha = 30°$

$x = r \cos \alpha$

$y = r \sin \alpha$

$x = 6\cos 30°$

$= 6\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}\ )$

$= 3\sqrt{3}$

$y = 6 \sin 30°$

$= 6\ (\frac{1}{2})$

$= 3$

Jadi koordinat kartesiusnya adalah $A(3\sqrt{3}\ , 3)$

b. Diketahui koordinat polar A(8, 225°)

A (8, 225°) = A (r, α)

r = 8 dan α = 225°

x = r cos α

y = r sin α

x = 8 cos 225°

$= 8\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$

$y = 8 \sin 225^0$

$= 8\ (-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$

Jadi koordinat kartesiusnya adalah A $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

2. Jika diketahui koordinat kutub titik P adalah (r,α) maka koordinat cartesius P (x,y) dapat ditentukan dengan hubungan :

X = r cos α

Y = r sin α

Jawab

X = r cos α

= 6 cos 135°

= 6 (-sin 45°)

$= 6\ (-\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= -3\sqrt{2}$

Y = r sin α

= 6 sin 135°

= 6 cos 45°

$= 6\ (\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= 3\sqrt{2}$

Jadi koordinat kartesius titik C adalah $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

3. Jika diketahui koordinat cartesius P(x,y) maka koordinat kutub P(r,α) dapat ditentukan dengan hubungan :

$r^2 = x^2 + y^2$

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$, $\alpha = \text{arc tan } (\frac{y}{x})$

Jawab

$r^2 = (-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2$ $\quad\quad\quad$ $\tan \alpha = \frac{-2}{-2\sqrt{3}}$

$= 16$ $\quad\quad\quad$ $= \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Maka r = 4 dan $\alpha = 210°$ karena ada di kuadran III

Jadi koordinat kutub titik P adalah (4, 210°).

4. Jika diketahui koordinat kartesius titik P(5,-5), maka hitunglah koordinat kutubnya!

Jawab

Diketahui x = 5 dan y = -5 berada di Kuadran IV (270º, -360º).

Maka;

$r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = 5^2 + (-5)^2$

$r^2 = 25 + 25$

$r^2 = 50$

$r = \sqrt{50}$

$r = \sqrt{25} \text{ x } \sqrt{2}$

$r = 5\sqrt{2}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\tan \theta = \frac{-5}{5} = -1$

tan yang bernilai 1 adalah sudut 45º. Sedangkan 45º di Kuadran IV sama dengan sudut 360º – 45º = 315º. Sehingga koordinat kutub yang dimaksud adalah P($5\sqrt{2}$, 315º)

5. Jika diketahui koordinat kutub titik P($5\sqrt{2}$, 315º) maka hitunglah koordinat kartesiusnya!

   Diketahui

   $r = 5\sqrt{2}$ dan $\theta = 315^o$ maka,

   $x = r.\cos\theta$

   $x = 5\sqrt{2}.\cos 315^o$

   $x = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 5$

   $y = r.\sin\theta$

   $y = 5\sqrt{2}.\sin 315^o$

   $y = 5\sqrt{2} \times (-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5$

   Sehingga koordinat kartesius yang dimaksud adalah P(5, -5)

6. Tentukan koordinat kartesius dari titik P(8, 240°)!

   Penyelesaian

   $x = r.\cos A = 8.\cos 240° = 8(-\frac{1}{2}) = -4$

   $y = r.\sin A = 8.\sin 240° = 8(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$

   Sehingga koordinat kartesiusnya adalah $(-4, -4\sqrt{3})$.

7. Tentukan koordinat kutub dari titik (2, -2)!

   Penyelesaian

   $r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$

$r = \sqrt{8} = \sqrt{4}\ .\ \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$

Ditunjukan bahwa A adalah sudut 45° di kuadran IV karena x positif dan y negatif, maka A = 360° – 45° = 315°,

Jadi koordinat kutubnya adalah ($2\sqrt{2}$, 315°).

Latihan Soal

Ubahlah koordinat cartesius berikut ke bentuk koordinat kutub

1. a. (4, 5)

   b. (-5, 12)

   c. (-2, -4)

2. a. (2, $\sqrt{3}$)

   b. ($\frac{1}{3}\sqrt{3}$, -1)

   c. ($\sqrt{2}$, -2)

Ubahlah koordinat kutub berikut ke bentuk koordinat kartesius

3. a. (6, 90°)

   b. (4, 125°)

   c. (2, 150°)

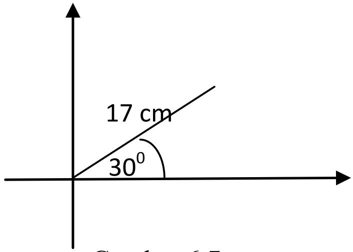
4. a. ($\sqrt{3}$, 210°)

   b. ($\sqrt{2}$, 270°)

   c. ($\sqrt{11}$, 320°)

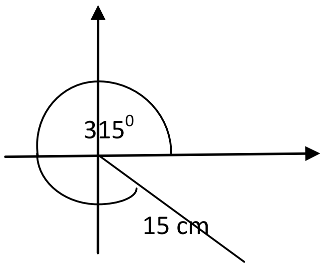
Tulislah koordinat cartesius pada gambar berikut

5.



Gambar 6.7

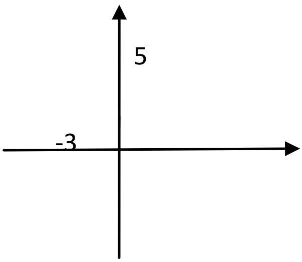
6.



Gambar 6.8

Tulislah koordinat kutub pada gambar berikut.

7.



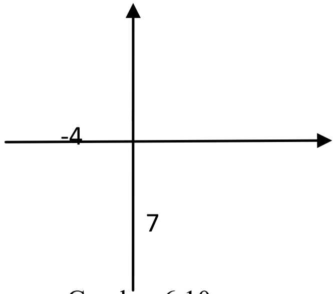
Gambar 6.9

8. Koordinat kartesius titik T adalah (50, y) dan koordinat kutubnya adalah (100, $\alpha°$), jika titik T terletak di kuadran 4, hitunglah:

   a. Titik Y

   b. $\alpha°$

9.



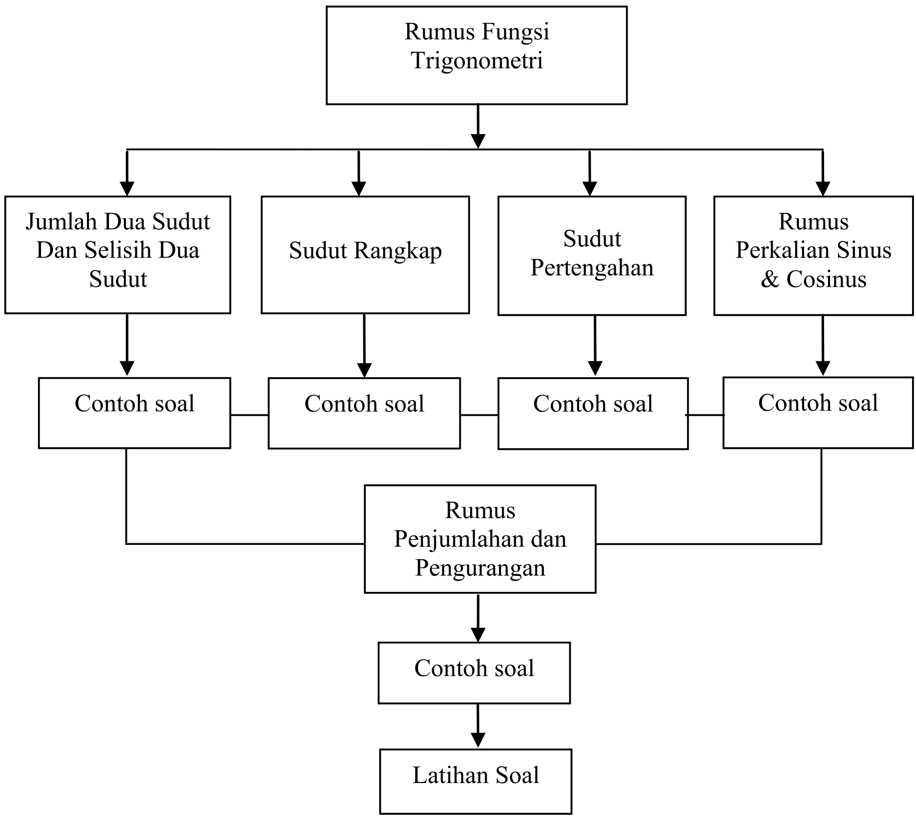
Gambar 6.10

10. Koordinat kartesius titik T adalah (x,3) dan koordinat kutubnya adalah $(3\sqrt{2}, \alpha°)$. Jika titik T terletak di kaudran 1, hitunglah:
    a. Titik x
    b. $\alpha°$

BAB 7

RUMUS FUNGSI TRIGONOMETRI

PETA KONSEP



Gambar 7.1

1. Jumlah dua sudut dan selisih dua sudut
2. Sudut rangkap
3. Sudut pertengahan
4. Rumus perkalian sinus dan cosinus
5. Rumus penjumlahan dan pengurangan
6. Mampu memahami konsep soal-soal

Ilustrasi

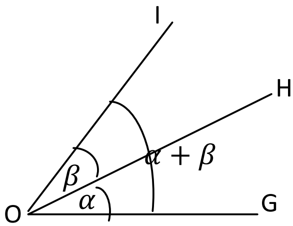
Zebra cross yang terdapat di jalan raya difungsikan bagi pejalan kaki yang hendak menyeberang. Dalam penggunaannya, setiap pejalan kaki yang melintas tetap harus memperhatikan situasi lalu lintas dan rambu-rambu yang ada. Zebra cross sebagai marka jalan tentu saja punya fungsi khusus bagi pejalan kaki. Biasanya marka jalan berfungsi untuk mengatur lalu lintas di jalan raya.

Sama halnya zebra cross, marka jalan yang berfungsi sebagai ruang penyeberangan bagi pejalan kaki. Zebra cross ini juga merupakan area dilarang parker, agar pejalan kaki yang menyeberang dapat terlihat oleh pengemudi kendaraan di jalan. Pejalan kaki yang akan menyeberang biasanya menunggu lampu lalu lintas merah barulah penyeberang bisa melintas melewati Zebracross.

Materi

A. Rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut

Misalnya, α dan β adalah sudut-sudut sebarang, maka jumlah α dan β adalah (α + β) dan selisih antara a dan b adalah (α – β).

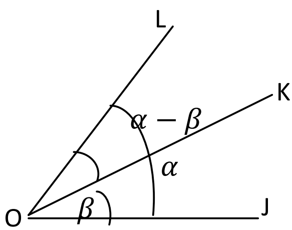


Gambar 7.2

Pada gambar 7.2 :

$\angle GOH = \alpha$; $\angle HOI = \beta$

$\angle GOI = \alpha + \beta$



Gambar 7.3

Pada gambar 7.3 :

$\angle JOL = \alpha$; $\angle JOK = \beta$

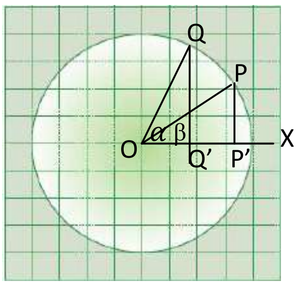
$\angle KOL = \alpha - \beta$

Sekarang, kita akan menurunkan rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut selisih dua sudut, yaitu sin (α + β), sin (α – β), cos (α + β), cos (α – β), tan (α + β), tan (α – β)[12].

1. Rumus untuk cos (α – β) dan cos (α + β)[13]

   Untuk menurunkan rumus cos (α – β) dan cos (α + β), perhatikan gambar 7.4.

   Gambar 7.4 menunjukkan lingkaran satuan dengan titik $P(x_1,y_1)$ dan titik $Q(x_2,y_2)$ berada pada lingkaran. Misalkan ∠XOQ = α dan ∠XOP = β, maka ∠POQ = α – β.

   Gambar 7.4

   Perhatikan Δ OPP':

   $\sin \beta = \frac{PP'}{OP} = \frac{y_1}{r}$

   $y_1 = r \sin \beta$

   $\cos \beta = \frac{OP'}{OP} = \frac{x_1}{r}$

   $x_1 = r \cos \beta$

   Kita peroleh koordinat P dapat ditulis sebagai (r cos β, r sin β).

   Perhatikan Δ OQQ´:

   $\sin \alpha = \frac{QQ'}{OQ} = \frac{y_2}{r}$

   $y_2 = r \sin \alpha$

   $\cos \alpha = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{x_2}{r}$

   $x_2 = r \cos \alpha$

[12] S. Wirodikromo, op.cit, h. 98
[13] Ibid, h. 99

Kita peroleh koordinat Q sebagai (r cos α, r sin α).

Panjang PQ dapat dicari dengan rumus jarak, yaitu:

$PQ^2 = (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha - r \sin \beta)^2$

$= r^2 \cos^2\alpha - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \cos^2\beta + r^2 \sin^2\alpha - 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + r^2 \sin^2\beta$

$= r^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + r^2 (\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta$

$= r^2 + r^2 - 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta$

$= 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha - \beta)$ .... (1)

Berdasarkan aturan cosinus, jika kita perhatikan Δ POQ, memberikan

$PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2\, OQ \,.\, OP \cos \angle POQ$

$= r^2 + r^2 - 2.r.r \,.\, \cos (\alpha - \beta)$

$= 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha - \beta)$ .... (2)

Persamaan (1) = (2), sehingga:

$2r^2 - 2\, r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta = 2r^2 - 2r^2 \cos (\alpha - \beta)$

$\leftrightarrow 2r^2 \cos (\alpha - \beta) = 2r^2 - 2r^2 + 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + 2r^2 \cos \alpha \cos \beta$

$\leftrightarrow 2r^2 \cos (\alpha - \beta) = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta + 2r^2 \cos \alpha \cos \beta$

$\leftrightarrow 2r^2 \cos (\alpha - \beta) = 2r^2 (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)$

$\leftrightarrow \cos (\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$

$\leftrightarrow \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

Kita peroleh:

$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ....(3)

Untuk mendapatkan rumus cos (α + β), kita dapat mensubstitusikan –β ke persamaan (3).

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos[\alpha-(-\beta)]\\ &= \sin\alpha\sin(-\beta)+\cos\alpha\cos(-\beta)\\ &= -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Kita peroleh:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$..................(4)

Contoh:

Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, hitunglah:

$\cos 15^0$

Jawab

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ)\\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}.\ \sqrt{3}\ .\ \tfrac{1}{2}.\ \sqrt{2}\\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{6}\\ &= \tfrac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\end{aligned}$$

Jadi, $\cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

2. Rumus untuk sin (α + β) dan sin (α – β)

   Untuk menurunkan rumus sin (α + β), perlu kita ingat kembali rumus-rumus sudut berelasi, diantaranya:

   $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ dan $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

Dengan menggunakan rumus tersebut, kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha + b) &= \cos[90° - (\alpha + \beta)] \\
&= \cos[(90° - \alpha) - \beta] \\
&= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

sehingga kita mendapatkan (persamaan 5) sebagai berikut.

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Untuk mendapatkan rumus sin (α – β), kita mensubstitusikan –β ke persamaan 5 diatas,

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] \\
&= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Kita peroleh (persamaan 6) sebagai berikut.

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

3. Rumus untuk tan (α + β) dan sin (α – β)

   Untuk menurunkan rumus tan (α + β), perlu kita ingat kembali identitas trigonometri berdasarkan hubungan perbandingan, kjokmdi antaranya:

   $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

   Dengan menggunakan rumus tersebut, kita peroleh:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\ (\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

pembilang dan penyebut dibagi dengan cos α cos β

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\ \alpha+\tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\ .\tan\ \beta}$$

Kita peroleh (persamaan 7) sebagai berikut.

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\ \alpha+\tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\ .\tan\ \beta}}$$

Untuk mendapatkan rumus tan (α – β), kita dapat mensubtitusikan – β ke persamaan (7), kita dapatkan:

$$\tan\alpha-\beta = \tan[\alpha+(-\beta)]$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\ (-\beta)}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\ .\tan\beta}$$

Kita peroleh (persamaan 8) sebagai berikut.

$$\boxed{\tan\alpha-\beta = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\ .\tan\beta}}$$

Contoh soal.

Carilah tan 50^0!

Jawab.

tan 75^0 = tan (45^0 + 30^0)

$$= \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 x \tan 30^0}$$

$$= \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 x \tan 30^0}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\ x\ \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

B. Rumus trigonometri untuk sudut rangkap

1. Rumus untuk sin 2α

sin 2α = sin (α + α)

$= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$

= 2 sin α cos α

Sehingga kita mendapatkan :

sin 2α = 2 sin α cos α

2. Rumus untuk cos 2α

cos 2α = cos (α + α)

$= \cos \alpha \,.\, \cos \alpha - \sin \alpha .\, \sin \alpha$

$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Sehingga kita mendapatkan :

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

3. Rumus untuk tan 2α

   $\tan 2\alpha \quad = \tan(\alpha + \alpha)$

   $\quad = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha . \tan\alpha}$

   Sehingga kita mendapatkan :

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan\alpha . \tan\alpha}}$$

Contoh:

1. Misalnya, A adalah sudut di kuadran II dan sin A = $\frac{3}{5}$, hitunglah:

   a. sin 2A

   b. cos 2A

   Jawab:

   Jika sin A = $\frac{3}{5}$, $\cos A = -\frac{4}{5}$

   a. sin 2A $= 2 \sin A \cos A$

   $= 2. \left(\frac{3}{5}\right) . \left(-\frac{4}{5}\right)$

   $= -\frac{24}{25}$

   Jadi sin 2A adalah $-\frac{24}{25}$

   b. cos 2A $= \cos^2 A - \sin^2 A$

   $= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

   $= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$

$= \frac{7}{25}$

Jadi cos 2A adalah $\frac{7}{25}$

Contoh

Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, hitunglah:

a. 4 sin 30° cos 30°

b. 1 – 2 $\cos^2 60°$

Jawab

a. 4 sin 22 $\frac{1}{2}$° cos 22 $\frac{1}{2}$° = 2 (2 sin 4 sin 30° cos 30°)

= 2 . sin 2(30°)

= 2 . sin 60°

= 2 . $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

= $\sqrt{3}$

b. 1 – 2 $\cos^2 75°$ = cos 2(60°)

= cos 120°

= cos (180° − 60°)

= -cos 60°

= - $\frac{1}{2}$

C. Rumus trigonometri untuk sudut pertengahan

1) Rumus untuk sin $\frac{1}{2}\alpha$

Untuk menentukan rumus sin $\frac{1}{2}\alpha$, kita ingat kembali rumus:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$\leftrightarrow 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ………………………. (12)

Dengan mensubstitusikan α = $\frac{1}{2}\alpha$ ke persamaan (12), maka di dapat:

$\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos 2\,(\frac{1}{2}\alpha)}{2}$

$\leftrightarrow \sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\leftrightarrow \sin \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Sehingga kita mendapatkan:

$$\boxed{\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

2) Rumus untuk $\cos \frac{1}{2}\alpha$

Untuk menentukan rumus $\cos \frac{1}{2}\alpha$, kita ingat kembali rumus:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\leftrightarrow 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$\leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ………………………. (14)

Dengan mensubstitusikan α = $\frac{1}{2}\alpha$ ke persamaan (14), maka didapat:

$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos 2\,(\frac{1}{2}\alpha)}{2}$

$\leftrightarrow \cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\leftrightarrow \cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Sehingga kita mendapatkan:

$$\boxed{\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

3) Rumus untuk $\tan\frac{1}{2}\alpha$

Untuk menentukan rumus $\tan\frac{1}{2}\alpha$, kita ketahui bahwa:

$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}}{\cos\frac{1}{2}}\alpha$

$\leftrightarrow \tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

$\leftrightarrow \tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$

Sehingga kita mendapatkan:

$\tan\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$ .... (16a)

Contoh

Hitunglah: a. sin 22,5° b. cos 22,5°

Jawab:

a. $\sin 15° = \sin\frac{1}{2}(45°)$

$= \pm\frac{\sqrt{1-\cos 45°}}{2}$

$= \pm\frac{\sqrt{1-\frac{1\sqrt{2}}{2}}}{2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{2}}$$

b. cos 15° = cos $\frac{1}{2}$ (45°)

$$= \pm\frac{\sqrt{1 - cos\ 45°}}{2}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1 + \frac{1\ \sqrt{2}}{2}}}{2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2}}$$

D. Rumus perkalian sinus dan cosinus

1. Rumus untuk 2 sin α cos β

   Kita ingat kembali rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut untuk sinus dan cosinus.

   sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β

   <u>sin (α – β) = sin α cos β – cos α sin β +</u>

   sin (α + β) + sin (α – β) = 2 sin α cos β

   Kita peroleh :

$$\boxed{2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}$$

2. Rumus untuk $2 \cos \alpha \sin \beta$

$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\underline{\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \ \ -}$

$\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

Kita peroleh :

$$\boxed{2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)}$$

Contoh[14]

Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, hitunglah:

a. $2 \sin 37\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$ b. $2 \sin 82\frac{1}{2}° \cos 37\frac{1}{2}°$

Jawab

a. $2 \sin 37\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}° = \sin (37\frac{1}{2}° + 7\frac{1}{2}°) + \sin (37\frac{1}{2}° - 7\frac{1}{2}°)$

$= \sin 45^0 + \sin 30^0$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

Jadi, $2 \sin 37\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$ adalah $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

b. $2 \sin 82\frac{1}{2}° \cos 37\frac{1}{2}° = \sin (82\frac{1}{2}° + 37\frac{1}{2}°) - \sin (82\frac{1}{2}° - 37\frac{1}{2}°)$

$= \sin 120^0 + \sin 45^0$

[14] J. Gunawan, *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*, Grasindo, Jakarta, 2006, h. 24

$= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

Jadi, 2 sin $82\frac{1}{2}°$ cos $37\frac{1}{2}°$ adalah $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

3. Rumus untuk 2 cos α cos β

   cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

   $\underline{\text{cos }(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sin } \alpha \text{ sin } \beta \ +}$

   cos (α + β) + cos (α – β) = 2 cos α – cos β

   Kita peroleh :

2 cos α cos β = cos (α + β) + cos (α – β)

4. Rumus untuk 2 sin α sin β

   cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

   $\underline{\text{cos }(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sin } \alpha \text{ sin } \beta \ -}$

   cos (α + β) – cos (α – β) = -2 sin α sin β

   Kita peroleh :

-2 sin α sin β = cos (α + β) – cos (α – β)

Berdasarkan rumus-rumus perkalian sinus dan cosinus yang telah di uraikan di atas, maka dapat dirangkum sebagai berikut.

2 sin α cos β = sin (α + β) + sin (α – β)
2 cos α sin β = sin (α + β) – sin (α – β)
2 cos α cos β = cos (α + β) + cos (α – β)
-2 sin α sin β = cos (α + β) – cos (α – β)

Contoh

Tanpa menggunakan tabel dan kalkulator, hitunglah:

a. $2 \cos 52\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$

b. $2 \cos 82\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$

Jawab:

a. $2 \cos 52\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}° = \cos (52\frac{1}{2}° + \cos 7\frac{1}{2}°) + \cos (52\frac{1}{2}° - \cos 7\frac{1}{2}°)$

$= \cos 60° + \cos 45°$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$

Jadi, $2 \cos 52\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$ adalah $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$

b. $2 \cos 82\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}° = \cos (82\frac{1}{2}° + 7\frac{1}{2}°) + \cos (82\frac{1}{2}° - 7\frac{1}{2}°)$

$= \cos 90° + \cos 75°$

$= 0 + \cos (45° + 30°)$

$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Jadi, $2 \cos 82\frac{1}{2}° \cos 7\frac{1}{2}°$ adalah $\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

E. Rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus

Rumus perkalian dan sinus dan cosinus yang telah kita pelajari sebelumnya, dapat di ubah menjadi rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus. Coba kita tuliskan kembali rumus perkalian sinus dan cosinus pada rumus dengan cara ruas bagian kiri di ubah menjadi ruas bagian kanan, dan sebaliknya sehingga kita peroleh:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Dengan mengambil beberapa variabel baru, misalnya:

$$\alpha+\beta=A \qquad \text{dan} \qquad \alpha-\beta=B$$

Maka jika kedua bentuk tersebut kita jumlahkan dan kita kurangkan, akan di peroleh bentuk :

$\alpha + b = A$	$\alpha+\beta=A$
$\alpha - b = B$	$\alpha-\beta=B$
$2\alpha = A + B$	$2\beta = A - B$
$\Leftrightarrow \alpha = (A+B)$	$\Leftrightarrow \beta = (A-B)$

Selanjutnya, subtitusikan persamaan-persamaan baru tersebut ke dalam rumus perkalian sinus dan cosinus, sehingga diperoleh bentuk:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$
$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

Latihan Soal

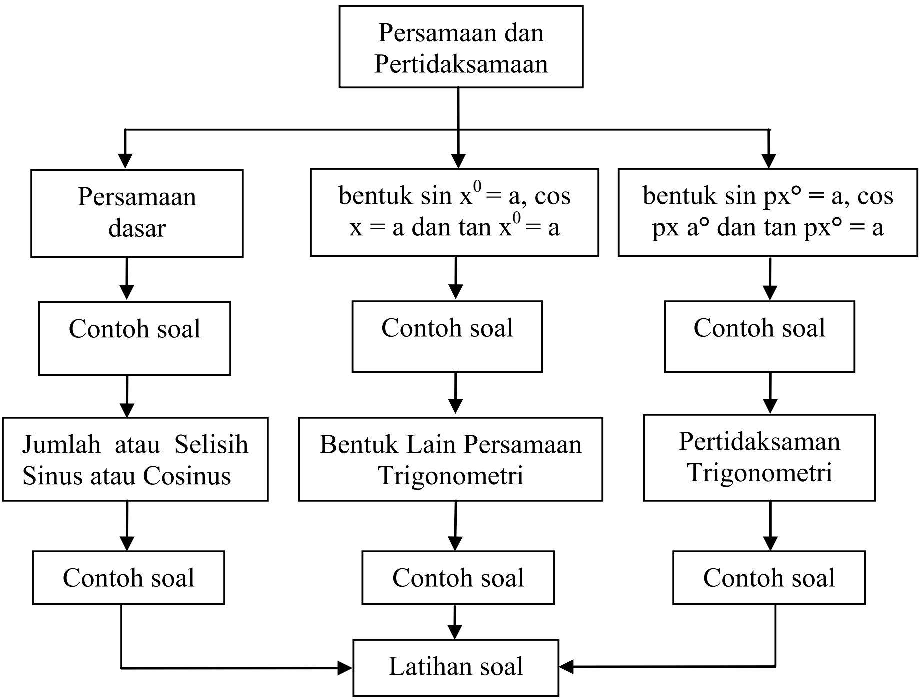
1. Dengan menggunakan sudut sudut istimewa tentukan nilai dari
   a. $\sin 15^0$
   b. $\cos 75^0$
   c. $\tan 105^0$
   d. $\sin 135^0$
   e. $\cos 210^0$
2. Tentukan nilai dari
   a. $\sin (30 + 60)^0$
   b. $\cos (150 - 30)^0$
   c. $\cos (45 + 135)^0$
3. Jika diketahui $\sin A = \frac{6}{10}$ dan $\cos B = \frac{3}{5}$ (A tumpul dan B lancip), maka tentukan
   a. $\sin (A + B)$
   b. $\sin (A - B)$

4. Jika diketahui sin A $= \frac{8}{17}$ dan cos B $= \frac{7}{25}$ (A dan B lancip), maka tentukan
   a. cos (A + B)
   b. cos (A – B)
5. Jika diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ (kuadran 1) maka tentukan
   a. cos 2A
   b. sin 2A
   c. tan A
6. Jika diketahui sin A = $\frac{3}{5}$ (kuadran 1) maka tentukan
   a. tan 2A
   b. cot 2A
   c. cos A
7. Jika diketahui cos A = $\frac{12}{13}$ (kuadran 1) maka tentukan sin $\frac{1}{2}$ A
8. Jika diketahui cos A = $\frac{-5}{13}$ (kuadran 2) maka tentukan cos $\frac{1}{2}$ A
9. Jika diketahui tan A = $\frac{8}{6}$ (kuadran 3) maka tentukan tan $\frac{1}{2}$ A
10. Jika diketahui sin A = $\frac{-4}{5}$ (kuadran 3) maka tentukan cot $\frac{1}{2}$ A

BAB 8

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

PETA KONSEP



Gambar 8.1

1. Persamaan dasar
2. bentuk $\sin x^0 = a$, $\cos x = a$ dan $\tan x^0 = a$
3. bentuk $\sin px° = a$, $\cos px\ a°$ dan $\tan px° = a$
4. Jumlah atau Selisih Sinus atau Cosinus
5. Persamaan kuadrat dalam sinus, cosinus dan tangen
6. Bentuk lain persamaan trigonometri
7. Pertidaksaman trigonometri

Ilustrasi

Pernahkah kalian membeli beras di sebuah warung? Perhatikan bagaimana penjual menakar/ menimbang beras yang dibeli, seimbang atau tidak? Takaran adalah alat yang digunakan untuk menakar. Dalam aktifitas bisnis, takaran biasanya dipakai untuk mengukur satuan dasar ukuran isi barang cair, makanan dan berbagai keperluan lainnya.

Mengurangi timbangan dan takaran adalah mengurangi ukuran atau jumlah barang yang di timbang atau ditakar. Misalnya ukuran gula 1 kg tetapi ukuran itu dikurangi. Tindakan seperti ini adalah tindakan curang yang seharusnya dijauhi. Perbuatan ini adalah kebohongan kepada pembeli. Perbuatan mengurangi takaran dan timbangan akan menghilangkan kepercayaan dari orang lain.

Materi

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

A. Persamaan Dasar

1. $\sin x° = \sin a°$

   $x = a + k.360°$ atau $x = (180 - a) + k.360°$ (kuadran I atau II)

2. $\cos x° = \cos a°$

   $x = a + k.360°$ atau $x = -a + k.360°$ (kuadran I atau IV)

3. $\tan x° = \tan a°$

   $x = a + k.360°$

Keterangan : k = bilangan bulat

Catatan :

- Jika ada persamaan $\cos x = \sin a$, $\cot x = \tan a$, $\sec x = \text{cosec } a$, dan sebaliknya, salah satu diubah menjadi $(90 - a)°$. Contoh : $\cos x = \sin a \rightarrow \cos x = \cos (90 - a)°$

Contoh:

- $\sin x° = \sin 45°$

  Penyelesaian :

  $\sin x = \sin 45°$, maka diperoleh :

  $x = 25° + k.360°$ atau $x = (180° - 45°) + k.360°$

  $= 135° + k.360°$

  Jadi $x = 25° + k.360°$ atau $135° + k.360°$

- Tentukan HP dari tan $(60 - \frac{1}{2}x)° = \cot(x + 120)°$ untuk $0 \leq x \leq 360°$

  Penyelesaian :

  $\tan(60° - \frac{1}{2}x)° = \tan(90° - (x + 120))°$

  $\tan(60° - \frac{1}{2}x)° = \tan(-x - 30)°$

  $60° - \frac{1}{2}x = -x - 30° + k.180°$

  $x - \frac{1}{2}x = -30° - 60° + k.180°$

  $\frac{1}{2}x = -90° + k.180°$

  $x = -180° + k.360°$

  $k = 1 \rightarrow x = 180°$

  Jadi HP = {180°}

B. Persamaan trigonometri yang berbentuk sin $x^0 = a$, cos $x = a$ dan tan $x^0 = a$

1. $\sin x° = a$, diubah menjadi $\sin x° = \sin \alpha$
2. $\cos x° = a$, diubah menjadi $\cos x° = \cos \alpha$
3. $\tan x° = a$, diubah menjadi $\tan x° = \tan \alpha$

C. Persamaan trigonometri berbentuk sin $px° = a$, cos $px\ a°$ dan tan $px° = a$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini, kita dapat melakukan terlebih dengan terlebih dahulu dengan mengubah persamaan trigonometri tersebut menjadi persamaan trigonometri dasar/ sederhana.

Contoh :

Tentukan HP (Himpunan Penyelesaian) dari 2 cos x – $\sqrt{3}$ = 0 untuk $0 \leq x \leq 360°$

2 cos x = $\sqrt{3}$

cos x = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

cos x = cos 30°

x = 30° + k.360° atau x = (180 – 30)° + k.360°

k = 0 → x = 30° x = 150° + k.360°

k = 1 → x = 390° (tidak memenuhi) k = 0 → x = 150°

Jadi HP = {30°, 150°}

D. Persamaan trigonometri yang memuat jumlah atau selisih sinus atau cosinus

1. sin A + sin B = 2 sin $\frac{1}{2}$ (A + B) cos $\frac{1}{2}$ (A – B)
2. sin A – sin B = 2 cos $\frac{1}{2}$ (A + B) sin $\frac{1}{2}$ (A – B)
3. cos A + cos B = 2 cos $\frac{1}{2}$ (A + B) cos $\frac{1}{2}$ (A – B)
4. cos A – cos B = -2 sin $\frac{1}{2}$ (A + B) sin $\frac{1}{2}$ (A – B)

E. Persamaan kuadrat dalam sinus, cosinus dan tangen

1. a $\sin^2 x°$ + c = 0
2. a $\cos^2 x°$ + b cos x° + c = 0
3. a $\tan^2 x°$ + b sin x° + c = 0

Langkah-langkah yang diperhatikan dalam menyelesaikan[15]:

[15] S. Wahyu, op.cit, h. 78

1. Selesaikan seperti menyelesaikan persamaan kuadrat biasa denga cara: memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna da menggunakan rumus kuadrat.
2. Persamaan kuadrat dalam sinus dan cosinus dapat diselesaikan apabila syarat-syarat sebagai berikut
   a. Syarat perlu, yaitu $D \geq 0$
   b. Syarat cukup, yaitu jika sin x° = p dan kita ketahui bahwa -1 sin x°≤ 1 maka nilai sin x° = p harus terletak antara -1 dan 1 atau $-1 \leq p \leq 1$

Catatan:

Jika salah satu diantara kedua syarat tersebut tidak dipenuhi, maka persamaan kuadrat dalam sinus, cosinus dan tangen tidak mempunyai penyelesaian.

F. Bentuk Lain Persamaan Trigonometri

Dalam menyelesaikan persamaan trigonometri, perlu mengubah bentuk persamaan trigonometri yang diberikan menjadi bentuk persamaan trigonomtri kuadrat yang melibatkan rumus-rumus trigonometri dasar, rumus trigonometri sudut rangkap dan rumus lainnya.

Misalnya pada persamaan umum trigonometri :

1. $a \cos x + b \sin x = c$: dimana $c = k \cos (x - \alpha)$
   dengan $k = a^2 + b^2$:
   Persamaan lengkapnya:
   $a \cos x + b \sin x = k \cos (x - \alpha) = c$

α didapat dari tan $\alpha = \frac{b}{a}$

Syarat agar persamaan a cos x + b sin x = c mempunyai jawaban adalah :

$c^2 \leq a^2 + b^2$

2. Persamaan bentuk a cos nx + b sin nx

a cos nx + b sin nx diubah menjadi k cos (nx – α)

dimana :

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$

tan $\alpha = \frac{b}{a}$

Selanjutnya diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan dasar cos x = cos a

Penentuan letak α:

- Jika a +, b + $\rightarrow$ α di kuadran I
- Jika a –, b + $\rightarrow$ α di kuadran II
- Jika a –, b – $\rightarrow$ α di kuadran III
- Jika a +, b – $\rightarrow$ α di kuadran IV

Untuk persamaan a cos nx + b sin nx = c, syarat agar persamaan ini dapat diselesaikan:

$$-1 \leq \frac{c}{k} \leq 1 \text{ atau } \left|\frac{c}{k}\right| \leq 1$$

sehingga

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1 \rightarrow \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$\text{jadi } c^2 \leq a^2 + b^2$$

dan agar persamaan ini tidak dapat diselesaikan:

$c^2 > a^2 + b^2$

3. Persamaan bentuk a $\cos^2 x + b \sin x.\cos x + c \sin^2 x = d$

   Caranya, lakukan dengan mengubah unsur-unsurnya seperti berikut ini:

   $$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

   $$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

   $$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

   Selanjutnya persamaan diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan $a \cos nx + b \sin nx = c$

4. Persamaan bentuk $a(\cos x \pm \sin x) + b \sin x \cos x + c = 0$

   Caranya:

   Misalkan $(\cos x \pm \sin x) = p$. Maka :

   $(\cos x \pm \sin x)^2 = p^2$

   $\cos^2 x \pm 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = p^2$

   $1 \pm 2 \sin x \cos x = p^2$

   $\pm 2 \sin x \cos x = p^2 - 1$

   Sehingga $2 \sin x \cos x = \pm \frac{1}{2}(p^2 - 1)$

   Sehingga persamaan di atas akan menjadi persamaan kuadrat:

   $a.p \pm \frac{1}{2} b(p^2 - 1) + c = 0$

   Selesaikan dengan cara pemfaktoran atau rumus abc untuk mendapatkan nilai p, kemudian persamaan $\cos x \pm \sin x = p$ dapat diselesaikan dengan cara seperti menyelesaikan persamaan a cos nx + b sin nx = c.

Nilai ekstrim y = a cos nx + b sin nx + c

$y_{max} = k + c = \sqrt{a^2 + b^2} + c$, diperoleh $\cos(nx - \alpha) = 1$

$y_{min} = -k + c = -\sqrt{a^2 + b^2} + c$, diperoleh $\cos(nx - \alpha) = -1$

Materi

PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

Persamaan trigonometri memuat fungsi-fungsi trigonometri dengan peubah sudut yang belum diketahui, hanya berlaku untuk beberapa interval dari peubah sudut. Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan trigonometri, maka digunakan pertolongan garis bilangan atau sketsa grafik fungsi trigonometri.

Contoh:

Selesaikan $\sin 2x < \cos x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$

Penyelesaian

$\sin 2x - \cos x < 0$

$2 \sin x . \cos x - \cos x < 0$

$\cos x . (2 \sin x - 1) < 0$

harga nol:

- $\cos x = 0$

$\cos x = \cos 90°$

$x = 90° + k.360°$ atau $x = -90° + k.360°$

$k = 0 \rightarrow x = 90°$ $\quad$ $k = 1 \rightarrow x = 270°$

- $\sin x - 1 = 0$

$2 \sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin 30°$

$x = 30° + k.360°$ atau $x = (180 - 30)° + k.360°$

$k = 0 \rightarrow x = 30°$ $\quad$ $x = 150° + k.360°$

$k = 0 \rightarrow x = 150°$

Memberi tanda (+) dan (-) pada garis bilangan:

Jika $x = 180°$ maka $\sin 2.180° - \cos 180° = \sin 360° - \cos 180° = 0 - (-1) = 1$ (+)

Jadi garis bilangannya:

Gambar 8.2

karena yang diminta kurang dari (<) 0, maka yang diarsir adalah bagian-bagian yang bertanda (-)

Sehingga HP-nya: $\{0° \leq x < 30°$ atau $90° < x < 150°$ atau $270° < x \leq 360°\}$

Latihan Soal

1. Tentukan nilai x dalam interval $-360^o \leq x \leq 360^o$ yang memenuhi persamaan berikut.
   a. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   b. $\cos x = 1$
   c. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
2. Tentukan nilai x dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$
   a. $\sin = -\frac{1}{2}$
   b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $\tan x = -\sqrt{3}$
3. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$
   a. $4 \sin 3x = 2$
   b. $4 \sin 3x = 2\sqrt{2}$
   c. $4 \cos 3x = 2$
   d. $6 \cos 5x - 3 = 0$
   e. $6 \cos 7x = 6$
4. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$
   a. $\sin 2x^o = 0{,}5432$

b. $\cos 2x^o = 0{,}9932$

c. $\tan 2x^o = 0{,}7773$

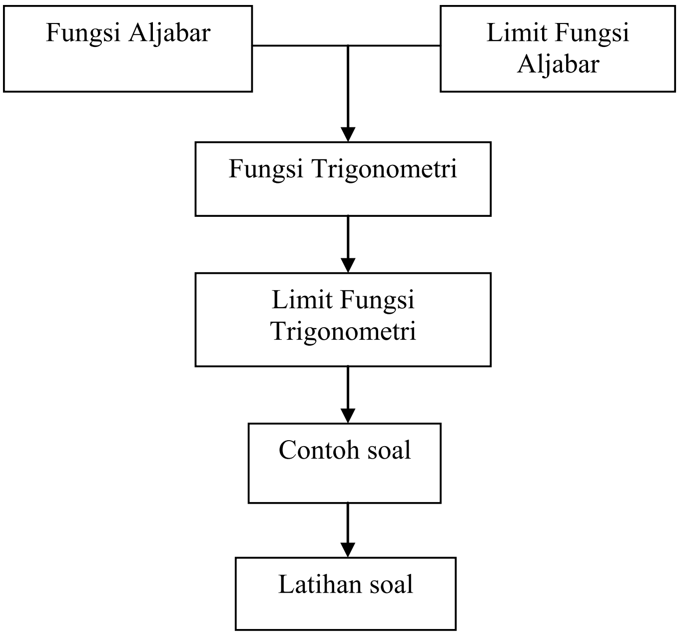
5. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan terigonometri berikut dengan interval $0° \leq x \leq 360°$
   a. $\sin 6x° + \sin 2x° = 0$
   b. $\sin 7x° – \sin 2x° = 0$
   c. $\cos 4x° + \cos 2x° = 0$
   d. $\cos 4x° – 3x° = 0$
   e. $\cos 7x^o + \sin 2x^o = 0$
6. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan terigonometri berikut dengan interval $0° \leq x \leq 360°$
   a. $\sin (x + 45)^o + \sin (x – 75)^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   b. $\sin (3x + 45)^o – \sin (3x – 15)^o = –\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   c. $\cos (x + 50)^o + \cos (x + 20)^o = \frac{1}{2}$
   d. $\cos (3x + 105)^o – \sin (3x – 10)^o = \frac{1}{2}$
   e. $\cos (x + 135)^o – \sin (x – 20)^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
7. Carilah himpunan penyelesaian dari persamaan terigonometri berikut dengan interval $0° \leq x \leq 360°$
   a. $\sin^2 x – 1 = 0$
   b. $\cos^2 x – 4 = 0$
   c. $\tan^2 x – 3 = 0$

8. Carilah himpunan penyelsaian dari pertidaksamaan terigonometri berikut dengan interval $0° \leq x \leq 360°$
   a. $\sin x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   b. $\sin x > 0$
   c. $\cos x < 0$
   d. $\cos x > \frac{1}{2}$
   e. $\cos x < \frac{1}{2}\sqrt{3}$
9. Carilah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan trigonometri berikut dengan interval $0^o \leq x \leq 360^o$
   a. $\sin 2x \leq 0$
   b. $3 \sin 4x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c. $\cos 2x \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   d. $2 \cos 4x \leq 1$
   e. $\tan^{2} - 2x^o \geq \sqrt{3}$
10. Carilah himpunan penyelsaian dari pertidaksamaan terigonometri berikut dengan interval $-360^o \leq x \leq 360^o$
    a. $\sin^2 x^o \geq \frac{1}{2}$
    b. $\cos^{2} x^o - \frac{1}{2} > 0$
    c. $\sin x^o > \cos x^o$
    d. $\sin 4x^o < \cos x^o$
    e. $\tan 2x^o \geq \tan x^o$

BAB 9

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

PETA KONSEP



Gambar 9.1

1. Limit fungsi aljabar
2. Limit fungsi trigonometri

Ilustrasi

Memasuki pekan ke-8, seorang dosen memberikan pekerjaan rumah (PR) kepada mahasiswanya. Sebagai sebuah evaluasi hasil belajar dari proses perkuliahannya, ia memberikan tugas yang harus dikumpulkan paling lambat satu minggu via email dosen yang bersangkutan setelah soal diberikan. Tugas tersebut dikerjakan secara kelompok. Ia juga menjelaskan bahwa pengirim pertama yang benar jawabannya akan mendapatkan *reward* khusus dari dosen.

Pemberian tugas model tersebut dilakukan dosen untuk meningkatkan antusiasme mahasiswa, disamping untuk mengukur tingkat pemahaman dan kerjasama mahasiswa dalam menyelesaikan tugas yang diberikan. Hal tersebut juga untuk mengintegrasikan substansi mata kuliah terhadap teknologi informasi yang harus dikuasai oleh mahasiswa.

Materi

Pada fungsi trigonometri sering digunakan dua macam satuan sudut yaitu derajat dan radian. Simbol sin x^0 berarti satuan yang digunakan adalah satuan derajat, sedangkan bila satuan radian disimbolkan sin x saja, dalam limit trigonometri satuan yang digunakan adalah satuan radian.

Seperti telah kita ketahui bahwa 1 putaran = 360^0 = 2π radian = 2(3,14) radian, atau 1 radian = 57, 3^0. Perlu diingat bahwa satuan radian tidak pernah ditulis dibelakang ukuran sudut. Jadi bila ukuran sudut tidak ada simbul derajatnya berarti satuannya adalah radian. Sebagai contoh, sin 30 tidak sama dengan sin 30^0. sin 30^0 = $\frac{1}{2}$, tetapi sin 30 artinya sin 30 radian = -0,99[16].

A. Limit fungsi aljabar

Limit dapat digunakan untuk menjelaskan pengaruh variabel fungsi yang bergerak mendekati suatu titik terhadap fungsi tersebut. Untuk dapat memahami pengertian limit secara intuitif, perhatikanlah contoh berikut:

Fungsi f di definisikan sebagai f (x) = $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Jika variabel x diganti dengan 2, maka f(x) = $\dfrac{\mathbf{O}}{\mathbf{O}}$ (tidak dapat ditemukan)

Untuk itu perhatikanlah tabel berikut.

[16] Ibid, h. 65

x	0	1,1	1,5	1,9	1,999	2.000	2,001	2,01	2,5	2,7
f(x)	1	2,1	2,5	2,9	2,999	???	3,001	3,01	3,5	3,7

Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa f (x) = $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$: mendekati 3. jika x mendekati 2, baik didekati dari sebelah kiri (disebut limit kiri) maupun di dekati dari sebelah kanan (disebut limit kanan). Dapat ditulis : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$

1. Menentukan limit fungsi aljabar bila variabelnya mendekati nilai tertentu

   Menentukan limit dengan cara diatas tidaklah efisien. Untuk mengatasinya, kita dapat menentukan nilai limit suatu fungsi dengan beberapa cara, yaitu:

   a. Subtitusi

      Perhatikanlah contoh berikut!

      Contoh:

      Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 8)$!

      Penyelesaian :

      Nilai limit dari fungsi f(x) = x^2 – 8 dapat kita ketahui secara langsung, yaitu dengan cara mensubtitusikan x =3 ke f(x)

      $$\lim_{x \to 3}(x^2 - 8) = 3^2 - 8 = 9 - 8$$

      $$= \mathbf{1}$$

Artinya bilamana x dekat 3 maka $x^2 - 8$ dekat pada $3^2 - 8 = 9 - 8 = 1$

Dengan ketentuan sebagai berikut:

a) Jika f (a) = c, maka $\lim_{x \to a} f(x) = a$

b) Jika f (a) = $\frac{c}{0}$, maka $\lim_{x \to a} f(x) = \sim$

c) Jika f (a) = $\frac{0}{c}$, maka $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

b. Pemfaktoran

Cara ini digunakan ketika fungsi-fungsi tersebut bisa difaktorkan sehingga tidak menghasilkan nilai tak terdefinisi.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

Tentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$!

Jika x = 3 kita subtitusikan maka f (3) = $\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$.

Kita telah mengetahui bahwa semua bilangan yang dibagi dengan 0 tidak terdefinisi. Ini berarti untuk menentukan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, kita harus mencari fungsi yang baru sehingga tidak terjadi pembagian dengan nol. Untuk menentukan fungsi yang baru itu, kita tinggal menfaktorkan fungsi f (x) sehingga menjadi:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3).\left(\frac{x-3}{x-3}\right) = 1$$

Jadi, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$$= \lim_{x \to 3} (x+3)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

c. Merasionalkan penyebut

Cara yang ke-tiga ini digunakan apanila penyebutnya berbentuk akar yang perlu dirasionalkan, sehingga tidak terjadi pembagian angka 0 dengan 0.

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} . \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-2})}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-1)\sqrt{x-2}$$

$$= (2-1).\sqrt{2-2}$$

$$= 1 \, . \, 0$$

$= 0$

d. Merasionalkan pembilang

Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

Tentukan nilai $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-3}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 - \left(\sqrt{4x-3}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{4x-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3.1-2} + \sqrt{4.1-3}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

2. Menentukan limit fungsi aljabar bila variabelnya mendekati tak berhingga

Bentuk limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak berhingga,diantaranya:

$$\lim_{x \to \sim} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dan } \lim_{x \to \sim} [f(x) \pm g(x)]$$

Untuk menentukan nilai limit dari bentuk-bentuk tersebut, dapat dilakukan cara-cara sebagai berikut:

a. Membagi dengan pangkat tertinggi

Cara ini digunakan untuk mencari nilai $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Caranya dengan membagi f(x) dan g(x) dengan pangkat yang tertinggi dari n yang terdapat pada f(x) atau g (x).

Contoh:

Tentukan nilai limit dari:

1. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{4x-1}{2x+1}$ 2. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{4x+1}{x^2-x}$

Penyelesaian:

1. Untuk menentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{4x-1}{2x+1}$ perhatikan pangkat tertinggi dari x pada f (x) = 4x – 1 dan g(x) = 2x + 1. ternyata pangkat tertinggi dari x adalah satu.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{4x - 1}{2x + 1} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{\sim}}{2 + \frac{1}{\sim}}$$

$$= \frac{4 - 0}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Perhatikan fungsi h (x) = $\frac{4x + 1}{x^2 - 2}$! Fungsi tersebut memiliki x dengan pangkat tertinggi 2, yaitu x^2 yang terdapat pada $x^2 - 2$. jadi, untuk menentukan nilai $\lim_{x \to \sim} \frac{4x + 1}{x^2 - x}$ maka fungsi 4x + 1 dan $x^2 - 2$ harus dibagi dengan x^2.

$$\lim_{x \to \sim} \frac{4x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{4}{\sim} + \frac{1}{(\sim)^2}}{1 - \frac{2}{(\sim)^2}}$$

$$= \frac{0+0}{1-0}$$

$$= \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}} = 0$$

b. Mengalikan dengan faktor lawan

Cara ini digunakan untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\sim}[f(x) \pm g(x)]$. Jika kita diminta menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\sim}[f(x) \pm g(x)]$ maka kita harus mengalikan [f(x)+g(x)] dengan $\frac{[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}]}{[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}]}$ sehingga bentuknya menjadi:

$$\lim_{x\to\sim}[f(x) \pm g(x)] \cdot \frac{[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}]}{[\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}]}$$

$$= \lim_{x\to\sim} \frac{\left\{[\mathrm{f(x)}]^2 - [\mathrm{g(x)}]^2\right\}}{\mathrm{f(x)} - \mathrm{g(x)}}$$ ataupun sebaliknya.

Contoh:

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x} \quad . \frac{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

B. Teorema Limit

Teorema limit yang akan disajikan berikut ini yang sangat berguna dalam menangani hampir semua masalah limit. Misalkan n bilangan bulat positif, k sebuah konstanta dan f, g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di a maka[17]:

1. $\lim_{x \to a} k = k$
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} k\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{k} \lim_{x \to c} \mathrm{f}(\mathrm{x})$
4. $\lim_{x \to c} [\mathrm{f}(\mathrm{x}) \pm \mathrm{g}(\mathrm{x})] = \lim_{x \to c} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \pm \lim_{x \to c} \mathrm{g}(\mathrm{x})$
5. $\lim_{x \to c} \mathrm{v}\ [\mathrm{f}(\mathrm{x}) \,.\, \mathrm{g}(\mathrm{x})] = \lim_{x \to c} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \,.\, \lim_{x \to c} \mathrm{g}(\mathrm{x})$

[17] Rahayu Kariadinata, op.cit, h. 230

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, dimana $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$

8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ dimana

$\lim\limits_{x\to c} f(x) \geqq 0$ untuk n bilangan genap

$\lim\limits_{x\to c} f(x) \leq 0$ untuk n bilangan ganjil

Contoh:

Carilah: a. $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2 - x)$ b. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+9}{2x}}$

Penyelesaian:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(3x^2 - x) = \lim\limits_{x\to 4} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 4)

$= 3 \lim\limits_{x\to 4} x^2 - \lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 3)

$= 3 \left[\lim\limits_{x\to 4} x\right]^2 - \lim\limits_{x\to 4} x$ (teorema 7)

$= 3.\ (4)^2 - 4$ (teorema 2)

$= 3.\ 16 - 4 \quad = \ 44$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+9}{2x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 3} 2x}$ (teorema 6)

$= \dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+9)}}{2\lim\limits_{x\to 3} x}$ (teorema 8 dan 3)

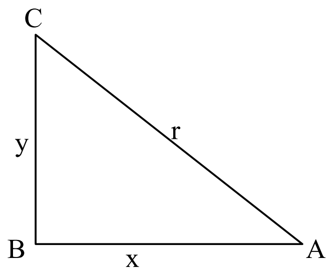
$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 9}}{2\lim_{x\to 3} x} \qquad \text{(teorema 4)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\lim_{x\to 3} x)^2 + \lim_{x\to 3} 9}}{2\lim_{x\to 3} x} \qquad \text{(teorema 7)}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + 9}}{2.3} \qquad \text{(teorema 1 dan 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3}{6}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

C. Fungsi Trigonometri



Gambar 9.2

Pada gambar 2.4 di atas, ∠ABC adalah segitiga yang salah satu sudutnya ∢ dan siku-siku pada ∠CBA. Misal AB = x, BC = y dan AC = r, berdasarkan segitiga ABC yaitu: $\frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{BC}$

Karena $\angle A$ = ∢ maka perbandingan tersebut dinyatakan dengan[18]:

[18] J. Gunawan, op.cit, h. 32

1. $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$

2. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$

3. $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

4. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot\theta$

5. $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{1}{\frac{x}{r}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

6. $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\frac{BC}{AC}} = \dfrac{1}{\frac{y}{r}} = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$

Karena $\angle$ABC salah satu sudutnya siku-siku, sehingga menurut teorema Pythagoras berlaku:

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Selanjutnya secara berurutan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi x^2, y^2, r^2 diperoleh persamaan baru

1. $\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \cdots\cdots\cdots (1)$$

2. $\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{r^2}{x^2}$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \cdots\cdots\cdots (2)$$

3. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{y^2} = \dfrac{r^2}{y^2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

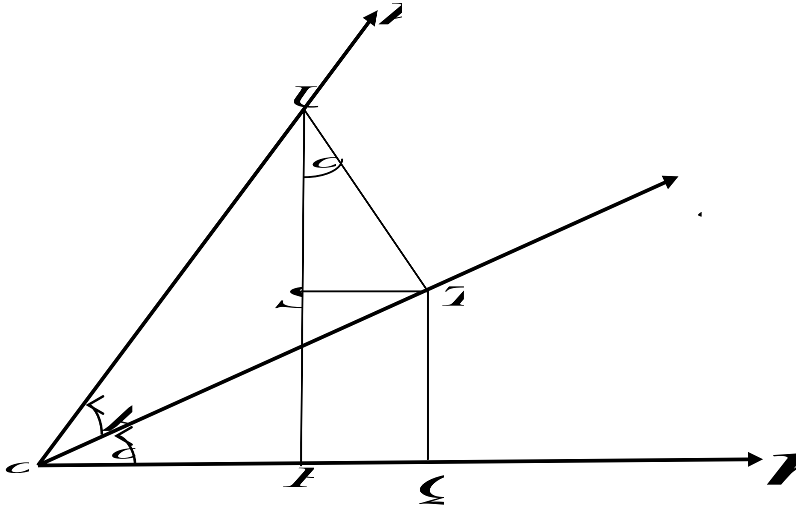
$$\Leftrightarrow (\cot\theta)^2 + 1 = (\csc\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta \cdots\cdots\cdots (3)$$

Persamaan (1), (2), dan (3) dinamakan rumus-rumus identitas.

Selanjutnya berdasarkan perbandingan tersebut dapat dibuat beberapa rumus tentang fungsi trigonometri. Rumus-rumus tersebut dapat ditunjukkan melalui gambar.

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 9.3

Pada gambar 9.3 di atas terdapat 4 segitiga dan masing-masing adalah siku-siku, yaitu $\Delta QOT, \Delta TSU, \Delta OTU, dan\ \Delta OPU$ dan diketahui $\angle QOT = \alpha,\ \angle TOU = \beta$. $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ sehingga $\angle SUT = \alpha$

Berdasarkan ΔOPU diperoleh perbandingan panjang sisi

$\sin \angle POU = \dfrac{UP}{OU}$ dengan UP = PS + SU

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka SU = UT cos α

Karena PS = QT dan karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$\sin \angle POU = \dfrac{UP}{OU}$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{UP}{OU}$$

$$= \frac{PS + SU}{OU}$$

$$= \frac{QT + SU}{OU}$$

$$= \frac{OT \sin \alpha + UT \cos \alpha}{OU}$$

$$= \frac{OU \cos \beta \sin \alpha + OU \sin \beta \cos \alpha}{OU}$$

Sehingga diperoleh rumus $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ .... (4)

Dengan cara yang sama diperoleh:

$\cos \angle POU = \dfrac{OP}{OU}$, OP = OQ – PQ

Karena $\Delta QOT \approx \Delta TSU$ maka SU = UT cos α

Karena PQ = ST dan karena ΔUST siku-siku di $\angle TSU$ maka ST = SU sin α

Karena ΔOTU siku-siku di $\angle OTU$ maka OT = OU cos β dan UT = OU sin β

Karena ΔOQT siku-siku di $\angle TQU$ maka OQ = OT cos α dan QT = OT sin α

Karena $\angle POU = \alpha + \beta$

$$\cos \angle POU = \frac{UP}{OU}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{OP}{OU}$$

$$= \frac{OQ - PQ}{OU}$$

$$= \frac{OQ - ST}{OU}$$

$$= \frac{OT \cos\alpha - UT \sin\alpha}{OU}$$

$$= \frac{OU \cos\beta \cos\alpha - OU \sin\beta \sin\alpha}{OU}$$

Sehingga diperoleh rumus $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ...... (5)

Berdasarkan (4) dan (5) dapat ditentukan rumus lain

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta))$$

$$= \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha (-\sin\beta)$$

$$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad \text{...........(6)}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta))$$

$$= \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha (-\sin\beta)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad \text{...........(7)}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β , diperoleh:

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Sehingga $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ .... (8)

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas dibagi dengan cos α cos β , diperoleh:

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\,\alpha}{\cos\,\alpha} - \dfrac{\sin\,\beta}{\cos\,\beta}}{1 + \dfrac{\sin\,\alpha\,\cos\,\beta}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta}}$$

$$= \frac{\tan\,\alpha - \tan\,\beta}{1 + \tan\,\alpha\,\tan\,\beta}$$

Sehingga $\tan\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\,\alpha - \tan\,\beta}{1 + \tan\,\alpha\,\tan\,\beta}$ .... (9)

Beberapa rumus fungsi trigonometri yang lain adalah:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
2. $\cos(-\alpha) = \cos\,\alpha$
3. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
4. $\sin\,\alpha + \sin\,\beta = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
5. $\cos\,\alpha + \cos\,\beta = 2\,\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
6. $\sin\,2\alpha = 2\,\sin\,\alpha\,\cos\,\alpha$
7. $\cos\,2\alpha = \cos^2 - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
8. $\sin\alpha\,\sin\,\beta = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta - \cos(\alpha-\beta)\right)$
9. $\cos\,\alpha\cos\,\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$
10. $\sin\alpha\,\cos\,\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

11. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

12. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

(Bukti lain dari rumus di atas dijadikan latihan mandiri).

Latihan Soal

1. Selidiki fungsi berikut genap, ganjil, bukan genap ataupun ganjil

   a. $f(x) = \cos x + \sin x$

   b. $f(x) = \sec x$

   c. $f(x) = \cos(\sin x)$

   d. $f(x) = \sin^2 x$

   e. $f(x) = x^2 + \sin x$

   f. $f(x) = \sqrt[4]{\cos^3(x)}$

   g. $f(x) = \cos 3x$

   h. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

   i. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

   j. $f(x) = 1 - \tan x$

2. Buktikan kesamaan berikut.

   a. $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \dfrac{1}{\sec^2 x}$

   b. $(\sec x - 1)(\sec + 1) = \tan^2 x$

   c. $\sec x - \sin x \cos x = \cos x$

   d. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \sin^2 x$

e. $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sec^2 x} = 1$

f. $\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$

g. $\sin 4s = 8\sin s\cos^3 s - 4\sin s\cos s$

h. $(1+\cos x)(1-\cos x) = \sin^2 x$

i. $\dfrac{\sin\ p}{\cos\ p} + \dfrac{\cos\ p}{\sec\ p} = 1$

j. $(1-\cos^2 x)(1+\cot^2 x) = 1$

k. $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$

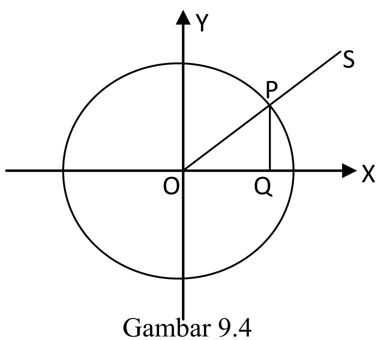
l. $\dfrac{1-\csc^2 y}{\csc^2 y} = -\dfrac{1}{\sec^2 t}$

D. Limit Fungsi Trigonometri

Dengan menggunakan teorema prinsip apit dan rumus geometri kita dapatkan teorema dasar dari limit fungsi trigonometri sebagai berikut.

Perhatikan limit fungsi $\frac{x}{\sin x}$. Akan dicari berapa nilai dari $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$.

Perhatikan lingkaran dengan pusat O(0, 0) dan jari-jari satu satuan berikut.



Gambar 9.4

Besar sudut QOP adalah x radian. Ruas garis PR dan QS tegak lurus sumbu x.

Koordinar titik-titik pada gambar adalah : P(cos x, sin x), S(1, tan x), R(cos x, 0), dan Q(1, 0).

Perhatikan gambar ΔOPQ:

cos x = $\frac{OR}{OP} = \frac{OR}{1}$ = OR ; sin x = $\frac{PRR}{OPP} = \frac{PR}{1}$ = PR

Perhatikan ΔOSQ:

tan x = $\frac{SQ}{OQ} = \frac{SQ}{1}$ = SQ

Kita dapatkan luas ΔOPR < luas sektor OPQ < luas ΔOSQ atau $\frac{1}{2}$ cos x. sin x < $\frac{1}{2}$. x . 1^2 < $\frac{1}{2}$ tan x

Karena 0 < x < $\frac{1}{2}\,\pi$ maka sin x > 0. Dengan demikian, jika dikalikan dengan $\frac{2}{sin\ X}$ maka di dapat :

$lim_{X\to 0}\, cos\ x < lim_{X\to 0}\, \frac{X}{sin\ X} < lim_{X\to 0}\, \frac{1}{cos\ x}$

1 < $lim_{X\to 0}\, \frac{X}{sin\ X}$ < 1 atau $lim_{X\to 0}\, \frac{X}{sin\ X}$ = 1. Dengan cara yang sama di dapat rumus :

$lim_{X\to 0}\, \frac{sin\ X}{X}$ = 1 ; $lim_{X\to 0}\, \frac{X}{sin\ X}$ =1; $lim_{X\to 0}\, \frac{tan\ X}{X}$ = 1

Teorema 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dalam membuktikan teorema di atas kita dapatkan suatu akibat yaitu:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Dengan menggunakan teorema dasar limit fungsi trigonometri dapat dibuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema 2

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc \sin x}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{arc \sin x} = 1$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arc \tan x}{x} = 1$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{arc \tan x} = 1$

Bentuk-bentuk di atas dinamakan dengan limit fungsi trigonometri. Dengan berpandu pada teorema limit dan bentuk tak tentu. Maka persoalan tentang limit fungsi trigonometri dapat diselesaikan

Untuk keperluan praktis teorema tersebut dapat dikembangkan menjadi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

Seperti pada fungsi aljabar, maka pada fungsi trigonometri juga berlaku bahwa jika f(a) terdefinisi, maka: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Contoh :

1. $\lim_{x\to 0}(\sin 2x+\cos x)=\sin 0^0+\cos 0^0=0+1=1$

2. $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{2}+3\cos\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

Berikut ini akan dibahas limit Fungsi Trigonometri bentuk tak tentu yaitu :

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,1^{\infty}$

Limit Bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 4x}=\dfrac{3}{4}$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{3x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin x}{3x\sin x}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}$$

3. $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{1}{2}(x+a)\sin\frac{1}{2}(x-a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}2\cos\frac{1}{2}(x+a)\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}2\cos\frac{1}{2}(x+a)\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{1}{2}(x-a)}{(x-a)}$$
$$=2\cos\frac{1}{2}(a+a).\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\cos a$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3t)+4t}{t\sec t}$$

Jawab

Bentuk di atas menghasilkan $\frac{\mathbf{O}}{\mathbf{O}}$ sehingga

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t)+4t}{t\sec t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin(3t)}{t\sec t}+\frac{4t}{t\sec t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sec t}+\lim_{t\to o}\frac{4}{\sec t}$$
$$=3+4=7$$

Limit Bentuk $\infty - \infty$

Limit bentuk $(\infty - \infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

Contoh :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Limit Bentuk $(0.\infty)$

Limit bentuk $(0.\infty)$ dapat diselesaikan dengan mengubahnya ke bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Contoh :

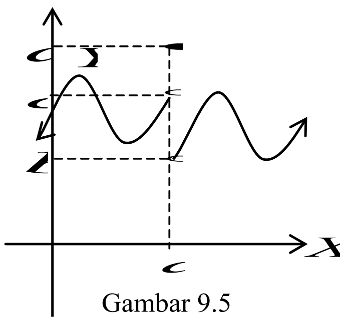
$$\lim_{x\to 1}(x-1).\tan\tfrac{1}{2}\pi x = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\dfrac{\pi}{2}}{\cos\dfrac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}\right)\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

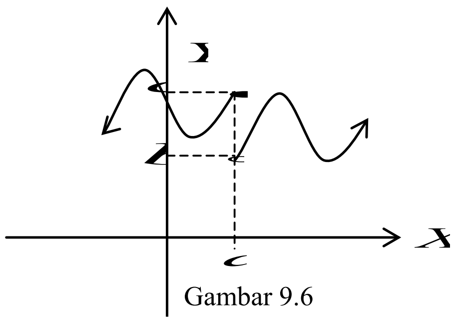
$$= \left(\frac{-2}{\pi}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

Kekontinuan

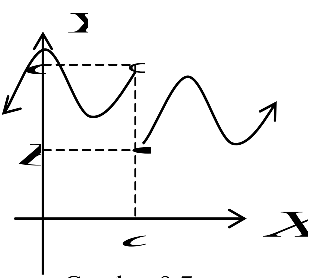
Perhatikan gambar berikut, $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi pada selang yang diberikan.



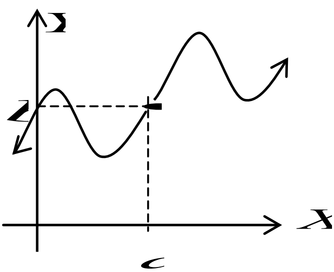
Gambar 9.5



Gambar 9.6



Gambar 9.7



Gambar 9.8

Selanjutnya menurut gambar 9.5

a) f(a) = d

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 9.6

a) f(a) = c

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 9.7

a) f(a) = b

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = c$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = tidak\ terdefinisi\ karena\ L^+ \neq L^-$

Gambar 9.8

a) f(a) = b

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L^- = b$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L^+ = b$

d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b, karena\ L^{+} = L^{-}$

Definisi

Jika $y = f(x)$ terdefinisi dalam suatu selang terbuka yang memuat c, maka $y = f(x)$ dikatakan kontinu di x = c, asalkan

1) f(c) = L (ada)
2) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L\ (ada)$
3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = L\ (ada)$

Contoh Soal

Nyatakan apakah fungsi-fungsi berikut kontinu di titik yang diberikan[19]:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ di titik x = 3

   Jawab

   Untuk menyelidiki apakah $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di titik x = 3 maka harus ditunjukkan bahwa 3 syarat kontinu fungsi di satu titik harus terpenuhi.

   Ternyata untuk $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ fungsi tidak terdefinisi di x = 3, sehingga $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ tidak kontinu di x = 3.

[19] J. Gunawan, *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri,* Grasindo, Jakarta, 2006, h. 61

2. $f(x)=\begin{cases} x, \; untuk \; x<0 \\ x^2, \; untuk \; 0 \le x \le 1 \\ 2-x, \; untuk \; x>1 \end{cases}$ di setiap titik pada bilangan real

Jawab

Untuk menyelidiki apakah fungsi di atas kontinu di R, maka cukup diselidiki apakah $f(x)$ kontinu di titik $x=0$ atau $x=1$

Pada $x=0$

1) $f(0)=0^2=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, tentukan terlebih dahulu $L^+ = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$

Sedangkan $L^- = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.

Karena $L^- = L^+$ maka $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Hal ini menunjukkan $f(x)=\begin{cases} x, \; untuk \; x<0 \\ x^2, \; untuk \; 0 \le x \le 1 \\ 2-x, \; untuk \; x>1 \end{cases}$ kontinu di x = 0

Pada $x=1$

1) $f(1)=1^2=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, tentukan terlebih dahulu

$L^+ = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2-x) = 2-1=1$

Sedangkan $L^- = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

Karena $L^- = L^+$ maka $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

3) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

Hal ini menunjukkan $f(x) = \begin{cases} x, \, untuk \; x < 0 \\ x^2, \, untuk \; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \, untuk \; x > 1 \end{cases}$ kontinu di x = 1

Karena $f(x)$ kontinu di $x = 0$ dan $x = 1$

Berarti

$$f(x) = \begin{cases} x, \, untuk \; x < 0 \\ x^2, \, untuk \; 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, \, untuk \; x > 1 \end{cases} \quad \text{kontinu dimana-mana.}$$

3. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di x = 1

Jawab

1) $f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow$ f(1) terdefinisi

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + x - 3) = 1^2 + 1 - 3 = -1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ terdefinisi

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ Jadi fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu di x =1.

4. Selidiki apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu di x = 3

Jawab

1) $f(3) = \dfrac{3^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$ (tidak tentu)

Karena f(3) tak tentu maka $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ diskontinu di x = 3

5. Selidiki apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

kontinu di x = 2

Jawab

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, f(2) = \dfrac{2^3 - 1}{2 - 1} = 7$ (terdefinisi)

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1\right)$

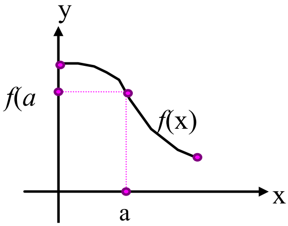
$= 1^2 + 1 + 1 = 3$

(terdefinisi)

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, berarti $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ diskontinu di $x = 2$

6. Selanjutnya perhatikan gambar berikut.

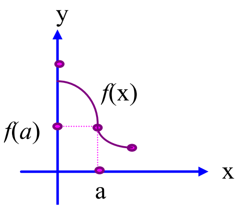
1.



f(x) kontinu di x = a,

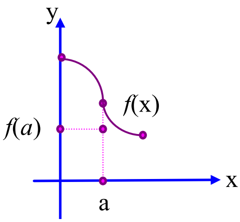
sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

2.



f(x) diskontinu di x = a,

sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tidak ada

3. 

Gambar 9.9

$f(x)$ diskontinu di x = a,

sebab $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Contoh Soal

a. Hitunglah nilai dari $lim_{X\to 0} \frac{tan\ 3X}{sin\ 6X}$!

Jawab

$$lim_{X\to 0} \frac{tan\ 3X}{sin\ 6X} = lim_{X\to 0} \frac{tan\ 3X}{3X} \cdot \frac{6X}{sin\ 6X} \cdot \frac{3X}{6X}$$

$$= \frac{3}{6} \,.\, Lim_{X\to 0} \frac{tan\ 3X}{3X} \,.\, Lim_{X\to 0} \frac{6X}{sin\ X}$$

$$= \frac{1}{2} .1\ .1$$

$$= \frac{1}{2}$$

Jadi, $lim_{X\to 0} \frac{tan\ 3X}{sin\ 6X} = \frac{1}{2}$

b. Hitunglah nilai limit fungsi dari $Lim_{X\to 0} \frac{cos\ X-1}{X^2}$!

Jawab

$$Lim_{X\to 0} \frac{cos\ 2X-1}{X^2} = Lim_{X\to 0} \frac{(1-2\,Sin^2 x)-1}{x^2}$$

$$= Lim_{x\to 0} \frac{-2\,sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -2\,.\,Lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{x^2}$$

$= \lim\limits_{x \to 0} - 2 \ . \ Lim_{x \to 0} (\frac{\sin x}{x})^2$

$=$ -2 . $(1)^2$

$=$ -2 . 1

$=$ -2

Jadi $Lim_{x \to 0} \frac{\cos 2X - 1}{X^2}$ = -2

c. Hitunglah $Lim_{X \to 0} \frac{(X^2-1)\cos 6X}{X^3+3X^2+2X}$!

Jawab :

$Lim_{x \to 0} \frac{X^2-1COS\ 6X}{X^3+3X^2+2X} = Lim_{X \to 0} \frac{(X+1).(X-1).\sin 6X}{X(X^2+3X+2)}$

$= Lim_{X \to 0} \frac{(X+1).(X-1).\sin 6X}{X(X\ +2).(X+1)}$

$= Lim_{X \to 0} \frac{(X-1).\sin 6X}{X(X\ +2)}$

$= Lim_{X \to 0} \frac{(X-1)}{(X+2)} \ . \ Lim_{X \to 0} \frac{\sin 6X}{X}$

$= \frac{(0-1)}{(0+2)} .6$

$= -\frac{1}{2} \ . \ 6$

$= -3$

Jadi $Lim_{x \to 0} \frac{(x^2-1)\cos 6x}{x^3+3x^2+2x} = -3$

d. Hitunglah $Lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$!

Jawab

$Lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} \qquad = Lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{-(\cos x - \sin x)}$

$$= Lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos\ x + sin\ x}{-1}$$

$$= -\cos\ \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= -\sqrt{2}$$

Jadi, $Lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x - sin^2 x}{sin\ x - cos\ x} = -\sqrt{2}$

e. Hitunglah $Lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{cos\ x - sin \frac{2\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}}$

Jawab

Dimisalkan $\frac{\pi}{6} - \frac{X}{2} = \text{t}$, maka $\frac{X}{2} = \frac{\pi}{6} - \text{t}$

$$\text{x} = 2\ (\frac{\pi}{6} - \text{t})$$

$$= \frac{\pi}{3} - 2\text{t}$$

Untuk x $= \frac{\pi}{3} - 25$ dan t $\to$ 0, maka:

$$Lim_{X \to \frac{\pi}{3}} \frac{cos\ X - sin \frac{2\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{X}{2}} = Lim_{x \to 0} \frac{COS\left(\frac{\pi}{3} - 2t\right) - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= Lim_{x \to 0} \frac{cos\ \frac{\pi}{3} cos\, 2t + sin\ \frac{\pi}{3} sin\ \ 2t - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= Lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} cos\, 2t + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, sin\ \ 2t - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= Lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - 2sin^2 t) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(sin\ \ t\ cos\ t) - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= Lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} - sin^2 t + \sqrt{3}\, sin\ \ t\ cos\ t - \frac{1}{2}}{t}$$

$$= Lim_{x\to 0} \frac{-sin^2 t+\sqrt{3}\, sin\ \ t\, cos\ t}{t}$$

$$= Lim_{x\to 0} \frac{sin^2 t(-\, sin\ t\ +\sqrt{3}\ \ cos\ t)}{t}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sin\ t}{t}\ .\ (-\sin t + cos\ t)$$

$$= 1\ .\ (-\sin 0 + \sqrt{3}\ \ cos\ 0)$$

$$= 1\ .\ (0 + \sqrt{3}\ )$$

$$= \sqrt{3}$$

Jadi, $Lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{cos\ x\ -\ sin\frac{2\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}} \quad = \sqrt{3}$

Latihan Soal

1. a. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0}$ 2 tan x

   b. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{cos\ 4x - cos\ 4x\ sin\ 3x}{3x}$

   c. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-cos\ 4x}{2x^3}$

   d. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-cos\,(\,x-3)}{x^2-6x\ +9}$

   e. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{sin\ 3x.tan\ 5x-sin\, 3x}{10x^2}$

   f. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{tan\ x-sin\ 2x}{x^2}$

   g. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-cos\ \ 10x}{5x^2}$

   h. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{cos^2\ 4x}{x^2\ sin\ 2x}$

i. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\tan 2x - \tan x}$

j. Hitunglah $\lim\limits_{X\to 0} \frac{8x}{x + \cos 2x}$

2. Selidiki apakah fungsi berikut kontinu atau diskontinu di titik yang diberikan.

   a. $f(x) = 1 - \frac{1}{2x}$ *di titik* $x = 0$

   b. $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2-x}}$ *di titik* $x = 1$

   c. $f(x) = \begin{cases} x-1, \textit{ untuk } x < 0 \\ 2x^2, \textit{ untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x^2, \textit{ untuk } x > 1 \end{cases}$

3. Diketahui f(x) = $[x]$ untuk $-2 \le x \le 3$, selidiki apakah f(x) kontinu di x = -1 dan 2.

4. Diketahui f(x) = $[x]$ untuk $-1 \le x \le 1$, selidiki apakah f(x) kontinu di x = 0 dan 1.

5. Tentukan nilai a dan b sedemikian sehingga

$$f(x) = \begin{cases} -1, \textit{ untuk } x \le 0 \\ ax + b, \textit{ untuk } 0 < x < 1 \\ 1, \textit{ untuk untuk } x > 1 \end{cases}$$

   kontinu dimana-mana.

E. Limit fungsi lainnya

1. Limit fungsi di satu titik

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

Fungsi di atas mempunyai daerah definisi $(D) = R - \{1\}$

Bagaimana nilai $f(x)$ jika x diganti dengan sebarang bilangan real yang mendekati 1.

Perhatikan tabel berikut ini

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	....	1	....	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	4,8	4,98	4,998	4,9998	...	?	....	5,0002	5,002	5,02	5,2

Berdasarkan tabel di atas,

2. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,1 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,2
3. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,01 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,02
4. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,001 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,002
5. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,0001 maka jarak f(x) dengan 5 kurang dari 0,0002
6. dan seterusnya.

Dengan menggunakan notasi harga mutlak untuk menyatakan jarak, maka berdasarkan tabel di atas,

1. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}1$ maka $|f(x) - 5| < 0{,}2$

2. Jika $0 < |x-1| < 0{,}01$ maka $|f(x)-5| < 0{,}02$
3. Jika $0 < |x-1| < 0{,}001$ maka $|f(x)-5| < 0{,}002$
4. Jika $0 < |x-1| < 0{,}0001$ maka $|f(x)-5| < 0{,}0002$
5. dan seterusnya

Dengan meninjau dari sudut lain, yaitu dengan terlebih dahulu memandang lebih dahulu nilai $f(x)$. Nilai $f(x)$) didekatkan ke 5 sekehendak kita asalkan nilai diambil cukup denkat dengan 1, Artinya $|f(x)-5|$ dapat kita buat sekehendak kita,asalkan $|x-1|$ cukup kecil pula dan x $\neq$1. Lambang-lambang yang biasa digunakan untuk selisih yang kecil ini adalah bilangan positip ε (epsilon) dan δ(delta). Sehingga kita menyatakan dengan

$|f(x)-5| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-1| < \delta$ .....(1)

Adalah penting untuk memahami besarnya bilangan positip δtergantung dari besarnya bilangan positif ε. Berdasarkan tabel kita dapatkan $|f(x)-5| \approx 0{,}2$ jika $|x-1| \approx 0{,}1$. Jadi untuk $\varepsilon \approx 0{,}2$ ada $\delta \approx 0{,}1$ dan berlaku $|f(x)-5| < 0{,}2$ apabila $0 < |x-1| < 0{,}1$. Hal ini sesuai dengan pernyataan (1) dengan $\varepsilon = 0{,}2$ dan $\delta = 0{,}1$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}02$ dan $\delta = 0{,}01$ dan dikatakan

$|f(x)-5| < 0{,}02$ apabila $0 < |x-1| < 0{,}01$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (2) dengan $\varepsilon = 0{,}02$ dan $\delta = 0{,}01$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}002$ dan $\delta = 0{,}001$ dan dikatakan

$|f(x)-5|<0{,}002$ apabila $0<|x-1|<0{,}001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (3) dengan $\varepsilon = 0{,}002$ dan $\delta = 0{,}001$.

Demikian pula $\varepsilon = 0{,}0002$ dan $\delta = 0{,}0001$ dan dikatakan

$|f(x)-5|<0{,}0002$ apabila $0<|x-1|<0{,}0001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (4) dengan $\varepsilon = 0{,}0002$ dan $\delta = 0{,}0001$. Dan seterusnya

Bagaimanapun kecilnya bilangan positip ε diberikan selalu dapat ditentukan bilangan positip δ yang tergantung pada besarnya ε tersebut sehingga berlaku:

$|f(x)-5|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$

Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sehingga

$|f(x)-5|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$

Maka kita mengatakan lim $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah 5 dan pernyataan ini ditulis dengan

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \; atau \; \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = 5$$

Definisi

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang buka I yang memuat a kecuali di a sendiri, Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L, a, L bilangan real ditulis dengan $\lim_{x\to a} f(x) = L$, Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga $|f(x)-L|<\varepsilon$ apabila $0<|x-1|<\delta$ dan ditulis dalam bentuk singkat

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ni \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \text{ } bila \text{ } 0 \left| x - a \right| < \delta$$

Contoh Soal

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3}(4x - 1) = 11$

   Bukti

   Yang harus ditunjukkan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ni$

   $\Leftrightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ apabila $0 < \left| x - a \right| < \delta$

   $\Leftrightarrow \left| (4x - 1) - 11 \right| < \varepsilon$ apabila $0 < \left| x - 3 \right| < \delta$

   Tetapi $\left| (4x - 1) - 11 \right| = \left| 4x - 12 \right| = 4\left| x - 3 \right|$

   Jadi yang diinginkan adalah $4\left| x - 3 \right| < \varepsilon$ apabila $0 < \left| x - 3 \right| < \delta$

   Atau $\left| x - 3 \right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ apabila $0 < \left| x - 3 \right| < \delta$

   Ambil $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, maka akan terpenuhi

   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ni \left| 4x - 12 \right| < \varepsilon$ apabila $0 < \left| x - 3 \right| < \delta$

2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to -4}\left(\dfrac{12}{2 - x} \right) = 2$

   Bukti

   Yang harus ditunjukkan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ni$

   $\Leftrightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ apabila $0 < \left| x - a \right| < \delta$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{12}{2-x}-2\right| = \left|\frac{12-3+2x}{2-x}\right| = \frac{2}{|2-x|}|x+4|$$

Misal $0<\delta \le 1$ maka $0<|x+4|<\delta \le 1$ dan

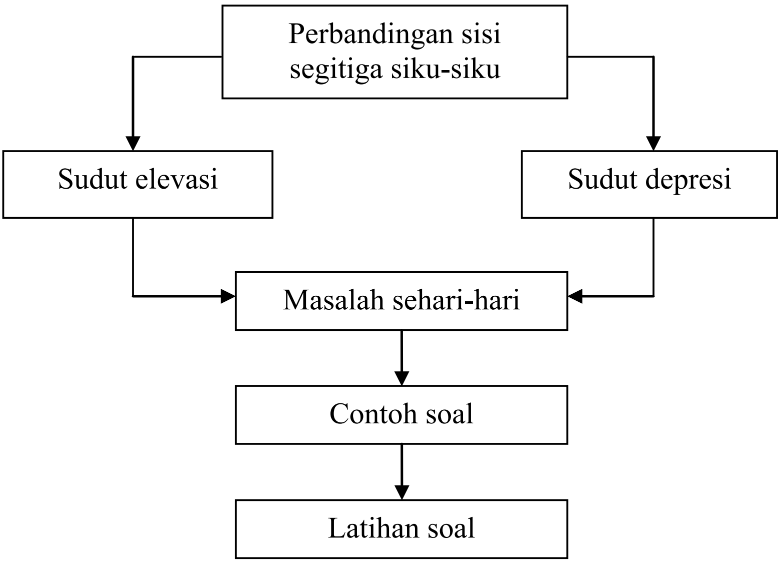
$|2-x| = |6-(4+x) \ge 6-|x+4| \ge 6-1=5$, sehingga $\frac{2}{|2-x|} \le \frac{1}{5}$

Ambil $\delta = \min\{1, \frac{5}{2}\}$ maka akan terpenuhi $\left|\frac{12}{2-x}\right| < \varepsilon$ apabila $0<|x+3|<\delta$

BAB 10

PENERAPAN TRIGONOMETRI DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI

PETA KONSEP



Ilustrasi

Gambar 10.1

Pernahkah kalian menaiki sebuah tangga dari bambu seperti gambar di samping? Bagaimana kecondongan/ kemiringan tangga tersebut? Semakin condong atau semakin tegak posisi tangga, akan memberikan dampak bagi siapapun yang menaikinya.

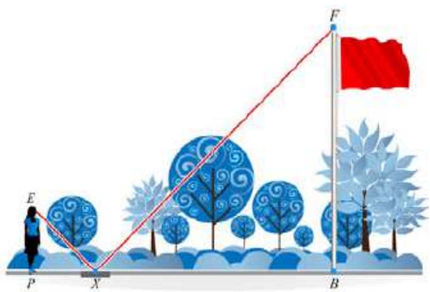
Materi

Trigonometri merupakan salah satu materi penting dalam matematika yang berhubungan dengan bangun segitiga siku-siku. Trigonometri memiliki banyak manfaat yang dapat digunakan pada kehidupan sehari-hari, baik secara langsung maupun tidak langsung, diantaranya pada bidang astronomi dan teknik sipil. Seiring perkembangan zaman yang semakin modern, trigonometri perlu dikembangkan atau dipadukan dengan disiplin kelimuan lain untuk memenuhi berbagai kebutuhan dalam menjawab tantangan dunia dalam segala sektor.

Trigonometri berawal dari kasus khusus tentang permasalahan bangun datar. Namun, sekarang trigonometri sering digunakan dalam dunia ilmu terapan (kehidupan sehari-hari), perkembangan ilmu lain, maupun perkembangan ilmu matematika itu sendiri. Matematika sendiri tumbuh sebagai ilmu yang kaya akan berbagai teorema/ postulat/ dalil dll.. Dalam implementasinya ada yang diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, tetapi ada pula yang hingga saat ini materi dalam matematika belum diketahui penerapannya secara nyata dalam kehidupan manusia.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak hal yang dapat diselesaikan melalui perbandingan trigonometri. Misalnya mengukur tinggi gedung, pohon, tiang bendera; menghitung luas tanah yang berbentuk segitiga dll. Penyelesaian permasalahan yang berhubungan dengan trigonometri hendaknya dipahami konteks permasalahannya terlebih dahulu untuk dikaitkan dengan konsep perbandingan trigonometri yang sesuai, misalnya: penggunaan rumus sinus, rumus cosinus, luas segitiga, dan sebagainya.

Salah satu penerapan yang paling banyak dilakukan adalah pengukuran tinggi suatu obyek. Pilihlah objek yang memiliki ketinggian yang sulit untuk diukur secara langsung, seperti ring basket, tiang bendera, atau ketinggian dari ruang kelasmu. Untuk mengukur ketinggian objek tersebut, misalkan tiang bendera, lakukan langkah-langkah berikut ini.



Gambar 10.2

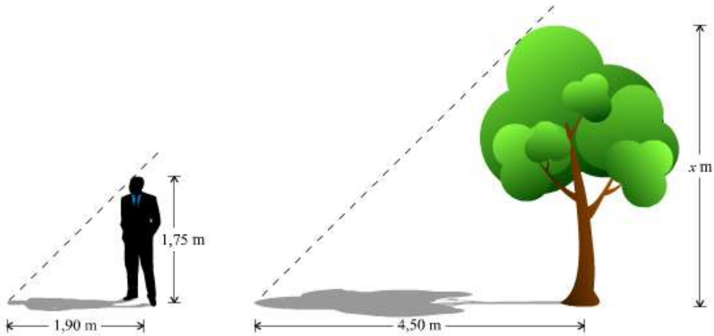
1. Buatlah tanda silang pada cermin dengan menggunakan spidol atau selotip. Sebut saja titik potong tanda silang tersebut sebagai titik X. Tempatkan cermin pada permukaan tanah yang berjarak beberapa meter dari objek yang akan diukur;
2. Pengamat harus bergerak ke titik P yang segaris dengan objek dan cermin untuk melihat bayangan dari titik F yang berada di puncak objek tersebut pada titik X di cermin tersebut. Buatlah sketsa dari posisi pengamat, cermin, dan objek yang diukur seperti gambar di atas;
3. Ukurlah jarak PX dan jarak dari titik X ke titik B yang merupakan dasar dari objek yang diukur tepat di bawah titik F. Ukurlah juga jarak antara titik P dengan level mata pengamat, E;
4. Anggaplah ruas garis FX sebagai sinar yang dipantulkan ke mata pengamat sepanjang ruas garis XE. Sesuai dengan sifat pencerminan, dapat dikatakan bahwa sudut BXFsama dengan sudut PXE. Demikian juga dengan sudut FBX sama dengan sudut EPX. Sehingga dapat disimpulkan bahwa segitiga FBX sebangun dengan segitiga EPX; dan
5. Gunakan sifat kesebangunan segitiga untuk memperkirakan ketinggian FB, EP : PX = FB : BX[20].

Metode lain dalam melakukan pengukuran suatu obyek secara tidak langsung menggunakan bayangan. Perhatikan contoh soal berikut.

Seseorang yang memiliki tinggi 1,75 m menghasilkan bayangan yang panjangnya 1,90 m. Pada saat yang sama, suatu pohon yang berada

[20] Yosep Dwi Kristanto, *Matematika Langkah Demi Langkah Untuk SMA/ MA X*, PT Grassindo Publisher, Jakarta, 2012, h. 44

beberapa meter dari orang tersebut menghasilkan bayangan yang panjangnya 4,50 m. Berapakah ketinggian dari pohon tersebut?



Gambar 10.3

Jawab

Sudut-sudut yang dibentuk oleh sinar, yang membentuk bayangan, dengan tanah merupakan sudut-sudut yang kongruen. Dengan menganggap bahwa orang dan pohon tegak lurus dengan tanah, kita mendapatkan dua segitiga yang sebangun (menggunakan teorema kesebangunan sd-sd). Tentukan tinggi pohon dengan menggunakan perbandingan dari sisi-sisi segitiga yang bersesuaian.

$\frac{1{,}75}{1{,}90} = \frac{x}{4{,}50}$ rasio sisi pada segitiga-segitiga sebangun yang sama

$4{,}50 \text{ x } \frac{1{,}75}{1{,}90} = \text{x}$ mengalikan kedua ruas dengan 4,50

$4{,}14 = \text{x}$ menyederhanakan ruas kiri

Jadi tinggi pohon tersebut adalah 4 meter lebih 14 cm.

Contoh Soal

1. Sebuah kapal berlayar dari pelabuhan A ke pelabuhan B dengan kecepatan 40 km/jam selama 2 jam dengan arah 030°, kemudian melanjutkan perjalanan dari pelabuhan B menuju pelabuhan C dengan kecepatan 60 km/jam selama 2,5 jam dengan arah 150°. Tentukan jarak antara pelabuhan A dan C!

   Jawab

   Jarak = kecepatan x waktu

   Jarak pelabuhan A ke B adalah 40 x 2 = 80 km

   Jarak pelabuhan B ke C adalah 60 x 2,5 = 150 km

   Besar sudut ABC adalah 30° + 30° = 60°

   Gunakan aturan cosinus untuk mencari AC

   $AC^2 = AB^2 + BC^2 - [2 \times AB \times BC \times \cos \angle ABC]$

   $AC^2 = 80^2 + 150^2 - [2 \times 80 \times 150 \times \cos 60°]$

   $AC^2 = 28.900 - [2 \times 80 \times 150 \times \frac{1}{2}]$

   $AC^2 = 28.900 - 12.000$

   $AC = \sqrt{16.900}$

   $AC = 130$

   Jadi jarak antara pelabuhan A dan B adalah 130 km

2. Pak Darma yang memiliki tinggi 1,5 meter akan mengukur tinggi pohon. Di tempat Pak Darma berdiri, terdapat puncak gedung yang

terlihat dengan sudut elevasi 40° dari sudut pandang mata Pak Darma. Jarak horizontal dari Pak Darma ke gedung sama dengan 18 meter. Berapakah tinggi pohon tersebut?

Diketahui: tinggi badan Pak Darma = AD = CG = 1,5 meter

Besar sudut elevasi = $\angle EDC = 40°$

Jarak horizontal dari Pak Darma ke pohon = AG = CD = 18 meter

Ditanya: tinggi pohon, yaitu panjang EG?

Jawab.

Diperoleh hubungan perbandingan trigonometri untuk tangen $\angle EDC$

tan $\angle EDC = \frac{EC}{CD}$

$\Leftrightarrow$ tan 40° = $\frac{EC}{18}$

$\Leftrightarrow$ EC = 18 . tan 40°

$\Leftrightarrow$ EC = 18 . (0,839)

$\Leftrightarrow$ EC = 15,1 (teliti sampai 1 tempat desimal)

Tinggi pohon EG = EC + CG

= 15,1 meter + 1,5 meter

= 16,6 meter

Jadi tinggi pohon tersebut adalah 16,6 meter

3. Seseorang berdiri dari kejauhan 20 meter dari pintu gerbang sebuah gedung bertingkat, sudut elevasi gedung apabila dilihat dari puncak pintu gerbang dan tempat berdiri orang tersebut berturut-turut adalah 60° dan 50°. Jika tinggi orang tersebut sama dengan tinggi pintu gerbang = 2 meter, tentukan tinggi gedung tersebut!

Diketahui: tinggi orang = tinggi gerbang = AC = BD = FG = 2 meter

Besar sudut elevasi = $\angle ECF = 50°$ dan $\angle ECF = 60°$

Jarak horizontal dari orang tersebut ke pintu gerbang = AB = CD = 20 meter

Ditanya: tinggi gedung, yaitu panjang EG dan jarak dari orang yang berdiri tersebut ke gedung?

Jawab.

a. Tinggi gedung, yaitu panjang EG dalam ΔECD.

   $\angle$ CED = 180° − ($\angle$CED + $\angle$ ECD)

   = 180° − ((180° − 60°) + 50°)

   = 180° − (120° + 50°)

   = 180° − 170°

   = 10°

   Jadi besar sudut CED adalah 10°

   Terlebih dahulu kita temukan panjang DE

   $\frac{CD}{\sin \angle CED} = \frac{DE}{\sin \angle ECD}$

   $\Leftrightarrow \frac{20}{\sin 10°} = \frac{DE}{\sin 50°}$

   $\Leftrightarrow$ DE . $\sin 10°$ = 20 . $\sin 50°$

   $\Leftrightarrow$ 0,174 DE = 20 . (0,766)

   $\Leftrightarrow$ 0,174 DE = 15,32

   $\Leftrightarrow$ DE = $\frac{15,32}{0,174}$

   $\Leftrightarrow$ DE = 88,05

Dalam ΔEDF.

$sin\,60° = \frac{DF}{DE}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3}\ \frac{EF}{88,05}$

Sehingga EF = 88,05 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

= 88,05 – (0,87)

= 76,60 meter

Jadi panjang EF = 76,60 meter

Tinggi gedung = tinggi EG

= tinggi EF + tinggi FG

= (76,60 + 2) meter

= 78,60 meter

b. Jarak dari orang yang berdiri ke gedung = Panjang AB + panjang DF

Mencari panjang DF dahulu

tan 60° $= \frac{EF}{DE}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{76,60}{DF}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,DF\ = 76,60$

$\Leftrightarrow$ DF = 44,225

Jadi panjang DF = 44,225 meter

Jarak dari orang yang berdiri kegedung = panjang AB + panjang DF

= (20 + 44,225) meter

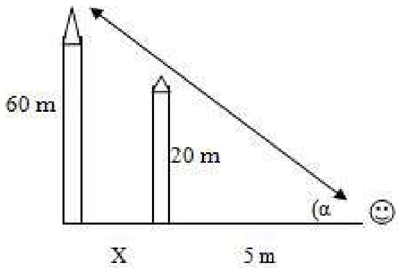
= 64,225 meter

Jadi jarak dari orang yang berdiri ke gedung adalah 64,225 meter.

Perhatikan gambar berikut[21]!

Gambar 10.4

Jika diilustrasikan, gambar diatas menjadi seperti berikut.



Gambar 10.5

Contoh Soal

1. Seorang pengendara sepeda motor melintas di sebuah jembatan. Ia dapat melihat puncak sebuah tiang penyangga setinggi 20 m dari jarak 5 m dengan sudut elevasi sebesar α. Jika orang tersebut melihat puncak tiang yang kedua dengan tinggi 60 m dengan sudut elevasi yang sama, maka

[21] Asih Rokheni, Manfaat Trigonometri dalam Kehidupan, http://awmath25.blogspot.com/. (online), Diakses pada tanggal 14 Juni 2018

berapakah jarak orang itu dengan tiang penyangga yang kedua? (Ilustrasi berdasarkan gambar 10.5)

Jawab

$$\tan \angle = \frac{y}{x}$$

$$\tan \angle = \frac{20}{5} = \frac{60}{x}$$

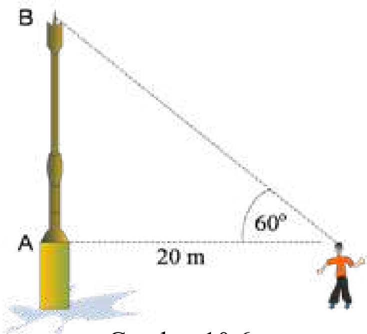
$$= \frac{5x60}{20x}$$

$$x = \frac{300}{20}$$

$x = 15$

Jadi jarak antara orang itu dengan tiang penyangga yang kedua adalah 15 meter.

2. Seorang anak berdiri 20 meter dari sebuah menara seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 10.6

Berapakah tinggi menara (dihitung dari titik A)?

Jawab

$\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\tan 60^0 = \dfrac{AB}{20}$

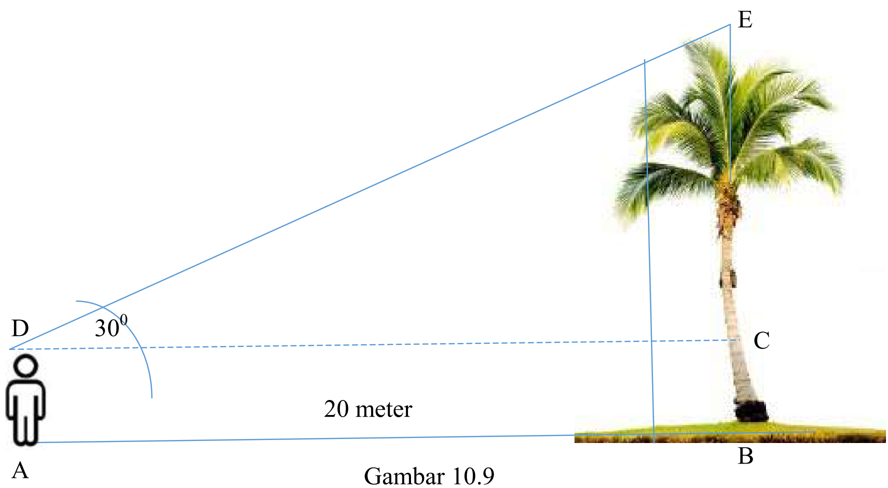
$\dfrac{AB}{20} = \sqrt{3}$

$AB = 20 \text{ x} \sqrt{3}$

$1{,}7 \text{ x } 20 = 34$

Jadi tinggi menara tersebut adalah 34 meter.

3. Ahmad dengan tinggi badan 1,3 m akan mengukur tinggi pohon kelapa. Di tempat Ahmad berdiri, puncak pohon terlihat dengan sudut elevasi 30° dari sudut pandang mata Ahmad. Jika jarak horizontal dari Ahmad ke pohon 20 m, berapakah tinggi pohon tersebut?



Gambar 10.9

Perhatikan gambar diatas!

Diketahui :

Tinggi badan Ahmad = AD = CG = 1,3 m

Besar sudut elevasi = $\angle EDC = 30°$

Jarak horizontal dari Ahmad ke pohon = AG = CD = 20 m

Ditanya : tinggi pohon yaitu panjang EG ?

Jawab

Berdasarkan gambar diperoleh hubungan perbandingan trigonometri untuk tangen $\angle EDC$.

$\tan \angle EDC \quad = \frac{EC}{CD}$

$$\Leftrightarrow tan\, 30° = \frac{EC}{18}$$

$\Leftrightarrow EC = 20 \,.\, tan\, 30°$

$\Leftrightarrow \mathrm{EC} = 20 \,.\, (0{,}577)$

$\Leftrightarrow \mathrm{EC} \ = 11{,}54$

$\text{Tinggi pohon EG} = \ \mathrm{EC} \ + \ \mathrm{CG}$

$$= \ 11{,}54 \text{ m} \ + \ 1{,}3 \text{ m} \ = \ 12{,}84 \text{ m}$$

Jadi tinggi pohon tersebut adalah 12,84 m.

Latihan Soal

1. Seorang anak yang memiliki tinggi badan 155 cm berdiri pada jarak 12 cm dari tiang bendera. Ia melihat tiang bendera sudut elevasi 45^0. Hitunglah tinggi tiang bendera tersebut!

2. Seorang anak ingin mengukur sebuah pohon, jarak anak dengan pohon 6 meter, tinggi anak 1,5 meter. Setelah diteropong, jarak mata pengamat dengan benang pemberat 3 cm, jarak mata pengamat dengan titik sumbu busur 5 cm, jarak titik sumbu busur dengan tinggi mata pengamat 4 cm, jika skala yang digunakan 1 : 100 cm. Berapa tinggi pohon tersebut ?
3. Abi dengan tinggi 180 cm mengamati puncak gedung dengan sudut elevasi 45°. Kemudian ia berjalan sejauh 12 meter mendekati gedung. Di posisi yang baru, Abi mengamati puncak gedung dengan sudut elevasi 60°. Tentukan tinggi gedung tersebut! ($\sqrt{3}$ = 1,7)
4. Seorang anak yang mempunyai tinggi 1,5 m menerbangkan layang layang yang benangnya sepanjang 15 m, jika sudut yang dibentuk antara benang layang-layang yang terbang dengan garis horisontal adalah 30 derajat, berapakah ketinggian layang-layang tersebut!
5. Seorang anak akan mengukur tinggi pohon yang berjarak $4\sqrt{3}$m dari dirinya. Antara mata dengan puncak pohon tersebut membentuk sudut elevasi 30^0. Jika tinggi anak tersebut 1,6 m; berapakah tinggi pohon itu?
6. Rasta memiliki tinggi badan 1,5 m. Ia akan mengukur tinggi tiang listrik yang ada di depan rumahnya. Di tempat Rasta berdiri, puncak tiang listrik terlihat dengan sudut elevasi 60° dari mata Rasta. Jika jarak horizontal dari Rasta ke tiang listrik 15 m, berapakah tinggi tiang listrik tersebut?

7. Seorang anak yang memiliki tinggi badan 175 cm berdiri pada jarak 15 cm dari tiang bendera. Ia melihat gedung yang ada di depannya dengan sudut elevasi sebesar 45^0. Berapakah tinggi gedung itu?
8. Sebuah apel berada di dekat sebuah tumbuhan yang tingginya 120 cm. Jika antara titik puncak tumbuhan ke titik puncak buah apel adalah 45^0, berapakah jarak apel ke tumbuhan tersebut?
9. Sebuah kapal berlayar dari pelabuhan A ke pelabuhan B dengan kecepatan 40 km/jam selama 2 jam dengan arah 030°, kemudian melanjutkan perjalanan dari pelabuhan B menuju pelabuhan C dengan kecepatan 60 km/jam selama 2,5 jam dengan arah 150°. Buatlah sketsa perjalanan kapal dan tentukan jarak antara pelabuhan A dan C!
10. Perahu 'Sinar Mutiara' berlayar dari pelabuhan A ke pelabuhan B dengan kecepatan 60 km/jam selama 3 jam dengan arah 045°, kemudian melanjutkan perjalanan dari pelabuhan B menuju pelabuhan C dengan kecepatan 50 km/jam selama 2 jam dengan arah 120°. Buatlah sketsa perjalanan kapal dan tentukan jarak antara pelabuhan A dan C!

GLOSSARY

Istilah	Keterangan
Cosecan	Perbandingan sisi miring segitiga dengan sisi yang terletak di depan sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)
Cos	Perbandingan panjang sisi horizontal di depan sudut dengan panjang sisi miring segitiga
Cotangen	Perbandingan sisi segitiga yang terletak pada sudut dengan sisi segitiga yang terletak di depan sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)
Identitas Trigonometri	Identitas trigonometri adalah suatu persamaan dari fungsi trigonometri yang bernilai benar untuk setiap sudutnya dengan kedua sisi ruasnya terdefinisi
Koordinat	Bilangan yg dipakai untuk menunjukkan lokasi suatu titik dl garis, permukaan, atau ruang
Koordinat Cartesius	Letak suatu titik pada bidang yang dinyatakan dalam absis (x) dan ordinat (y)
Koordinat Kutub	Letak suatu titik pada bidang yang dinyatakan dalam bentuk jarak (r) dan sudut (α)
Rumus Pythagoras	Rumus yang digunakan untuk mencari panjang sisi pada sebuah segitiga siku-siku
Secan	Perbandingan sisi miring segitiga dengan sisi yang terletak pada sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90o)

Trigonometri	
Segitiga Siku-Siku	Segitiga yang salah satu sudutnya sebesar 90°
Sin	Perbandingan panjang sisi vertikal di depan sudut dengan panjang sisi miring segitiga
Sudut	Suatu daerah yang dibentuk oleh dua buah ruas garis yang titik pangkalnya sama
Tan	Perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)
Trigonometri	Bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang hubungan antara sisi dan sudut suatu segitiga serta fungsi dasar yang muncul dari relasi tersebut

DAFTAR PUSTAKA

Gunawan, J. 2006. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri*. Jakarta : Grasindo

Kariadinata, Rahayu. 2014. *Trigonometri Dasar*. Bandung : Pustaka Setia

Rokhaeni, Asih. 2017. *Manfaat dan Aplikasi Trigonometri dalam Kehidupan*. [online] http://awmath25.blogspot.com/. Diakses pada tanggal 14 Juni 2018

S, Wahyu. 2012. Trigonometri. Malang : Cahaya Ilmu

Wirodikromo, S. 2004. *Matematika SMA X*. Bandung : Erlangga

Zen, Fathurin. 2014. Trigonometri. Bandung : Alfabeta

Tabel Nilai Sudut-Sudut Istimewa

(Berbagai Kuadran)

α	I				
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	td
csc α	td	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
sec α	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	td
cot α	td	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

α	II			
	120°	**135°**	**150°**	**180°**
	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tan α	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
csc α	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	td
sec α	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
cot α	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	td

α	III			
	210°	**225°**	**240°**	**270°**
	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
sin α	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
cos α	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan α	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	td
csc α	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
sec α	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	td
cot α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

α	IV			
	300°	**315°**	**330°**	**360°**
	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin α	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
tan α	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
csc α	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	td
sec α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1
cot α	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	td

Tabel Nilai Sin, Cos dan Tan untuk Sudut 0^0 Hingga 360^0

Sudut	sin	cos	tan
0	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.3640
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.4040
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

Sudut	sin	cos	tan
45	0.7071	0.7071	1.0000
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900
90	1.0000	0.0000	+ –

Tabel Sinus

Sin a°

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,000	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016
1	0,017	0,019	0,021	0,023	0,024	0,026	0,028	0,030	0,031	0,033
2	0,035	0,037	0,038	0,040	0,042	0,044	0,045	0,047	0,049	0,051
3	0,052	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061	0,063	0,065	0,066	0,068
4	0,070	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,080	0,082	0,084	0,085
5	0,087	0,089	0,091	0,092	0,094	0,096	0,098	0,099	0,101	0,103
6	0,105	0,106	0,108	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120
7	0,122	0,124	0,125	0,127	0,129	0,131	0,132	0,134	0,136	0,137
8	0,139	0,141	0,143	0,144	0,146	0,148	0,150	0,151	0,153	0,155
9	0,156	0,158	0,160	0,162	0,163	0,165	0,167	0,168	0,170	0,172
10	0,174	0,175	0,177	0,179	0,181	0,182	0,184	0,186	0,187	0,189
11	0,191	0,193	0,194	0,196	0,198	0,199	0,201	0,203	0,204	0,206
12	0,208	0,210	0,211	0,213	0,215	0,216	0,218	0,220	0,222	0,223
13	0,225	0,227	0,228	0,230	0,232	0,233	0,235	0,237	0,239	0,240
14	0,242	0,244	0,245	0,247	0,249	0,250	0,252	0,254	0,255	0,257
15	0,259	0,261	0,262	0,264	0,266	0,267	0,269	0,271	0,272	0,274
16	0,276	0,277	0,279	0,281	0,282	0,284	0,286	0,287	0,289	0,291
17	0,292	0,294	0,296	0,297	0,299	0,301	0,302	0,304	0,306	0,307
18	0,309	0,311	0,312	0,314	0,316	0,317	0,319	0,321	0,322	0,324
19	0,326	0,327	0,329	0,331	0,332	0,334	0,335	0,337	0,339	0,340
20	0,342	0,344	0,345	0,347	0,349	0,350	0,352	0,353	0,355	0,357
21	0,358	0,360	0,362	0,363	0,365	0,367	0,368	0,370	0,371	0,373
22	0,375	0,376	0,378	0,379	0,381	0,383	0,384	0,386	0,388	0,389
23	0,391	0,392	0,394	0,396	0,397	0,399	0,400	0,402	0,404	0,405
24	0,407	0,408	0,410	0,412	0,413	0,415	0,416	0,418	0,419	0,421
25	0,423	0,424	0,426	0,427	0,429	0,431	0,432	0,434	0,435	0,437
26	0,438	0,440	0,442	0,443	0,445	0,446	0,443	0,449	0,451	0,452
27	0,454	0,456	0,457	0,459	0,460	0,462	0,463	0,465	0,466	0,468
28	0,469	0,471	0,473	0,474	0,476	0,477	0,479	0,480	0,482	0,483
29	0,485	0,486	0,488	0,489	0,491	0,492	0,494	0,495	0,497	0,498
30	0,500	0,502	0,503	0,505	0,506	0,508	0,509	0,511	0,512	0,514
31	0,515	0,517	0,518	0,520	0,521	0,522	0,524	0,525	0,527	0,528
32	0,530	0,531	0,533	0,534	0,536	0,537	0,539	0,540	0,542	0,543
33	0,545	0,546	0,548	0,549	0,550	0,552	0,553	0,555	0,556	0,558
34	0,559	0,561	0,562	0,564	0,565	0,566	0,568	0,569	0,571	0,572
35	0,574	0,575	0,576	0,578	0,579	0,581	0,582	0,584	0,585	0,586
36	0,588	0,589	0,591	0,592	0,593	0,595	0,596	0,598	0,599	0,600
37	0,602	0,603	0,605	0,606	0,607	0,609	0,610	0,612	0,613	0,614
38	0,616	0,617	0,618	0,620	0,621	0,623	0,624	0,625	0,627	0,628
39	0,629	0,631	0,632	0,633	0,635	0,636	0,637	0,639	0,640	0,641
40	0,643	0644	0,645	0,647	0,648	0,649	0,651	0,652	0,653	0,655

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,656	0,657	0,659	0,660	0,661	0,663	0,664	0,665	0,667	0,668
42	0,669	0,670	0,672	0,673	0,674	0,676	0,677	0,678	0,679	0,681
43	0,682	0,683	0,685	0,686	0,687	0,688	0,690	0,691	0,692	0,693
44	0,695	0,696	0,697	0,698	0,700	0,701	0,702	0,703	0,705	0,706
45	0,707	0,708	0,710	0,711	0,712	0,713	0,714	0,716	0,717	0,718
46	0,719	0,721	0,722	0,723	0,724	0,725	0,727	0,728	0,729	0,730
47	0,731	0,733	0,734	0,735	0,736	0,737	0,738	0,740	0,741	0,742
48	0,743	0,744	0,745	0,747	0,748	0,749	0,750	0,751	0,752	0,754
49	0,755	0,756	0,757	0,758	0,759	0,760	0,762	0,763	0,764	0,765
50	0,766	0,767	0,768	0,769	0,771	0,772	0,773	0,774	0,775	0,776
51	0,777	0,778	0,779	0,780	0,782	0,783	0,784	0,785	0,786	0,787
52	0,788	0,789	0,790	0,791	0,792	0,793	0,794	0,795	0,797	0,798
53	0,799	0,800	0,801	0,802	0,803	0,804	0,805	0,806	0,807	0,808
54	0,809	0,810	0,811	0,812	0,813	0,814	0,815	0,816	0,817	0,818
55	0,819	0,820	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826	0,827	0,828
56	0,829	0,830	0,831	0,832	0,833	0,834	0,835	0,836	0,837	0,838
57	0,839	0,840	0,841	0,842	0,842	0,843	0,844	0,845	0,846	0,847
58	0,848	0,849	0,850	0,851	0,852	0,853	0,854	0,854	0,855	0,856
59	0,857	0,858	0,859	0,860	0,861	0,862	0,863	0,863	0,864	0,865
60	0,866	0,867	0,868	0,869	0,869	0,870	0,871	0,872	0,873	0,874
61	0,875	0,875	0,876	0,877	0,878	0,879	0,880	0,880	0,881	0,882
62	0,883	0,884	0,885	0,885	0,886	0,887	0,888	0,889	0,889	0,890
63	0,891	0,892	0,893	0,893	0,894	0,895	0,896	0,896	0,897	0,898
64	0,899	0,900	0,900	0,901	0,902	0,903	0,903	0,904	0,905	0,906
65	0,906	0,907	0,908	0,909	0,909	0,910	0,911	0,911	0,912	0,913
66	0,914	0,914	0,915	0,916	0,916	0,917	0,918	0,918	0,919	0,920
67	0,921	0,921	0,922	0,923	0,923	0,924	0,925	0,925	0,926	0,927
68	0,927	0,928	0,928	0,929	0,930	0,930	0,931	0,932	0,932	0,933
69	0,934	0,934	0,935	0,935	0,936	0,937	0,937	0,938	0,938	0,939
70	0,940	0,940	0,941	0,941	0,942	0,943	0,943	0,944	0,944	0,945
71	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948	0,948	0,949	0,949	0,950	0,951
72	0,951	0,952	0,952	0,953	0,953	0,954	0,954	0,955	0,955	0,956
73	0,956	0,957	0,957	0,958	0,958	0,959	0,959	0,960	0,960	0,961
74	0,961	0,962	0,962	0,963	0,963	0,964	0,964	0,965	0,965	0,965
75	0,966	0,966	0,967	0,967	0,968	0,968	0,969	0,969	0,969	0,970
76	0,970	0,971	0,971	0,972	0,972	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974
77	0,974	0,975	0,975	0,976	0,976	0,976	0,977	0,977	0,977	0,978
78	0,978	0,979	0,979	0,979	0,980	0,980	0,980	0,981	0,981	0,981
79	0,982	0,982	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,984	0,985
80	0,985	0,985	0,985	0,986	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,987
81	0,988	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990	0,990	0,990
82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,992
83	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994
84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996
85	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999
87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabel Kosinus

Cos a°

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	0,996
5	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	0,993	0,993
7	0,993	0,992	0,992	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	0,991	0,991
8	0,990	0,990	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	0,988	0,988
9	0,988	0,987	0,987	0,987	0,987	0,986	0,986	0,986	0,985	0,985
10	0,985	0,985	0,984	0,984	0,984	0,983	0,983	0,983	0,982	0,982
11	0,982	0,981	0,981	0,981	0,980	0,980	0,980	0,979	0,979	0,979
12	0,978	0,978	0,977	0,977	0,977	0,976	0,976	0,976	0,975	0,975
13	0,974	0,974	0,974	0,973	0,973	0,972	0,972	0,972	0,971	0,971
14	0,970	0,970	0,969	0,969	0,969	0,968	0,968	0,967	0,967	0,966
15	0,966	0,965	0,965	0,965	0,964	0,964	0,963	0,963	0,962	0,962
16	0,961	0,961	0,960	0,960	0,959	0,959	0,958	0,958	0,957	0,957
17	0,956	0,956	0,955	0,955	0,954	0,954	0,953	0,953	0,952	0,952
18	0,951	0,951	0,950	0,949	0,949	0,948	0,948	0,947	0,947	0,946
19	0,946	0,945	0,944	0,944	0,943	0,943	0,942	0,941	0,941	0,940
20	0,940	0,939	0,938	0,938	0,937	0,937	0,936	0,935	0,935	0,934
21	0,934	0,933	0,932	0,932	0,931	0,930	0,930	0,929	0,928	0,928
22	0,927	0,927	0,926	0,925	0,925	0,924	0,923	0,923	0,922	0,921
23	0,921	0,920	0,919	0,918	0,918	0,917	0,916	0,916	0,915	0,914
24	0,914	0,913	0,912	0,911	0,911	0,910	0,909	0,909	0,908	0,907
25	0,906	0,906	0,905	0,904	0,903	0,903	0,902	0,901	0,900	0,900
26	0,899	0,898	0,897	0,896	0,896	0,895	0,894	0,893	0,893	0,892
27	0,891	0,890	0,889	0,889	0,888	0,887	0,886	0,885	0,885	0,884
28	0,883	0,882	0,881	0,880	0,880	0,879	0,878	0,877	0,876	0,875
29	0,875	0,874	0,873	0,872	0,871	0,870	0,869	0,869	0,868	0,867
30	0,866	0,865	0,864	0,863	0,863	0,862	0,861	0,860	0,859	0,858
31	0,857	0,856	0,855	0,854	0,854	0,853	0,852	0,851	0,850	0,849
32	0,848	0,847	0,846	0,845	0,844	0,843	0,842	0,842	0,841	0,840
33	0,839	0,838	0,837	0,836	0,835	0,834	0,833	0,832	0,831	0,830
34	0,829	0,828	0,827	0,826	0,825	0,824	0,823	0,822	0,821	0,820
35	0,819	0,818	0,817	0,816	0,815	0,814	0,813	0,812	0,811	0,810
36	0,809	0,808	0,807	0,806	0,805	0,804	0,803	0,802	0,801	0,800
37	0,799	0,798	0,797	0,795	0,794	0,793	0,792	0,791	0,790	0,789
38	0,788	0,787	0,786	0,785	0,784	0,783	0,782	0,780	0,779	0,778
39	0,777	0,776	0,775	0,774	0,773	0,772	0,771	0,769	0,768	0,767
40	0,766	0,765	0,764	0,763	0,762	0,760	0,759	0,758	0,757	0,756

a⁰	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,755	0,754	0,752	0,751	0,750	0,749	0,748	0,747	0,745	0,744
42	0,743	0,742	0,741	0,740	0,738	0,737	0,736	0,735	0,734	0,733
43	0,731	0,730	0,729	0,728	0,727	0,725	0,724	0,723	0,722	0,721
44	0,719	0,718	0,717	0,716	0,714	0,713	0,712	0,711	0,710	0,708
45	0,707	0,706	0,705	0,703	0,702	0,701	0,700	0,698	0,697	0,696
46	0,695	0,693	0,692	0,691	0,690	0,688	0,687	0,686	0,685	0,683
47	0,682	0,681	0,679	0,678	0,677	0,676	0,674	0,673	0,672	0,670
48	0,669	0,668	0,667	0,665	0,664	0,663	0,661	0,660	0,659	0,657
49	0,656	0,655	0,653	0,652	0,651	0,649	0,648	0,647	0,645	0,644
50	0,643	0,641	0,640	0,639	0,637	0,636	0,635	0,633	0,632	0,631
51	0,629	0,628	0,627	0,625	0,624	0,623	0,621	0,620	0,618	0,617
52	0,616	0,614	0,613	0,612	0,610	0,609	0,607	0,606	0,605	0,603
53	0,602	0,600	0,599	0,598	0,596	0,595	0,593	0,592	0,591	0,589
54	0,588	0,586	0,585	0,584	0,582	0,581	0,579	0,578	0,576	0,575
55	0,574	0,572	0,571	0,569	0,568	0,566	0,565	0,564	0,562	0,561
56	0,559	0,558	0,556	0,555	0,553	0,552	0,550	0,549	0,548	0,546
57	0,545	0,543	0,542	0,540	0,539	0,537	0,536	0,534	0,533	0,531
58	0,530	0,528	0,527	0,525	0,524	0,522	0,521	0,520	0,518	0,517
59	0,515	0,514	0,512	0,511	0,509	0,508	0,506	0,505	0,503	0,502
60	0,500	0,498	0,497	0,495	0,494	0,492	0,491	0,489	0,488	0,486
61	0,485	0,483	0,482	0,480	0,479	0,477	0,476	0,474	0,473	0,471
62	0,469	0,468	0,466	0,465	0,463	0,462	0,460	0,459	0,457	0,456
63	0,454	0,452	0,451	0,449	0,448	0,446	0,445	0,443	0,442	0,440
64	0,438	0,437	0,435	0,434	0,432	0,431	0,429	0,427	0,426	0,424
65	0,423	0,421	0,419	0,418	0,416	0,415	0,413	0,412	0,410	0,408
66	0,407	0,405	0,404	0,402	0,400	0,399	0,397	0,396	0,394	0,392
67	0,691	0,389	0,388	0,386	0,384	0,383	0,381	0,379	0,378	0,376
68	0,375	0,373	0,371	0,370	0,368	0,367	0,365	0,363	0,362	0,360
69	0,358	0,357	0,355	0,353	0,352	0,350	0,349	0,347	0,345	0,344
70	0,342	0,340	0,339	0,337	0,335	0,334	0,332	0,331	0,329	0,327
71	0,326	0,324	0,322	0,321	0,319	0,317	0,316	0,314	0,312	0,311
72	0,309	0,307	0,306	0,304	0,302	0,301	0,299	0,297	0,296	0,294
73	0,292	0,291	0,289	0,287	0,286	0,284	0,282	0,281	0,279	0,277
74	0,276	0,274	0,272	0,271	0,269	0,267	0,266	0,264	0,262	0,261
75	0,259	0,257	0,255	0,254	0,252	0,250	0,249	0,247	0,245	0,244
76	0,242	0,210	0,239	0,237	0,235	0,233	0,232	0,230	0,228	0,227
77	0,225	0,223	0,222	0,220	0,218	0,216	0,215	0,213	0,211	0,210
78	0,208	0,206	0,204	0,203	0,201	0,199	0,198	0,196	0,194	0,193
79	0,191	0,189	0,187	0,186	0,184	0,182	0,181	0,179	0,177	0,175
80	0,174	0,172	0,170	0,168	0,167	0,165	0,163	0,162	0,160	0,158
81	0,156	0,155	0,153	0,151	0,150	0,148	0,146	0,144	0,143	0,141
82	0,139	0,137	0,136	0,134	0,132	0,131	0,129	0,127	0,125	0,124
83	0,122	0,120	0,118	0,117	0,115	0,113	0,111	0,110	0,108	0,106
84	0,105	0,103	0,101	0,099	0,098	0,096	0,094	0,092	0,091	0,089
85	0,087	0,085	0,084	0,082	0,080	0,078	0,077	0,075	0,073	0,071
86	0,070	0,068	0,066	0,065	0,063	0,061	0,059	0,058	0,056	0,054
87	0,052	0,051	0,049	0,047	0,045	0,044	0,042	0,040	0,038	0,037
88	0,035	0,033	0,031	0,030	0,028	0,026	0,024	0,023	0,021	0,019
89	0,017	0,016	0,014	0,012	0,010	0,009	0,007	0,005	0,003	0,002
90	0,000									

Tabel Tangen

Tan a°

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,000	0,002	0,003	0,005	0,007	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016
1	0,017	0,019	0,021	0,023	0,024	0,026	0,028	0,030	0,031	0,033
2	0,035	0,037	0,038	0,040	0,042	0,044	0,045	0,047	0,049	0,051
3	0,052	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061	0,063	0,065	0,066	0,068
4	0,070	0,072	0,073	0,075	0,077	0,079	0,080	0,082	0,084	0,086
5	0,087	0,089	0,091	0,093	0,095	0,096	0,098	0,100	0,102	0,103
6	0,105	0,107	0,109	0,110	0,112	0,114	0,116	0,117	0,119	0,121
7	0,123	0,125	0,126	0,128	0,130	0,132	0,133	0,135	0,137	0,139
8	0,141	0,142	0,144	0,146	0,148	0,149	0,151	0,153	0,155	0,157
9	0,158	0,160	0,162	0,164	0,166	0,167	0,169	0,171	0,173	0,175
10	0,176	0,178	0,180	0,182	0,184	0,185	0,187	0,189	0,191	0,193
11	0,194	0,196	0,198	0,200	0,202	0,203	0,205	0,207	0,209	0,211
12	0,213	0,214	0,216	0,218	0,220	0,222	0,224	0,225	0,227	0,229
13	0,231	0,233	0,235	0,236	0,238	0,240	0,242	0,244	0,246	0,247
14	0,249	0,251	0,253	0,255	0,257	0,259	0,260	0,262	0,264	0,266
15	0,268	0,270	0,272	0,274	0,275	0,277	0,279	0,281	0,283	0,285
16	0,287	0,289	0,291	0,292	0,294	0,296	0,298	0,300	0,302	0,304
17	0,306	0,308	0,310	0,311	0,313	0,315	0,317	0,319	0,321	0,323
18	0,325	0,327	0,329	0,331	0,333	0,335	0,337	0,338	0,340	0,342
19	0,344	0,346	0,348	0,350	0,352	0,354	0,356	0,358	0,360	0,362
20	0,364	0,366	0,368	0,370	0,372	0,374	0,376	0,378	0,380	0,382
21	0,384	0,386	0,388	0,390	0,392	0,394	0,396	0,398	0,400	0,402
22	0,404	0,406	0,408	0,410	0,412	0,414	0,416	0,418	0,420	0,422
23	0,424	0,427	0,429	0,431	0,433	0,435	0,437	0,439	0,441	0,443
24	0,445	0,447	0,449	0,452	0,454	0,456	0,458	0,460	0,462	0,464
25	0,466	0,468	0,471	0,473	0,475	0,477	0,479	0,481	0,483	0,486
26	0,488	0,490	0,492	0,494	0,496	0,499	0,501	0,503	0,505	0,507
27	0,510	0,512	0,514	0,516	0,518	0,521	0,523	0,525	0,527	0,529
28	0,532	0,534	0,536	0,538	0,541	0,543	0,545	0,547	0,550	0,552
29	0,554	0,557	0,559	0,561	0,563	0,566	0,568	0,570	0,573	0,575
30	0,577	0,580	0,582	0,584	0,587	0,589	0,591	0,594	0,596	0,598
31	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,613	0,615	0,618	0,620	0,622
32	0,625	0,627	0,630	0,632	0,635	0,637	0,640	0,642	0,644	0,647
33	0,649	0,652	0,654	0,657	0,659	0,662	0,664	0,667	0,669	0,672
34	0,675	0,677	0,680	0,682	0,685	0,687	0,690	0,692	0,695	0,698
35	0,700	0,703	0,705	0,708	0,711	0,713	0,716	0,719	0,721	0,724
36	0,727	0,729	0,732	0,735	0,737	0,740	0,743	0,745	0,748	0,751
37	0,754	0,756	0,759	0,762	0,765	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778
38	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807
39	0,810	0,813	0,816	0,818	0,821	0,824	0,827	0,830	0,833	0,836
40	0,839	0,842	0,845	0,848	0,851	0,854	0,857	0,860	0,863	0,866

a°	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
41	0,869	0,872	0,875	0,879	0,882	0,885	0,888	0,891	0,894	0,897
42	0,900	0,904	0,907	0,910	0,913	0,916	0,920	0,923	0,926	0,929
43	0,933	0,936	0,939	0,942	0,946	0,949	0,952	0,956	0,959	0,962
44	0,966	0,969	0,972	0,76	0,979	0,983	0,986	0,990	0,993	0,997
45	1,000	1,003	1,007	1,011	1,014	1,018	1,021	1,025	1,028	1,032
46	1,036	1,039	1,043	1,046	1,050	1,054	1,057	1,061	1,065	1,069
47	1,072	1,076	1,080	1,084	1,087	1,091	1,095	1,099	1,103	1,107
48	1,111	1,115	1,118	1,122	1,126	1,130	1,134	1,138	1,142	1,146
49	1,150	1,154	1,159	1,163	1,167	1,171	1,175	1,179	1,183	1,188
50	1,192	1,196	1,200	1,205	1,209	1,213	1,217	1,222	1,226	1,230
51	1,235	1,239	1,244	1,248	1,253	1,257	1,262	1,266	1,271	1,275
52	1,280	1,285	1,289	1,294	1,299	1,303	1,308	1,313	1,317	1,322
53	1,327	1,332	1,337	1,342	1,347	1,351	1,356	1,361	1,366	1,371
54	1,376	1,381	1,387	1,392	1,397	1,402	1,407	1,412	1,418	1,423
55	1,428	1,433	1,439	1,444	1,450	1,455	1,460	1,466	1,471	1,477
56	1,483	1,488	1,494	1,499	1,505	1,511	1,517	1,522	1,528	1,534
57	1,540	1,546	1,552	1,558	1,564	1,570	1,576	1,582	1,588	1,594
58	1,600	1,607	1,613	1,619	1,625	1,632	1,638	1,645	1,651	1,658
59	1,664	1,671	1,678	1,684	1,691	1,698	1,704	1,711	1,718	1,725
60	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797
61	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873
62	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954
63	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041
64	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135
65	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236
66	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,300	2,311	2,322	2,333	2,344
67	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463
68	2,475	2,488	2,500	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592
69	2,605	2,619	2,633	2,646	2,660	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733
70	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888
71	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,060
72	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251
73	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376	3,398	3,420	3,442	3,465
74	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606	3,630	3,655	3,681	3,706
75	3,747	3,762	3,778	3,793	3,808	3,824	3,840	3,856	3,872	3,888
76	4,011	4,041	4,071	4,102	4,134	4,165	4,198	4,230	4,264	4,297
77	4,331	4,366	4,402	4,437	4,474	4,511	4,548	4,586	4,625	4,665
78	4,705	4,745	4,787	4,829	4,872	4,915	4,959	5,005	5,050	5,097
79	5,145	5,193	5,242	5,292	5,343	5,396	5,449	5,503	5,558	5,614
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357
84	9,514	9 677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0