Buku Ajar
STATISTIKA
MATEMATIKA

ISBN 602622368-1
9 786026 223685

Sanabil
P2M-LP2M UIN Mataram
Jln. Pendidikan No. 35 Mataram,
Telp. 0370-621298 Fax. 0370-6253337
Email: lp2m@uinmataram.ac.id

STATISTIKA MATEMATIKA
MAULIDDIN
ALFIRA MULYA ASTUTI

Mauliddin
Afira Mulya Astuti

Buku Ajar
STATISTIKA MATEMATIKA

statistics

LP2M
UIN Mataram

Mauliddin, M.Si.
Alfira Mulya Astuti, M.Si.

STATISTIKA MATEMATIKA

LP2M UIN MATARAM

Perpustakaan Nasional RI. Katalog dalam Terbitan (KDT)

Mauliddin, dan Alfira Mulya Astuti
Statistika Matematika
LP2M UIN Mataram, 2017
xiii +219 hlm.; 14,8 x 21 cm
ISBN: **978-602-6223-68-5**

I. Pendidikan Sains II. Judul

Statistika Matematika

Penulis : Mauliddin, M.Si., dan Alfira Mulya Astuti, M.Si.
Editor : Dr. Muhammad Shaleh, MA
Layout & Desain Sampul : Muhammad Amalahanif

Cetakan I, September 2017

Penerbit:
LP2M UIN Mataram
Jln. Pendidikan No. 35 Mataram, Nusa Tenggara Barat 83125
Telp. 0370-621298, 625337. Fax: 625337

SAMBUTAN REKTOR

Assalamualaikum w. w.

Puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karuniaNYA sehingaa kita masih dalam kondisi beriman dan berilmu serta senantiasa menjalankan tanggung jawab kita sebagai abdi negara sesuai dengan tupoksi masing-masing. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada baginda rasulullah, Muhammad SAW atas perjuangannya menuntun umat Islam dalam kaidah kebaikan dan kebenaran.

Selaku rektor UIN Mataram, kami menyambut baik adanya buku ajar Statistika Matematika ini, karena keberadaan buku ajar dalam peroses perkuliahan sangat penting untuk memudahkan transfer ilmu dan pengetahuan dari sumber ilmu (dosen, buku dan literatur lain) ke mahasiswa.

Buku ajar ini disusun oleh orang yang kompeten dibidangnya, oleh karena itu sudah tentu metode dan gaya bahasa yang digunakan akan lebih mudah dipahami oleh pembaca, dalam hal ini mahasiswa. Selain itu penyusunan buku ajar ini telah melalui proses panjang yang memakan waktu lama dan menguras tenaga serta fikiran. Olehnya itu kami ucapkan terimakasih yang mendalam kepada penulis atas buah pikiran yang tertuang dalam buku ini.

Semoga buku ajar statistik matematika ini dapat dimanfaatkan oleh berbagai pihak yang berkepentingan khususnya segenap sivitas akademika di lingkungan Universitas Islam Negeri Mataram (UIN Mataram).

Mataram, Agustus 2017
Rektor UIN Mataram

Dr. H. Mutawali, M.Ag.
Nip. 196312311999031005

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahiim,

Alhamdulillah, segala puji hanya milik Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah – Nya kepada kita semua sehingga kita bisa melakukan aktivitas dengan baik dan "Buku Ajar Statistika Matematika" ini dapat tersusun sesuai dengan rencana.

Penyusunan buku ajar ini diharapkan dapat membantu mahasiswa untuk mempelajari dan memahami mata kuliah Statistika Matematika sebagai mata kuliah wajib yang disajikan di jurusan matematika dan pendidikan matematika. Hal ini beralasan karena materi pada buku ajar ini disusun sesuai dengan RPS (Rencana Pembelajaran Semester) standar serta dilengkapi dengan soal-soal dan pembahasan secara mendalam dan terperinci.

Buku Statistika Matematika adalah referensi yang tepat bagi mahasiswa dalam membuktikan kasus-kasus statistika secara mudah dan terstruktur. Buku ini juga dapat digunakan sebagai buku pegangan dosen-dosen dalam mengajarkan mata kuliah Statistika Matematika di kelas. Besar harapan penulis agar buku ajar Statistika Matematika ini dapat bermanfaat bagi seluruh kalangan yang membutuhkan referensi dalam pemecahan kasus-kasus statistika secara abstrak.

Penulis menyadari bahwa buku ajar Statistika Matematika ini masih memiliki berbagai kekurangan. Oleh karena itu saran dan kritik pembaca sangat diharapkan sebagai bahan evaluasi guna menjadikan buku ini lebih baik.

Mataram, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

A. Identitas Mata Kuliah

Nama Program Studi	: Program Studi Tadris Matematika
Nama Mata Kuliah	: Statistika Matematika
Kode Mata Kuliah	: MAT 3433
Semester	: IV
Jumlah SKS	: 3 (Tiga)

B. Kuliah

Setelah menyelesaikan kuliah ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memformulasikan masalah statistika
2. Menggunakan rumus statistika yang tepat
3. Mengaplikasikan rumus statistika matematika dalam kehidupan sehari-hari.

C. Tahapan Pembelajaran Mata Kuliah selama 1 Semester

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
Ke-1	Mahasiswa mampu memahami pengertian Percobaan, Titik Sampel, Ruang Sampel, dan Variabel Random.	Pengantar Stattistika Matematika	Ceramah dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-2	Mahasiswa mampu : 1. membedakan Peubah Acak	Distribusi Satu Peubah Acak	Ceramah dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	Diksrit dan Kontinu 2. menentukan distribusi peluang dan kumulatif dari peubah acak diskrit dan Kontinu 3. menggambarkan grafik dari Peubah acak diskrit dan Kontinu			
Ke-3	Mahasiswa mampu : 1. menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan peubah acak gabungan, baik diskrit maupun Kontinu 2. menentukan distribusi marginal dari peubah acak gabungan diskrit maupun Kontinu	Distribusi dua peubah Acak (gabungan)	Ceramah dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-4	Mahasiswa mampu : 1. menentukan distribusi bersyarat diskrit maupun	Distribusi Bersyarat dan Kebebasan Stokastik	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	Kontinu 2. membuktikan dua peubah acak saling bebas stokastik atau bergantungan baik diskrit maupun Kontinu.			
Ke-5	Mahasiswa mampu menghitung nilai ekspektasi dan rataan dari satu peubah acak baik diskrit maupun Kontinu	Ekspektasi dan Rataan satu Peubah Acak	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-6	Mahasiswa mampu : 1. menghitung Variansii dan momen dari satu peubah acak baik diskrit maupun Kontinu 2. menentukan fungsi pembangkit momen dari peubah acak diskrit maupun Kontinu	Variansii, Momen, dan Fungsi Pembangkit Momen	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-7	Mahasiswa mampu : 1. menghitung nilai ekspektasi gabungan dari	Ekpektasi dan Rataan Gabungan	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	fungsi dua peubah acak, baik diskrit maupun Kontinu 2. menghitung ekpektasi bersyarat dari peubah acak diskrit maupun Kontinu 3. menghitung rataan bersyarat dari peubah acak diskrit maupun Kontinu			
Ke-8	Mahasiswa mampu : 1. menentukan momen sekitar rataan baik diskrit maupun Kontinu 2. menghitung variansi bersyarat dan fungsi pembangkit momen gabungan baik diskrit maupun Kontinu	Momen dan Fungsi Pembangkit momen Gabungan	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-9	UJIAN TENGAH SEMESTER			100 Menit
Ke-10	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan	Distribusi Bernouli dan Binomial	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	notasi dari Distribusi Bernouli, dan Binomial 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli, dan binomial 3. mengaplikasikan distribusi bernouli, dan binomial dalam contoh kasus di kehidupan sehari-hari			
Ke-11	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan notasi dari Distribusi Trinomial, dan Poisson 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari Distribusi Trinomial, dan Poisson 3. mengaplikasikan Distribusi Trinomial, dan Poisson dalam	Distribusi Trinomial, dan Poisson	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	contoh kasus di kehidupan sehari-hari			
Ke-12	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan notasi dari Distribusi Geometrik dan Hipergeometrik 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari Distribusi Geometrik dan Hipergeometrik 3. mengaplikasikan Distribusi Geometrik dan Hipergeometrik dalam contoh kasus di kehidupan sehari-hari	Distribusi Geometrik dan Hipergeometrik	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-13	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan notasi dari Distribusi Seragam dan Gamma 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari	Distribusi Seragam dan Gamma	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	Distribusi Seragam dan Gamma 3. mengaplikasikan Distribusi Seragam dan Gamma dalam contoh kasus di kehidupan sehari-hari			
Ke-14	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan notasi dari Distribusi Beta dan Ekeponensial 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari Distribusi Beta dan Ekeponensial 3. mengaplikasikan Distribusi Beta dan Ekeponensial dalam contoh kasus di kehidupan sehari-hari	Distribusi Beta dan Ekeponensial	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit
Ke-15	Mahasiswa mampu : 1. menuliskan notasi dari Distribusi Chi	Chi Kuadrat dan Normal	Diskusi dan Tanya Jawab	150 Menit

Pertemuan	Kemampuan Akhir	Bahan Kajian	Metode Pembelajaran	Waktu
	Kuadrat dan Normal 2. membuktikan rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari Chi Kuadrat dan Normal 3. mengaplikasikan Chi Kuadrat dan Normal dalam contoh kasus di kehidupan sehari-hari			
Ke-16	UJIAN AKHIR SEMESTER			

PENGANTAR STATISTIKA MATEMATIKA

1. Pengertian Percobaan

Percobaan merupakan serangkaian kegiatan dimana setiap tahap dalam rangkaian benar-benar terdefinisikan, dan dilakukan untuk menemukan jawaban tentang permasalahan yang diteliti melalui suatu pengujian hipotesis.

Percobaan adalah suatu tindakan coba-coba *(trial)* yang dirancang untuk menguji keabsahan (validity) dari hipotesis yang diajukan.

2. Ruang Sampel dan Titik Sampel

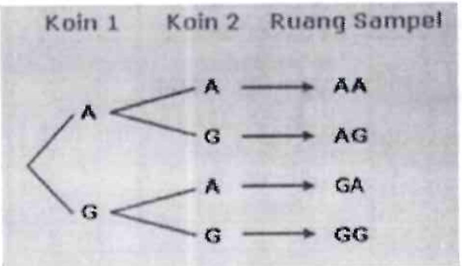
Ruang sampel dan titik sampel merupakan cakupan teori peluang untuk mengetahui seberapa besar kemungkinan suatu kejadian akan terjadi. Himpunan semua kejadian yang mungkin terjadi dari suatu percobaan disebut dengan ruang sampel, sedangkan anggota dari ruang sampel disebut titik sampel.

Pengertian ruang sampel adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin pada suatu percobaan/kejadian. Ruang sampel suatu percobaan dapat dinyatakan dalam bentuk diagram pohon atau tabel dan umumnya dinotasikan dengan S. Sedangkan pengertian titik sampel adalah anggota-anggota dari ruang sampel atau kemungkinan-kemungkinan yang akan muncul. Banyaknya anggota dari ruang sampel dinotasikan dengan n (S).

Contoh ruang sampel dan titik sampel sebuah koin

Pada percobaan dengan melempar dua buah koin (mata uang logam) sama dengan sisi angka (A) dan gambar (G) sebanyak satu kali. Dapat ditentukan ruang sampel dari percobaan tersebut, yaitu:

Berdasarkan diagram pohon, kejadian yang mungkin muncul:



→ AA : Muncul sisi angka pada kedua koin

→ AG : Muncul sisi angka pada koin 1 dan sisi gambar pada koin 2

Berdasarkan Tabel, kejadian yang mungkin muncul:

Koin 1 \ Koin 2	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

→ Ruang sampel = { (A,A), (A,G), (G,A), (G,G) }

→ Banyak titik sampel ada 4 yaitu (A,A), (A,G), (G,A), dan (G,G).

Contoh titik sampel sebuah dadu

Dadu 2 \ Dadu 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

→ Dua buah dadu sama yang berbentuk kubus bermata 6 dilempar bersama-sama sebanyak satu kali. Dapat ditentukan titik sampel dari percobaan tersebut, yaitu:

→ Berdasarkan Tabel, kejadian yang mungkin muncul:

→ Titik sampel sebanyak 36 kemungkinan

3. Variabel Acak

Untuk menggambarkan hasil-hasil percobaan sebagai nilai-nilai numerik secara sederhana, kita menggunakan apa yang disebut sebagai variabel acak. Jadi variabel acak dapat didefinisikan sebagai deskripsi numerik dari hasil percobaan. Variabel acak biasanya menghubungkan nilai-nilai numerik dengan setiap kemungkinan hasil percobaan. Karena nilai-nilai numerik tersebut dapat bersifat diskrit(hasil perhitungan) dan bersifat Kontinu(hasil pengukuran) maka variabel acak dapat dikelompokkan menjadi variabel acak diskrit dan variabel acak Kontinu.

4. Variabel Acak Diskrit

Varibel acak diskrit adalah variabel acak yang tidak mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang hanya memiliki nilai tertentu. Nilainya merupakan bilangan bulat dan asli, tidak berbentuk pecahan. Variabel acak diskrit jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik-titik yang terpisah.

Contoh :

a. Banyaknya pemunculan sisi muka atau angka dalam pelemparan sebuah koin (uang logam).
b. Jumlah anak dalam sebuah keluarga.

5. Variabel Acak Kontinu

Varibel acak Kontinu adalah variabel acak yang mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau variabel yang dapat memiliki nilai-nilai pada suatu interval tertentu. Nilainya dapat merupakan bilangan bulat maupun pecahan. Varibel acak Kontinu jika digambarkan pada sebuah garis interval, akan berupa sederetan titik yang bersambung membantuk suatu garis lurus.

Soal A

1. Jelaskan pengertian dari :
   (a). Percobaan
   (b). Titik sampel
   (c). Ruang sampel
   (d). Variable random
2. Jika S = { 1, 2, 3, … , 9 }

A = { 1, 3, 5, 7 }
B = { 6, 7, 8, 9 }
C = { 2, 4, 8 }
D = { 1, 5, 9 }

Tentukan ruang kejadian dari kasus berikut :
   (a). $A^C \cap B$
   (b). $(A^C \cap B) \cap C$
   (c). $B^C \cup C$
3. Dengan menggunakan soal pada nomor 2, Tentukanlah ruang kejadian dari kasus berikut :
   (a). $(B^C \cap C) \cap D$
   (b). $A^C \cap C$
   (c). $(A^C \cap C) \cap D$
4. Diketahui ruang sampel S = { b_1, b_2, b_3 } Tentukan P (b_1) jika :
   (a). P (b_2) = $\frac{1}{3}$ dan P (b_3) = $\frac{1}{4}$
   (b). P (b_1) = 2 . P (b_2) dan P (b_3) = $\frac{1}{4}$
   (c). P (b_2, b_3) = 2 . P (b_2)
   (d). P (b_3) = 2 . P (b_2) dan 2 . P (b_2) = 3 . P (b_1)
5. Tentukan ruang sampel dari pemilihan sebuah bilangan secara acak dari himpunan bilangan bulat positif

Kunci jawaban soal A

1. Pengertian:

(a). Percobaan adalah suatu eksperimen acak yang apabila eksperimen diulang beberapa kali, masing – masing pengulangan eksperimen itu memberikan hasil yang belum tentu sama sekalipun kondisi pengulangan eksperimen itu sama.

(b). Titik sampel adalah hasil kejadian yang mungkin dari suatu eksperimen.

(c). Ruang sampel adalah himpunan dari titik sampel, dimana ruang sampel merupakan kumpulan semua hasil yang mungkin diperoleh dari eksperimen dan di notasikan dengan S.

(d). Variable random adalah variable acak berupa bilanagan real yang merupakan hasil peta dari anggota ruang sampel

2.

a. jika A = { 1, 3, 5, 7 } dan S = { 1, 2, 3, … ,9 } maka

A^C = { 2, 4, 6, 8, 9 } sehingga :

$A^C \cap B = \{ 2,4,6,8,9 \} \cap \{ 6,7,8,9 \}$

= { 6, 8, 9 }

b. karena $A^C \cap B = \{ 6,8,9 \}$ maka :

$(A^C \cap B) \cap C$ = { 6, 8, 9 } ∩ { 2, 4, 8 }

= { 8 }

(c). jika B = { 6, 7, 8, 9 } ∩ dan S = { 1, 2, 3, … ,9 } maka

B^C = { 1, 2, 3, 4, 5 } sehingga :

$B^C \cup C$ = { 1, 2, 3, 4, 5 } ∪ { 2, 4, 8 }

= { 1, 2, 3, 4, 5, 8, }

3.

a. berdasarkam soal nomor 2 bagian c, diperoleh

$B^C \cup C$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 8 } sehingga :

$(B^C \cup C) \cap D$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 8 } ∩ { 1, 5, 9 }

= { 1, 5 }

b. diketahui A^C = { 2, 4, 6, 8, 9 } lihat nomor 2 bagian a

$A^C \cap C$ = { 2, 4, 6, 9 } ∩ { 2, 4, 8 }

= { 2, 4, 8 }

c. karena $A^C \cap C$ = { 2, 4, 8 } maka :

$(A^C \cap C \cap D$ = { 2, 4, 8 } ∩ { 1, 5, 9 }

= ∅

4.

a. karena P (b_2) = $\frac{1}{3}$, P (b_3) = $\frac{1}{4}$ dan S = { b_1, b_2, b_3 }

maka :

$P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) = 1$

$P(b_1) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1$

$P(b_1) + \frac{7}{12} = 1$

$P(b_1) = 1 - \frac{7}{12}$

$P(b_1) = \frac{5}{12}$

b. karena P (b_1) = 2 . P (b_2) dan P (b_3) = $\frac{1}{4}$ serta S = { b_1, b_2, b_3 } maka :

$P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) = 1$

$P(b_1) + \frac{1}{2} P(b_2) + \frac{1}{4} = 1$

$\frac{3}{2} P(b_1) + \frac{1}{4} = 1$

$\frac{3}{2} P(b_1) = 1 - \frac{1}{4}$

$P(b_1) = \frac{2}{3} , \frac{3}{4}$

$P(b_1) = \frac{1}{2}$

c. karena $P(b_2, b_3) = 2 . P(b_1)$ dan $S = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ maka :

$P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) = 1$

$P(b_1) + P(b_2, b_3) = 1$

$P(b_1) + 2 . P(b_1) = 1$

$3P(b_1) = 1$

$P(b_1) = \frac{1}{3}$

d. karena $P(b_3) = 2 . P(b_2)$ dan $P(b_2) = 3P(b_1)$ serta

$S = \{ b_1, b_2, b_3 \}$ maka :

$P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) = 1$

$P(b_1) + 3P(b_1) + 2P(b_2) = 1$

$P(b_1) + 3P(b_1) + 2 \{ 3P(b_1) \} = 1$

$P(b_1) + 3P(b_2) + 6P(b_1) = 1$

$10P(b_1) = 1$

$P(b_1) = \frac{1}{10}$

Minsalkan S menyatakan ruang sampel dari pemilihan sebuah bilangan secara acak dari himpunan bilangan bulat positif, maka: $S = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

Referensi

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

Walpole Ronal & H Myers Raymond, *Ilmu peluang dan statistika untuk insinyur dan ilmuwan*, Bandung: ITB. 1995

DISTRIBUSI SATU PEUBAH ACAK

Pada percobaan statistika, ketika kita melambungkan tiga buah mata uang sekaligus, maka ruang sampelnya adalah $S = \{AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG\}$. Kemudian, ketika yang kita inginkan adalah hanya muncul gambar, maka hasil numeriknya adalah 0,1,2,3. Dimana $0 = (AAA)$, yang berarti tidak ada gambar yang muncul; $1 = (AAG, AGA, GAA)$ yaitu hanya satu gambar yang muncul; $2 = (AGG, GAG, GGA)$, yaitu dua gambar yang muncul; $3 = (GGG)$, yaitu tiga gambar yang muncul. Bilangan $0, 1, 2,$ dan 3 merupakan *pengamatan acak* yang ditentukan oleh hasil percobaan. Dan juga, dapat dikatakan bahwa bilangan tersebut aalah nilai yang diperoleh suatu *peubah acak X*, yang menyatakan berapa kali kemunculan "gambar" ketika tiga buah mata uang dilambungkan sekaligus. Suatu fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap anggota dalam ruang sampel disebut *peubah acak*.

1. Peubah Acak Diskrit

   Dari ilustrasi percobaan melambungkan tiga mata koin yang telah dipaparkan sebelumnya, hal tersebut merupakan contoh ketika ruang sampel mempunyai jumlah anggota sampel yang berhingga, artinya dapat dihitung. Akan tetapi, jika ruang sampelnya adalah banyaknya titik dari daerah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, tentu kita tidak dapat menghitungya.

Definisi

Jika suatu ruang sampel mempunyai titik sampel yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan cacah, maka ruang sampel itu isebut ruang sampel diskrit, dan peubah acak yang didefinisikan pada raung sampel tersebut adalah peubah acak diskret.

Contoh

Dua kelereng diambil satu demi satu tanpa dikembalikan dari satu kantong berisi empat kelereng merah dan kelereng hitam. Jika Y menyatakan jumlah kelereng merah yang diambil, maka nilai y yang mungkin dari peubah acak Y adalah:

Tabel Contoh Pengambilan Kelereng Tanpa Pengembalian

Kejadian Sementara	Y
MM	2
MH	1
HM	1
HH	0

2. Distribusi Peluang Diskrit

   Definisi

   Fungsi f yang dinyatakan dengan $f(x)$ adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu peubah acak diskrit X jika, untuk setiap hasil x yang mungkin:

   1. $f(x) \geq 0$
   2. $\sum_x f(x) = 1$
   3. $P(X = x) = f(x)$

Contoh:

Diketahui tiga buah mata uang dilambungkan sekaligus.

a. Tentukan distribusi peluang banyaknya angka yang muncul!

b. Tentukan rumus distribusi peluangnya!

Penyelesaian:

a. Dari ruang sampel $S = \{AAA, AGA, AAG, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG\}$, dapat dilihat bahwa P(munculnya angka 3 kali) $= \frac{1}{8}$

   P (muncul angka 2 kali) $= \frac{3}{8}$

   P (muncul angka 1 kali) $= \frac{3}{8}$

   P (muncul angka 0 kali) $= \frac{1}{8}$

   Misalnya X menyatakan banyaknya angka yang muncul, maka dapat disusun distribusi peluang sebagai berikut:

   Tabel Distribusi Peluang Banyaknya Muncul Angka

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b. Banyaknya titik sampel adalah $2^3 = 8$ (merupakan penyebut untuk nilai peluang). Sedangkan pengambilannnya merupakan suatu kejadian pengambilan tanpa memperhatikan urutan (kombinasi), yaitu:

   $\binom{3}{0} = 1;\ \binom{3}{1} = 3;\ \binom{3}{2} = 3;\ \binom{3}{3} = 1$

   Jadi, rumus distribusi peluangnya adalah :

   $f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$, untuk $x = 0, 1, 2, 3$

Contoh 2

Sebuah pengiriman 8 mikrokomputer yang serupa ke suatu jaringan eceran berisi 3 yang cacat. Bila suatu sekolah melakukan suatu pembelian acak 2 dari komputer ini. Carilah sebaran probabilitas untuk jumlah cacat.

Penyelesaian

Ambil X sebagai peubah acak yang nilai x-nya adalah jumlah komputer cacat yang mungkin yang dibeli oleh sekolah tersebut. Maka x dapat menjadi salah satu dari bilangan 0, 1, 2.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{18},$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{18},$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{18},$$

Sehingga sebaran probabilitas dari X adalah

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{10}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{3}{18}$

Contoh 3

Bila sebuah agen mobil menjual 50% dari persediaan mobil asingnya yang dilengkapi dengan kantong udara, carilah rumus untuk sebaran probabilitas dari jumlah mobil dengan

kantong udara diantara 4 mobil berikutnya yang dijual oleh agen tersebut.

Penyelesaian

Karena probabilitas penjualan suatu mobil dengan kantong udara adalah 0,5 ; $2^4 = 16$ titik didalam ruang sampel tersebut mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Sehingga, penyebut untuk semua probabilitas dan juga untuk fungsi kita adalah 16. Untuk mendapatkan jumlah cara penjualan 3 model dengan kantong udara, kita harus mempertimbangkan jumlah cara mempartisi 4 keluaran menjadi 2 sek dengan 3 model berkantong udara dimasukkan kedalam satu sel, dan model tanpa kantong udara dimasukkan ke sel lainnya. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{4}{3} = 4$ cara. Secara umum, kejadian penjualan x model dengan kantong udara dan $4 - x$ model tanpa kantong udara dapat terjadi dalam $\binom{4}{x}$ cara, dimana x dapat 0,1,2,3 atau 4. Sehingga sebaran probabilitas $f(x) = P(X = x)$ adalah

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16} \text{ untuk } x = 0,1,2,3,4$$

3. Distribusi Kumulatif Suatu Peubah Acak Diskrit

Definisi

Distribusi kumulatif $f(x)$ *suatu peubah acak* X *dengan distribusi peluang* $f(x)$ *dinyatakan dengan*

$$f(X) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Contoh 1

Carilah distribusi kumulatif peubah acak X dalam contoh penjualan mobil oleh agen yang dipaparkan sebelumnya.

Dengan menggunakan $F(X)$, buktikanlah bahwa $f(2) = 38$

Penyelesaian

Perhitungan langsung sebaran probabilitas dari contoh 3 pada pembahasan peluang peubah acak diskrit memberikan $f(0) = \frac{1}{16}$, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f(2) = \frac{3}{8}$, $f(3) = \frac{3}{4}, f(4) = \frac{1}{16}$.

Sehingga

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

Sehingga

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; untuk \; x < 0 \\ \frac{1}{16} \; untuk \; 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} \; untuk \; 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} \; untuk \; 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} \; untuk \; 3 \leq x < 4 \\ 1 untuk \; x \geq 4 \end{cases}$$

Contoh 2

Tentukan distribusi peluang kumulatif variabel X yang menyatakan banyaknya angka yang muncul, jika tiga mata

uang logam dilambungkan sekaligus!

Penyelesaian

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

4. Peubah Acak Kontinu

Jika himpunan nilai-nilai yang mungkin dari peubah acak X merupakan himpunan tak terhitung yaitu tidak dapat dinyatakan sebagai $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, xn\}$atau $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ tetapi berupa interval atau gabungan beberapa interval misalnya $\{x \in R \,|\, a < x < b,\; a, b \in R\}$atau $\{x \in R \,|\, a \leq x \leq b,\; a, b \in R\}$ atau $\{x \in R \,|\, a < x \leq b,\; a, b \in R\}$, dan sebagainya, maka peubah acak tersebut disebut peubah acak kontinu.

Definisi

Fungsi f yang dinyatakan dengan $f(x)$ adalah fungsi pada peluang variabel kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, jika:

1. $f(x) \geq 0$, *untuk semua* $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Contoh 1

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, Untuk - 1 < x < 2 \\ 0,\ Untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

a. Buktikan bahwa syarat dua definisi terpenuhi
b. Hitung $P(0 < x \leq 1)$

Penyelesaian

a. $F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \left[\frac{t^2}{9}\right]_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}$
b. $P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

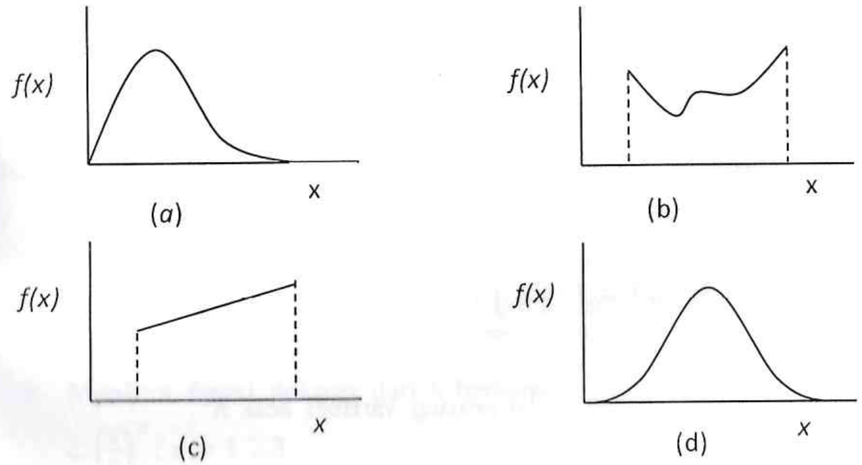
Contoh 2

Andaikan bahwa kesalahan dalam temperatur reaksi, dalam °C, untuk sebuah percobaan laboratorium yang diatur merupakan suatu peubah acak Kontinu X yang mempunyai fungsi kepekatan probabilitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} \\ 0, \end{cases}$$

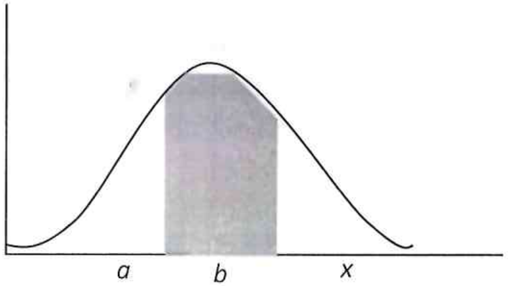
a. Uraikan kondisi 2 dari Definisi 3.6
b. carilah $P(0 < X \leq 1)$
penyelesaian
a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$
b. $P(0 < X \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$

5. Distribusi Peluang Peubah Acak Kontinu
Misalkan X peubah acak Kontinu. Suatu fungsi f dengan nilai $f(x)$ yang didefinisikan pada R merupakan fungsi kerapatan peluang atau fungsi padat peluang dari X jika dan hanya jika $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$, untuk setiap konstanta real a dan b dengan $a \leq b$. Jika X peubah acak Kontinu dan a, b adalah dua konstanta real dengan $a \leq b$ maka $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$. Fungsi nilai-nilai peubah acak Kontinu X, dapat digambarkan sebagai suatu kurva Kontinu. Contoh grafik fungsi kerapatan peluang yang mempunyai penerapan praktis dalam analisis data statistik bersifat Kontinu untuk semua nilai X adalah sebagai berikut.



Gambar Grafik fungsi Kerapatan Peluang

Fungsi kerapatan peluang dibuat sedemikian sehingga luas daerah di bawah kurva dan di atas sumbu x sama dengan 1. Luas daerah digunakan untuk menyatakan peluang. Untuk suatu fungsi kerapatan peluang yang dinyatakan oleh kurva dalam gambar berikut ini, peluang X antara a dan b sama dengan luas daerah yang diarsir yang terletak di antara x = a dan x = b dibawah fungsi kerapatannya.



Gambar *P(a<X < b)*

6. Distribusi Kumulatif Peubah Acak Kontinu

Definisi

Distribusi kumulatif $F(x)$ *suatu peubah acak Kontinu X dengan fungsi padat* $f(x)$ *dinyatakan oleh:*

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Contoh

Diketahui fungsi padat peluang variabel acak X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, untuk -1 < x < 2 \\ 0, untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

a. Tentukan distribusi kumulatif $F(x)$ fungsi tersebut!

b. Hitung $P(0 < x \le 1)$

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{3}dx = \left|\frac{x^3}{9}\right|^2 - 1 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$, terbukti

b. $P(0 < X \le 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$

Soal B

1. Sebuah kotak berisi 4 bola pingpong yang bernomor 1, 2, 3, dan 4. Kemudian dua bola pingpong diambil secara sekaligus. Jika Y menunjukan jumlah angka dari bola pingong yang terambil, maka;
   a. Tentukan distribusi peluang dari Y
   b. Hitung $P(Y \le 5)$
   c. Gambarkan grafik distribusi peluangnya
2. Misalkan distribusi peluang dari X berbentuk:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	K	$3K$	$3K$	K^2	$2K^2$	$6K^2 + K$

   a. Tentukan nilai konstanta K
   b. Hitung $P(X < 4), P(X \ge 4), dan\ P(0 < X < 4)$
   c. Tentukan nilai mminimum sedemikian sehingga $P(X \le m) > 0{,}5$
3. Misalkan fungsi peluang dari X berbentuk; $p(x) = c.\left(\frac{2}{3}\right)^x ; x = 1,2,3, ...$

   Tentukan nilai konstanta c

4. Misalkan fungsi identitas dari Y berbentuk; $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(y+1); 2 < y < 4 \\ 0; selainnya \end{cases}$
   a. Hitung $p(y < 3)\ dan\ p(0 < y < 3)$
   b. Gambarkan grafik fungsi distribusinya
   c. Tentukan fungsi distribusinya
   d. Gambarlah grafik fungsi distribusinya
5. Diketahui fungsi destribusi dari Y adalah

$$f(y) = \begin{cases} 0;\ y < -3 \\ \frac{1}{3};\ -3 \le y < -1 \\ \frac{2}{3};\ -1 \le y < 0 \\ 1; y \ge 0 \end{cases}$$

   a. Buktikan bahwa $F(y)$ merupakan fungsi distribusi
   b. Hitung $P(-2 < y \le 0)\ dan\ P(y > -1{,}5)$
   c. Gambarkan grafik dari $F(y)$
   d. Tentukan distribusi peluang dari Y

Kunci Jawaban Soal B

1.
   a) Karena Y menghasilkan jumlah angka dari dua bola pingpong yang terambil, maka kemungkinan terhadap Y adalah :

      1 + 2 = 3
      1 + 3 = 4
      1 + 4 = 5
      2 + 3 = 5
      2 + 4 = 6

      3 + 4 = 7

      Sehingga Y = { 3, 4, 5, 6, 7 }

      Karena itu distribusi peluang dari Y adalah :

Y	3	4	5	6	7
P(y)	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

   b) P (Y ≤ 5) = P (3) + P (4) + P (5)
      = 1/6 + 1/6 + 1/3
      = 4/6
      = 2/3

   c)

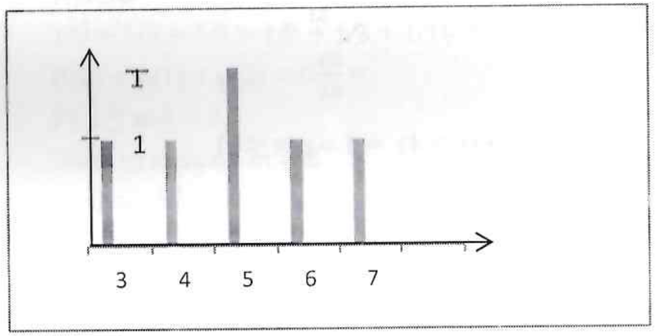


Diagram data distibusi peluang Y

2.
   (i) Karena p(x) meupakan peluang dari x maka
      $\sum_x p(x) = 1$ (sifat peluang)
      $\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{5} P(x) = 1$
      $\Leftrightarrow$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1
      $\Leftrightarrow k + 3k + 3k + k^2 + 2k^2 + 6k^2 + k = 1$
      $\Leftrightarrow 9k^2 + 8k - 1 = 0$
      $\Leftrightarrow$(9k - 1) (k + 1)
      $\Leftrightarrow$k =1/9 atau k = -1

Kaena $p(x) \geq 0$ (sifat peluang)

Maka nilai k yang memenuhi adalah $k = 1/9$

(ii) a) $p(x < 4) = \sum_{x=0}^{3} P(x)$

$= p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$

$= k + 3K + 3k + k^2$

$= 7k + k^2$

$= 7(1/9) + (1/9)^2$

$= 7/9 + 1/81$

$= \frac{63+1}{81}$

$= \frac{64}{81}$

b) $p(x \geq 4) = 1 - p(x < 4)$

$= 1 - \frac{64}{81}$

$= \frac{81-64}{81}$

$= \frac{17}{81}$

c) $p(0 < x < 4) = \sum_{x=1}^{3} P(x)$

$= p(1) + p(2) + p(3)$

$= 3k + 3k + k^2$

$= 6k + k^2$

$= 6.\ 1/9 + (1/9)^2$

$= 6/9 + 1/81$

$= \frac{54+1}{81}$

$= \frac{55}{81}$

(iii) Nilai minimum m yang memenuhi $p(x \leq m) > 0{,}5$ dapat ditentukan dengan caa :

$p(x \leq m) > 0{,}5$

$\Leftrightarrow p(x \leq m) > 9/81$

$\Leftrightarrow p(x \leq m) > 1/9 + 1/3 + 1/18$

Karena :

$1/9 + 1/3 + 1/3 > 1/9 + 1/3 + 1/18 = 0{,}5$

$P(0) + p(1) + p(2) > 0{,}5$

$P(x \leq m) > 0{,}5$

Nilai m muncul $m \geq 2$

3. Karena p(x) adalah fungsi peluang dari x maka haus memenuhi :

(i) $\sum_x p(x) = 1$

(ii) $P(x) > 0\ \forall x$

Perhatikan!

(i) $\sum_x p(x) = 1$

$\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} c\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow c \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow c\left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right\} = 1$

$\Leftrightarrow c\left\{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right\} = 1$

$\Leftrightarrow$ c. 2 = 1

$\Leftrightarrow$ c = ½

(ii) Karena $p(x) = c\,(2/3)^x$ dengan x= 1, 2, 3, … dan nilai c = ½ > 0, hal ini jelas berakibat pada $p(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ Nilai c yang memenuhi adalah c = ½

4.

a.

i. $p(Y < 3) = \int_{-\infty}^{2} 4(y)dy$

$= \int_{-\infty}^{2} 4(y)dy + \int_{2}^{3} 4(y)dy$

$= 0 + \int_{2}^{3} \frac{1}{8}(y+1)dy$

$= 1/8\,(1/2y^2 + y)\Big|_2^3$

$= \{1/8\,(1/2 \,.\, 3^2 + 3)\} - \{1/8\,(1/2 \,.\, 2^2 + 2)\}$

$= 1/8\,(9/2 + 3) - 1/8\,(2 + 2)$

$= \frac{1}{8}\left(4\frac{1}{2} + 3 - 4\right)$

$= \frac{1}{8}\left(3\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{7}{16}$

ii. $P(0 < y < 3) = \int_0^3 f(y)dy$

$= \int_0^2 f(y)dy + \int_0^3 f(y)dy$

$= 0 + \int_0^3 \frac{1}{8}(y+1)dy$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right)\Big|_2^3$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\,3^2 + 3\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}2^2 + 2\right)$

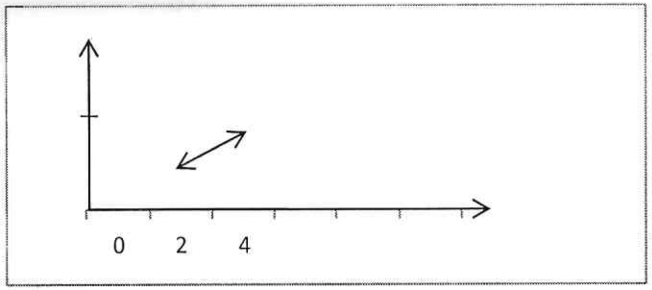
$= \frac{1}{8}\left(\frac{9}{2} + 3 - 2 - 2\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + 3\right)$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{2}$

$= \frac{7}{16}$

b. Grafik fungsi distributif f



c. Untuk menentukan fungsi distribusi dari fungsi distribusi f, maka interval keberlakuan terbagi atas 3 daerah yakni:

- Interval $y < 2$
  $F(y) = 0$
- Interval $2 \leq y < 4$

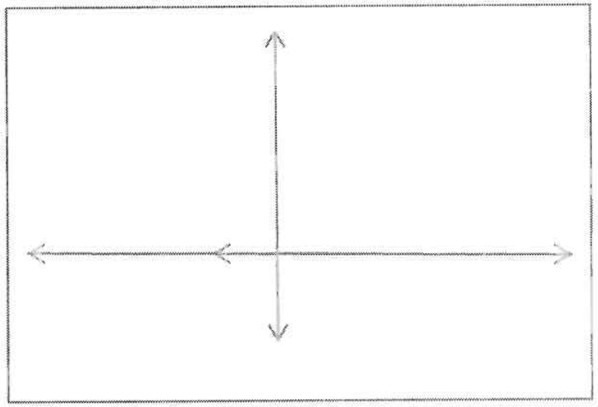
$$F(y) = \int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{y} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{2} 0\ dt + \int_{2}^{y} \frac{1}{8}(t+1)dt$$
$$= 0 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\Big|_2^y$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right) - \left(\frac{1}{2}2^2 + 2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}y^2 + y - 4\right)$$
$$= \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}\ y - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{16}(y^2 + 2y - 8)$$
$$= \frac{1}{16}(y+4)(y-2)$$

- Interval $y \geq 4$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{y} f(t)dt + \int_{4}^{y} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{2} 0\ dt + \int_{2}^{4} \frac{1}{8}(t+1)dt + \int_{4}^{y} 0\ dt$$
$$= 0 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\Big|_2^4 + 0$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}4^2 + 4\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}2^2 + 2\right)$$
$$= \frac{1}{8}(12 - 4)$$

$$= \frac{1}{8}(8)$$
$$= 1$$

$\therefore$ Jadi fungsi distribusi f adalah :



$$F(x) = \begin{cases} 0\ ;\ y < 2 \\ \frac{1}{16}(y+4)(y-2)\ ;\ 2 \leq y < 4 \\ 1\ ;\ y \geq 4 \end{cases}$$

d. Grafik fungsi distributif f

5.

a) Untuk membuktikan F(y) merupakan fungsi, maka harus memenuhi 4 sifat yakni :

(i) $0 \leq F(y) \leq 1$

Hal ini jelas terpenuhi sebab F(y) hanya memiliki nilai $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, dan\ 1$

(ii) F (y) adalah fungsi tidak turun di y

Untuk sifat kedua, F selalu memenuhi $F(y) \leq F(y+1)$

Ini menunjukkan bahwa F fungsi tidak turun di y

(iii) $F\ (\infty) = 1\ dan\ F(-\infty) = 0$

Hal ini jelas terlihat pada fungsi F dimana :

- untuk $y \geq 0$ berlaku F(y)=1 akibatnya $F\ (\infty) = 1$
- untuk $y < -3\ berlaku\ F(y) = 0\ akibatnya\ F(-\infty) = 0$

(iv) F(y) kontinu kanan pada setiap nilai y

- Untuk $y < -3$

  $\lim_{y^+} F(y) = F(y) = 0$
- Untuk $-3 \leq y < -1$

  $\lim_{y^+} F(y) = F(y) = \frac{1}{3}$
- Untuk $1 \leq y < 0$

  $\lim_{y^+} F(y) = F(y) = \frac{2}{3}$
- Untuk $y \geq 0$

  $\lim_{y^+} F(y) = F(y) = 1$

$\therefore$ Jelaslah bahwa F(y) merupakan fungsi distribusi

b)

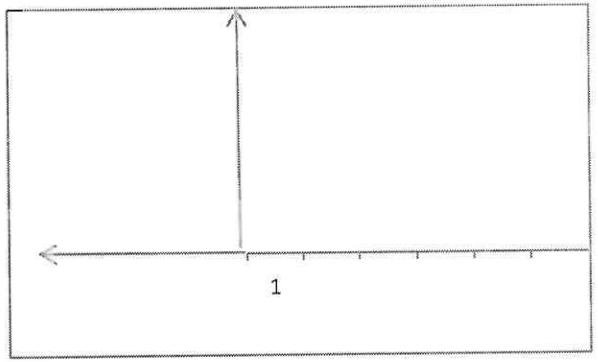
- $P\ (-2 < y \leq 0) = Fy\ (0) - Fy\ (-2)$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}$

- $P\ (y > -1{,}5) = 1 - p(y \leq -1{,}5)$

c) Grafik dari F(y)



d) Distribusi peluang dari y, dapat ditentukan sebagai berikut:

Karen grafik pada bagian c) membentuk model fungsi tangga, maka jelas F adalah fungsi distribusi diskrit. Dan nilai-nilai peubah acak y untuk F adalah -3, -1, dan 0, sebab pada titik-titik tersebut F tidak Kontinu.

Selanjutnya:

- $P(-3) = Fy(-3) - Fy(-3^-)$

  $= \frac{1}{3} - 0$

$$= \frac{1}{3}$$

- $P(-1) = Fy(-1) - Fy(-1^-)$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

- $P(0) = Fy(0) - Fy(0^-)$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\therefore$ Distribusi peluang dari y adalah :

y	-3	-1	0
$P(y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Referensi

Raymond H.Myers,dkk. 1998. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Sixth Edition.* New Jersey: Prentice Hall,Inc. Alih bahasa oleh Jozep Edyanto dan diterbitkan oleh PT Prenhallindo, Jakarta.

Irzani dan Rifa'i. 2011. *Pengantar Statistika Matematika.* Yogyakarta: Media Graffindo Press.

DISTRIBUSI DUA PEUBAH ACAK (GABUNGAN)

1. Distribusi Peluang Gabungan Peubah Acak Diskrit

Kadang-kadang hasil percobaan yang kita peroleh tidak selalu berasal dari perubah acak yang tunggal. Ada kalanya diperlukan pencacatan hasil percobaan beberapa peubah acak yang terjadi secara serentak. Jika *X* dan *Y* peubah acak, maka peluang terjadinya secara serentak dari *X* dan *Y* dinyatakan sebagai f(x,y) disebut distribusi peluang gabungan, untuk setiap pasangan (x, y) dalam rentangan *X* dan *Y*. Jika*X* dan *Y* merupakan dua perubah acak diskret yang dapat terjadi secara serentak dinyatakan dengan notasi *f(x,y),* maka *f(x,y)* disebut Fungsi (atau distribusi) massa gabungan dari perubah acak X dan Y.

Definisi

Fungsi $f(x,y)$ adalah fungsi peluang gabungan peubah acak diskritX dan Y, jika

1. $f(x,y) \geq 0$, *untuk semua* (x,y)
2. $\sum_x \sum_y y(x,y) = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \sum_A \sum f(x,y)$, *untuk tiap daerah A dibidang* xy

<u>Contoh 1</u>

Dua bola diambil secara acak dari sebuah kantong berisi tiga bola biru, dua merah, dan tiga hijau. Jika *X* menyatakan bola yang berwarna biru dan Y warna merah yang terambil, hitunglah:

a. Fungsi peluang gabungan $f(x, y)$;
b. Rumus fungsi peluang gabungan $f(x, y)$;
c. $P[(X, Y) \in A]$, jika A daerah (X, Y) untuk tiap daerah A dibidang xy

Penyelesaian

a. Pasangan (x, y) yang mungkin adalah $(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0),(1,1)$

$n(S) = \binom{8}{2} = 28$

Banyaknya cara $(0,0) = \binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2} = 1\,.1\,.3 = 3$

Banyaknya cara $(0,1) = \binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 1\,.2\,.3 = 6$

Banyaknya cara $(0,2) = \binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0} = 1\,.1\,.1 = 1$

Banyaknya cara $(1,0) = \binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1} = 3\,.1\,.3 = 9$

Banyaknya cara $(2,0) = \binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0} = 3\,.1\,.1 = 3$

Banyaknya cara $(1,1) = \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0} = 3\,.2\,.1 = 6$

Jadi, distribusi peluang gabungannya adalah:

$$P(0,0) = \frac{3}{28}; P(0,1) = \frac{6}{28}; P(0,2) = \frac{1}{28}; P(1,0) = \frac{9}{28}; P(2,0) = \frac{3}{28}; P(1,1) = \frac{6}{28}$$

b. Rumus fungsi peluang gabungan adalah:

$$P(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{28} & \text{Untuk } (x,y) = (0,2) \\ \frac{3}{28} & \text{Untuk } (x,y) = (0,0),(2,0) \\ \frac{6}{28} & \text{Untuk } (x,y) = (0,1),(1,1) \\ \frac{9}{28} & \text{Untuk } (x,y) = (1,0) \\ 0 & \text{Untuk } (x,y) \text{ lainnya} \end{cases}$$

c. $P[(X, Y) \in A] = P(X + Y \leq 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)$

$$= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28} = \frac{8}{28}$$

Contoh 2

Dua buah lampu dipilih secara acak dari sebuah kotak yang berisi 3 lampu berwarna biru, 2 berwarna merah, dan 3 berwarna hijau. Jika X menyatakan banyaknya lampu berwarna biru dan Y berwarna merah yang terpilih, maka hitunglah:

a. fungsi probabilitas gabungan X dan Y
b. $P[(X, Y) \in A]$, bila A daerah $\{(x, y)/(x + y) \leq 1\}$

Penyelesaian

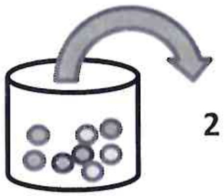
a. Misalkan,

X = banyaknya lampu biru yang terambil $= \{0, 1, 2\}$

Y = banyaknya lampu merah yang terambil $= \{0, 1, 2\}$

Pasangan nilai (x,y) yang terjadi: $(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)$

Ilustrasi:



$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

Misalnya $n(S)$ banyaknya cara memilih 2 lampu dari 8 yang ada. Fungsi peluang gabungan $f(x,y)$ dinyatakan dengan rumus:

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}} \qquad x = 0, 1, 2$$

$$y = 0, 1, 2$$

$$0 \le x + y \le 2$$

b. Dari hasil diatas didapat.

$$f(0,0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28} \qquad f(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{9}{28}$$

$$f(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14} \qquad f(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14}$$

$$f(0,2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28} \qquad f(2,0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

Dari hasil diatas dapat dibuat tabel distribusi probabilitas sbb:

Tabel Distribusi Peluang Gabungan X dan Y

$f(x,y)$		x			Jumlah Baris
		0	1	2	
Y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
Jumlah Kolom		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Jadi $P[(X,Y) \in A]$

$= P(x + y \le 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)$

$$= \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14}$$

2. Distribusi Peluang Gabungan Peubah Acak Kontinu

Jika X dan Y, perubah acak Kontinu, maka *f(x,y)* disebut distribusi probabilitas gabungan dari X dan Y yaitu suatu permukaan yang terletak di atas bidang xy, dan P[(X,Y)εA] dimana A adalah daerah di bidang xy , sama dengan isi silinder kanan yang dibatasi oleh dasar A dan permukaan.

Definisi

Fungsi $f(x,y)$ adalah fungsi padat gabungan peubah acak Kontinu X dan Y, jika memenuhi syarat berikut:

1. $f(x,y) \ge 0$, *untuk semua* (x,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \quad = 1$
3. $P[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)\,dxdy$, *untuk tiap daerah A dibidang xy*

Contoh 1

Diketahui fungsi padat gabungan :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3^2)}{3}, 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad x\ lainnya \end{cases}$$

a. Buktikan bahwa syarat 2 definisi terpenuhi

b. Hitung $P[(X,Y) \in A]$, jika A daerah $\{(x,y)|0 < x < 1; \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4} dxdy =$

$\int_0^1 \frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\Big]_{x=0}^{x=2} dy$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3y^2}{2}\right) dy = \frac{y}{2} + \frac{y^3}{2}\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, terbukti

b. $P[(X,Y)\ A = P(0 < x < 1;\ \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}]$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4} dxdy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\Big]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} + \frac{3y^2}{8}\right) dy = \frac{y}{8} + \frac{y^3}{8}\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{512}\right)$$

$$= \frac{23}{512}$$

Contoh 2

Suatu pengiriman barang yang memproduksi coklat dengan campuran krim, cofee dan kacang, dengan berlapis coklat cerah dan pekat. Bila sebuah kotak diambil secara acak , serta X dan Y masing-masing menyatakan proporsi campuran krem berlapis coklat cerah dan pekat dengan fungsi padat gabungannya adalah

$: f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+3y); 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 \qquad\qquad untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$

a. Tunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

b. Cari $P[(X,Y) \in A]$ jika daerah $\{(x,y)\ 0 < x < \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$

Penyelesaian

a. $P[(X,Y) \in A]$ untuk daerah $\{(x,y)\ 0 < x < \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}(2x+3y)dxdy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{10} + \frac{3y}{5})dy = (\frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10})\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{160}$$

3. Distribusi Marginal

Dari contoh 2 diatas, karena sebaran probabilitas gabungan $f(x,y)$ dari variabel peubah acak diskrit X dan Y diketahui, maka sebaran probabilitas $g(x)$ dari X sendiri diperoleh dengan penjumlahan $f(x,y)$ pada nilai pada nilai Y. Dengan cara yang sama, sebaran probabilitas $h(y)$ dari Y saja diperoleh dengan menjumlahkan $f(x,y)$ pada nilai X. Hal ini disebut sebagai distribusi marginal dari X dan Y. Bila X dan Y aalah peubah acak Kontinu, penjumlahan diganti dengan integral.

Definisi Distribusi Marginal dari X saja dan Y saja Untuk kasus diskrit

$g(x) = \sum_y f(x,y)$ *dan* $h(y) = \sum_x f(x,y)$

Contoh 1

Perhatikan contoh 2 pada pembahasan Distribusi Peluang Gabungan sebelumnya. Pada contoh tersebut terdapat kolom distribusi peluang gabungan. Jadi tunjukkan bahwa total kolom dan baris dari table tersebut yang merupakan sebaran marginal X saja dan Y saja.

Penyelesaian

Untuk peubah acak X, dari total kolom pada table kita dapati bahwa:

$$P(X=0) = g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

$$P(X=1) = g(1) = \sum_{y=0}^{2} f(1,y) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2)$$

$$= \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28}$$

$$P(X=2) = g(2) = \sum_{y=0}^{2} f(2,y) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2)$$

$$= \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}$$

Selanjutnya, dengan cara yang serupa dapat kita perlihatkan bahwa nilai $h(y)$ diberikan oleh total baris. Dalam bentuk table, sebaran marginal ini dapat ditulis sebagai berikut:

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

Soal C

1. Misalkan fungsi peluang gabbungan dari X dan Y berbentuk;
   $$P(x,y) = Kxy; x = 1,2,3 \; dan \; y = 1,2,3$$
   a. Tunjukan nilai K
   b. Hitung $P(x \geq 2, y < 2)$ dan $P(x > 2, y > 1)$
2. Misalkan fungsi peluang gabungan dari x dan y berbentuk;
   $$P(x,y) = \left(\frac{1}{32}\right)(x+y); x = 1,2 \; dan \; y = 1,2,3,4$$
   a. Hitung $P(x > y)$
   b. Hitung $P(x + y = 3)$
   c. Hitung $P(y = 2x)$
   d. Hitung $P(x \leq 3 - y)$
3. Misalkan fungsi densitas gabungan dari x dan y;
   $$f(x,y)\begin{cases} \frac{1}{k}; 0 < y < x < 1 \\ 0; x, y \; selainnya \end{cases}$$
   a. Hitung $P(x \leq 0{,}5 \; dan \; y \leq 0{,}25)$
   b. Hitung $P(x \geq 0{,}5 \; dan \; y \geq 0{,}25)$
   c. Hitung $P(x > 0{,}5 \; dan \; y > 0{,}25)$

d. Hitung $P(x \leq 0,5)$

e. Hitung $P(y \leq 0,25)$

4. Diketahui fungsi peluang gabungan dari x dan y

$$P(x,y) = K(x^2 + y^2); x = -1,0,1,3 \; dan \; y = -1,2,3$$

a. Hitung:

i. Nilai K

ii. $P(x = 0, y \leq 2)$

iii. $P(x > 2 - y)$

b. Tunjukan:

i. Fungsi peluang marginal dari x

ii. Fungsi peluang marginal dari y

5. Diketahui fungsi gabungan dari x dan y

$$g(x,y) = \begin{cases} 8xy; 0 < y < x < 1 \\ 0; selainnya \end{cases}$$

a. Buktikan bahwa $g(x,y)$ merupakan fungsi densitas gabungan

b. Tentukan fungsi densitas marginal dari x

c. Tentukan fungsi densitas marginal dari y

Kunci jawaban C

1.

a. fungsi peluang gabungan dari X dan Y harus memenuhi

i. $P(x, y) \geq 0$

ii. $\sum_x \sum_y P(x,y) = 1$

Sehingga :

- $\sum_x \sum_y P(x,y) = 1$
- $\sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{3} k\,x\,y = 1$

- $\sum_{x=1}^{3} (k\,x.1 + k\,x.2 + k\,x.3) = 1$
- $\sum_{x=1}^{3} 6\,k\,x = 1$
- $6\,k \sum_{x=1}^{3} x$
- $6\,k\,(1 + 2 + 3) = 1$
- $36\,k = 1$
- $K = \frac{1}{36}$

Dengan menggunakan $k = \frac{1}{36}$ maka $p(x, y) \geq 0$ untuk $x = 1, 2, 3$ dan $y = 1, 2, 3$ dengan demikian k yang memenuhi adalah $k = \frac{1}{36}$

b.

i. $p(x \geq 2, y < 2) = \sum_{x=2}^{3} \sum_{y=1}^{3} p(x,y)$

$$= \sum_{x=2}^{3} \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{36} x, y$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{x=2}^{3} \sum_{y=1}^{3} x, y$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{x=2}^{3} x$$

$$= \frac{1}{36} (2 + 3)$$

$$= \frac{5}{36}$$

ii. $P(x > 2, y > 1) = \sum_{x=3} \sum_{y=2}^{3} p(x,y)$

$$= \sum_{x=3} \sum_{y=2}^{3} \frac{1}{36} x\,y$$

$$= \sum_{x=3} \frac{1}{36} (2x + 3x)$$

$= \sum_{x=3} \frac{5}{36} x$

$= \frac{5}{36} . 3$

$= \frac{15}{36}$

2. a). $p(x > y) = p(x = 2, y = 1)$

$= \frac{1}{32}(1+2)$

$= \frac{3}{32}$

b). $p(x + y = 3) = p(x = 1, y = 2) + p(x = 2, y = 1)$

$= \frac{1}{32}(1+2) + \frac{1}{32}(2+1)$

$= \frac{3}{32} + \frac{3}{32}$

$= \frac{6}{32}$

$= \frac{3}{16}$

c). $p(y = 2x) = p(x = 1, y = 2) + p(x = 2, y = 4)$

$= \frac{1}{32}(1+2) + \frac{1}{32}(2+4)$

$= \frac{3}{32} + \frac{6}{32}$

$= \frac{9}{32}$

d). $p(x \leq 3 - y) = p(x + y \leq 3)$

$= p(x = 1, y = 1) + p(x = 1, y = 2) + p(x = 2, y = 1)$

$= \frac{1}{32}(1+1) + \frac{1}{32}(1+2) + \frac{1}{32}(2+1)$

$= \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32}$

$= \frac{8}{32}$

$= \frac{1}{4}$

3. (i) sebelum menghitung peluang berdasarkan fungsi densitas gabungan, maka nilai k harus ditentukan terlebih dahulu

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$

$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{k}\, dy\, dx = 1$

$\int_0^1 \frac{y}{k} \Big|_0^y dx = 1$

$\int_0^1 \frac{x-0}{k}\, dx = 1$

$\int_0^1 \frac{x}{k}\, dx = 1$

$\frac{x^2}{2k} = 1$

$\frac{1^2 - 0^2}{2k} = 1$

$\frac{1}{2k} = 1$

$k = \frac{1}{2}$

$P(x \leq 0{,}5 \text{ dan } y \leq 0{,}25)$

$= \int_0^{0,25} \int_y^{0,5} f(x,y)\, dx\, dy$

$= \int_0^{0,25} \int_y^{0,5} \frac{1}{2}\, dx\, dy$

$= \int_0^{0.25} \frac{1}{2} x \Big|_y^{0,5} dy$

$= \int_0^{0,25} \frac{1}{2}(0{,}5 - y)\, dy$

$= \int_0^{0,25} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} y\, dy$

$= \frac{1}{4} y - \frac{1}{2} y^2$

$= \frac{1}{4}(0{,}25 - 0) - \frac{1}{4}(0{,}25^2 - 0^2)$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{64}$

$= \frac{4-1}{64}$

$= \frac{3}{64}$

(ii) p (x ≥ 0,5 dan y ≥ 0,5)

$= \int_{0,5}^{1} \int_{y}^{1} f(x,y)dx\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \int_{y}^{1} \frac{1}{2}\ dx\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2}x \Big|_{y}^{1}\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2}(1 - y)\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\ dy$

$= \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 \Big|_{0,5}^{1}$

$= \frac{1}{2}(1 - 0{,}5) - \frac{1}{4}(1^2 - 0{,}5^2)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{16}$

$= \frac{4-3}{16}$

$= \frac{1}{16}$

iii) p (x >0,5 dan y > 0,5)

$= \int_{0,5}^{1} \int_{0,5}^{x} f(x,y)dx\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \int_{0,5}^{x} \frac{1}{2}\ dx\ dy$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2}y \Big|_{0,5}^{y}\ dx$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2}(x - 0{,}25)\ dx$

$= \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\ dx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x \Big|_{0,5}^{1}$

$= \frac{1}{4}(1^2 - 0{,}5^2) - \frac{1}{8}(1 - 0{,}5)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{16} - \frac{1}{16}$

$= \frac{2}{16}$

$= \frac{1}{8}$

(iv) p (x ≤ 0,5)

$= \int_{0}^{0,5} \int_{0}^{x} f(x,y)dy\ dx$

$= \int_{0}^{0,5} \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\ dy\ dx$

$= \int_{0}^{0,5} \frac{1}{2}y \Big|_{0}^{x}\ dx$

$= \int_{0}^{0,5} \frac{1}{2}(x - 0)\ dx$

$= \int_{0}^{0,5} \frac{1}{2}x\ dx$

$= \frac{1}{4}x^2 - \Big|_{0,5}^{1}$

$= \frac{1}{4}(0{,}5^2 - 0^2)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{16}$

(v) p (y ≤ 0,25)

$= \int_0^{0,25} \int_y^1 f(x,y)dx\ dy$

$= \int_0^{0,25} \int_y^1 \frac{1}{2}\ dx\ dy$

$= \int_0^{0,25} \frac{1}{2}x \Big|_y^1\ dy$

$= \int_0^{0,5} \frac{1}{2}(1-y)\ dy$

$= \int_0^{0,25} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\ dy$

$= \frac{1}{2}y\ -\ \frac{1}{4}y^2\Big|_0^{0,25}$

$= \frac{1}{2}$ (0,25 – 0) - $\frac{1}{4}$ (0,25– 0^2)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{8}\ -\ \frac{1}{64}$

$= \frac{8-1}{64}$

$= \frac{7}{64}$

4. a) (i). p (x, y) merupakan fungsi peluang gabungan dan harus memenuhi syarat :

- P (x, y) ≥ 0
- $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$

Selanjutnya :

- $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$
- $\sum_x \sum_y k(x^2 + y^2) = 1$
- $\sum_x K\ [(x^2 + 1) + (x^2 + 4) + (x^2 + 9)] = 1$
- $\sum_x K\ [3x^2 + 14\ ] = 1$

- $K\ [(3+14) + (0+14) + (3+14) + (27+14)] = 1$
- K { 17+14+17+41} = 1
- K . 89 = 1
- K = $\frac{1}{89}$

(ii). P (x = 0, y ≤ 2) = $\sum_{x=0} \sum_{-1,2} p(x,y)$

$= \sum_{x=0} \sum_{-1,2} \frac{1}{89}(x^2 + y^2)$

$= \sum_0 \frac{1}{89}$ { $(x^2+1) + (x^2+4)$}

$= \sum_0 \frac{1}{89}$ { $(2x^2+5)$

$= \frac{1}{89}(2x^2+5)$

$= \frac{5}{89}$

(iii). P (x >2 - y) = P (x + y > 2)

= P (x = 0, y = 3) + P (x = 1, y = 2) +

P (x = 1, y = 3) + P (x = 3, y = 2) +

P (x = 3, y = 3)

$= \frac{1}{89}(0^2+3^2) + \frac{1}{89}(1^2+2^2) +$

$\frac{1}{89}(1^2+3^2) + \frac{1}{89}(3^2+2^2) +$

$\frac{1}{89}(3^2+3^2)$

$$= \frac{1}{89}\{\,9 + 5 + 10 + 13 + 18\,\}$$

$$= \frac{1}{89}\ .\ 55\ = \frac{55}{89}$$

b.(i) fungsi peluang marginal dari x

$$P_x(x) = \sum_y P(x,y)$$

$$= \sum_y \frac{1}{89}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{89}\{(x^2+1) + (x^2+4) + (x^2+9)\}$$

$$= \frac{1}{89}(3x^2 + 14)$$

$$\therefore P_x(x) = \frac{1}{89}(3x^2 + 14); x = -1,0,1,3$$

(ii) fungsi peluang marginal dari y

$$P_y(y) = \sum_x P(x,y)$$

$$= \sum_x \frac{1}{89}(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{89}\{(1+y^2) + (y^2) + (1+y^2) + (9+y^2)\}$$

$$= \frac{1}{89}(11 + 4y^2)$$

$$\therefore P_y(y) = \frac{1}{89}(11 + 4y^2); y = -1,2,3$$

5.

i. bukti:

Untuk menentukan $g(x,y)$ merupakan fungsi densitas gabungan maka akan ditunjukan bahwa g memiliki syarat;

a. $g(x,y) \geq 0$

b. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dy\ dx = 1$

Perhatikan

a. Karena $g(x,y) = 8xy$ untuk $0 < y < x < 1\ dan\ g(x,y) = 0$ untuk interval lainnya maka jelas $g(x,y) \geq 0$

b. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dy\ dx = \int_0^1\int_0^x 8xy\ dy\ dx$

$$= \int_0^1 4xy^2 \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 4x(x^2 - 0^2)dx$$

$$= \int_0^1 4x^3 dx$$

$$= x^4 \Big|_0^1 dx$$

$$= 1^4 - 0^4$$

$$= 1$$

$$ini\ berarti\ terbukti\ bahwa \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dy\ dx = 1$$

Kesimpulan:

Terbukti bahwa $g(x,y)$ merupakan fungsi dentitas gabungan

ii. fungsi densitas marginal dari x

$$g_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g(x,y\ dy + \int_{0}^{x} g(x,y)dy + \int_{x}^{\infty\infty} g(x,y)dy$$

$$= 0 + \int_{0}^{x} g(x,y)dy + 0$$

$$= \int_{0}^{x} 8xy\ dy$$

$$4xy^2 \Big|_0^x$$

$$= 4x(x^2 - 0^2)$$

$$= 4x^3$$

$$\therefore g_x(x) = \begin{cases} 4x^3; 0 < x < 1 \\ 0; selainnya \end{cases}$$

iii. fungsi densitas marginal dari y

$$g_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{y} g(x,y\ dx + \int_{y}^{1} g(x,y)dx + \int_{1}^{\infty} g(x,y)dy$$

$$= 0 + \int_{y}^{1} g(x,y)dx + 0$$

$$= \int_{y}^{1} 8xy\ dx$$

$$= 4x^2y \Big|_y^1$$

$$= 4(1^2 - y^2)y$$

$$= 4(y - y^3)$$

$$\therefore g_y(y) = \begin{cases} 4(y - y^3); 0 < y < 1 \\ 0; selainnya \end{cases}$$

Referensi

Raymond H.Myers,dkk. 1998. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Sixth Edition.* New Jersey: Prentice Hall,Inc. Alih bahasa oleh Jozep Edyanto dan diterbitkan oleh PT Prenhallindo, Jakarta.

Irzani dan Rifa'i.2011. *Pengantar Statistika Matematika.* Yogyakarta: Media Graffindo Press.

DISTRIBUSI BERSYARAT DAN KEBEBASAN STOKASTIK

1. Distribusi Bersayarat Diskrit

   Dalam teori peluang, telah dijelaskan mengenai dua buah peristiwa yang bersyarat. Jika A dan B adalah dua buah peristiwa, maka peluang terjadinya peristiwa B diberikan peristiwa A dirumuskan dengan:

   $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $0 < P(A) < 1$

   Jika A adalah peristiwa X = x dan B adalah peristiwa Y = y, maka;

   $P(Y = y \mid X = x) \quad = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(X=x)}$

   $= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$

   $P(y \mid x) \quad = \frac{P(x,y)}{P1(x)}$; $p_1(x) > 0$

   Dari perumusan di atas, kita dapat mendefinisikan fungsi peluang bersyarat dari sebuah peubah acak diberikan peubah acak lainnya.

2. Fungsi Distribusi Bersyarat Diskrit

Definisi fungsi distribusi bersyarat diskrit:

Jika $p(x, y)$ adalah nilai peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit X dan Y di (x, y) dan $p_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari Y di y, maka fungsi yang dinyatakan dengan;

$$P(x \mid y) = ; p_2(y) > 0$$

Untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y = y$.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan;

$$P(x \mid y) = \frac{P(x,y)}{P1(x)};\ P1(x) > 0$$

Untuk setiap y dalam daerah hasil Y, dinamakan fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X = x$.

Karena $p(x \mid y)$ dan $p(y \mid x)$ masing-masing merupakan fungsi peluang, maka kesua fungsi itu harus memenuhi sifat sebagai berikut;

1. a. $p(x \mid y) \geq 0$

   b. $\sum_x p(x \mid y) = 1$

   Bukti: $\sum_x p(x \mid y) \quad = \sum_x \frac{p(x,y)}{p2(y)}$

   $= \frac{1}{p2(y)} \sum_x p(x \mid y)$

   $= \frac{1}{p2(y)} p2(y)$

   $\sum_x p(x \mid y) = 1$

2. a. $p(y \mid x) \geq 0$

   b. $\sum_y p(y \mid x) = 1$

   Bukti: $\sum_y p(y \mid x) \quad = \sum_y \frac{p(x,y)}{p1(y)}$

$$= \frac{1}{p1(y)} \sum_y p(x \mid y)$$

$$= \frac{1}{p1(y)} p1(y)$$

$\sum_y p(y \mid x) = 1$

Contoh 1.2 :

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$P(x, y) = (\frac{1}{21})\ (x + y);\ x = 1, 2, 3$

$y = 1, 2$

a. Tentukan $p(x \mid y)$

b. Tentukan $p(y \mid x)$

c. Hitung $p(x \mid y = 1)$

Penyelesaian:

a. $p(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p2(y)}$

Kita akan menentukan terlebih dahulu $p2(y)$, yang merupakan fungsi peluang marginal dari Y.

$p2(y) \quad = \sum_y p(y \mid x)$

$= \sum_{x=1}^{3} (\frac{1}{21})\ (x + y)$

$= (\frac{1}{21})\ \{(1 + y) + (2 + y) + (3 + y)\}$

$= (\frac{1}{21})\ (6 + 3y)$

Jadi: $p_2(y) = (\frac{1}{21})\ (6 + 3y)\ ;\ y = 1, 2$

Sehingga: $p(x \mid y) = \frac{x+y}{6+3y}\ ;\ x = 1, 2, 3$

Pemeriksaan terhadap hasil di atas dilakukan sebagai berikut:

i. Karena x = 1, 2, 3 dan y = 1, 2, maka $p(x \mid y) > 0$

ii. Kita akan membuktikan bahwa $\sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{6+3y} = 1$

Bukti:

$\sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{6+3y} = \frac{1}{6+3y}\ \{(1 + y) + (2 + y) + (3 + y)\}$

$= \frac{1}{6+3y}\ (6 + 3y)$

$\sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{6+3y} = 1$

b. $P(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p1(x)}$

Kita akan menemukan dahulu $p_1(x)$, yang merupakan fungsi peluang marginal dari X.

$p_1(x) \quad = \sum_y p(x \mid y)$

$= \sum_{y=1}^{2} (\frac{1}{21})\ (x + y)$

$= (\frac{1}{21}) \{(x + 1) + (x + 2)\}$

$= (\frac{1}{21}) (2x + 3)$

Jadi: $p_1(x) = (\frac{1}{21}) (2x + 3)$; $x = 1, 2, 3$

Sehingga: $p(y \mid x) = \frac{x+y}{2x+3}$; $y = 1, 2$

Pemeriksaan terhadap hasil di atas dilakukan sebagai berikut:

i. Karena $x = 1, 2, 3$ dan $y = 1, 2$ maka $p(y \mid x) > 0$.

ii. Kita akan membuktikan bahwa $\sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{2x+3} = 1$

Bukti:

$$\sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{2x+3} = \frac{1}{2x+3} \{(x + 1) + (x + 2)\}$$

$$= \frac{1}{2x+3} (2x + 3)$$

$$\sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{2x+3} = 1$$

c. $P(x \mid y = 1) = (\frac{1}{9}) (x + 1)$

3. Fungsi Distribusi Bersyarat Kontinu

Definisi fungsi distribusi bersyarat Kontinu:

Jika $f(x, y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak Kontinu X dan Y di (x, y) dan $f_2(y)$ adalah nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$G(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f2(y)};\ f_2(y) > 0$$

Untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y.

Jika $f_1(x)$ adalah nilai fungsi densitas marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$H(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f1(y)};\ f_1(y) > 0$$

Untuk setiap y daloam daerah hasil Y, dinamakan fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x.

Karena g(x | y) dan h(y | x) masing-masing merupakan fungsi densitas, maka kedua fungsi itu harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. a. $g(x \mid y) \geq 0$

   b. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x \mid y)\, dx = 1$

   bukti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x \mid y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f1(y)}\, dx$$

$$= \frac{1}{f2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$= \frac{1}{f2(y)} \cdot f_2(y)$

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x \mid y)dx = 1$

2. a. $H(y \mid x) \geq 0$

   b. $\int_{-\infty}^{\infty} h(y \mid x)dy = 1$

   bukti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y \mid x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f1(y)} dy$$

$$= \frac{1}{f2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} h(x \mid y)dy$$

$$= \frac{1}{f1(y)} \cdot f_1(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} h(y \mid x)dy = 1$

Contoh 1.3 :

Diketahui fungsi densitas gabungan dari X dan Y adalah:

$F(x, y) = 4xy;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$

$= 0$; x, y lainya

a. tentukan fungsi densitas bersyarat dari X diberikan $Y = y$.

b. tentukan fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan $X = x$.

Penyelesaian:

a. $g(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f2(y)}$

kita akan menentukan dahulu $f_2(y)$, yang merupakan fungsi densitas marginal dari Y.

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$

$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} f(x,y)dx + \int_{1}^{\infty} f(x,y)dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 4xy\, dx + \int_{-1}^{\infty} 0dx$

$= 0 + 2x^2y]_{x=0}^{1} + 0$

$= 2y$

Jadi: $f_2(y) = 2y;\ 0 < y < 1$

$= 0$; y lainnya.

Sehingga:

$g(x \mid y) = \frac{4xy}{2y} = 2x$

maka: $g(x \mid y) = 2x$; $0 < x < 1$

$= 0$; x lainnya

Pemeriksaan terhadap hasil di atas dilakukan sebagai berikut.

i. Karena $0 < x < 1$, maka $g(x \mid y) > 0$.

ii. Kita akan membuktikan bahwa: $\int_0^1 2x\,dx = 1$

Bukti;

$$\int_0^1 2x\,dx = x^2]_{x=0}^1$$

$$\int_0^1 2x\,dx = 1$$

b. $h(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f1(y)}$

Kita akan mementukan dahulu $f_1(x)$, yang merupakan fungsi densitas marginal dari X.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dy + \int_0^1 4xy\,dy + \int_1^{\infty} 0dy$$

$$= 0 + 2y^2\,x\,]_{y=0}^1 + 0$$

$$= 2x$$

Jadi: $f_1(x) = 2x;\ 0 < x < 1$

$= 0.; x$ lainnya

Sehingga:

$$h(y \mid x) = \frac{4xy}{2y} = 2y$$

Maka: $h(y \mid x) = 2y: ;\ 0 < y < 1$

$= 0.; y$ lainnya

Pemeriksaan terhadap hasil di atas dilakukan sebagai berikut.

i. Karena $0 < y < 1$, maka $h(y \mid x) > 0$

ii. Kita akan membuktikan bahwa: $\int_0^1 2y\,dy = 1$

Bukti:

$$\int_0^1 2y\,dy =]_{y=0}^1$$

$$\int_0^1 2y\,dy = 1$$

4. Kebebasan Stokastik Disktit

Jika kita mempunyai dua buah peubah acak X dan Y, baik diskrit maupun kontinu, maka kita dapat mengetahui apakah kedua peubah acak itu bebas stokastik atau tidak bebas stokastik.

Penentuan kebebasan stokastik dari dua peubah acak diskrit bisa dilihat dalam definisi 2.1.

Definisi 1.4.1 Kebebasan Stokastik Diskrit

Misalnya dua peubah acak diskrit X dan Y mempunyai nilai fungsi peluang gabungan di (x, y) yaitu p(x, y) serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari X di x, yaitu $p_1(x)$ *dan nilai fungsi peluang marginal dari Y di y, yaitu* $p_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$P(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

Untuk semua pasangan nilai (x, y).

Dalam praktiknya, soal yang menyangkut kebebasan stokastik dua peubah acak diskrit ini ada dua kemungkinan, yaitu sebagai berikut:

a. Fungsi peluang gabungan dari kedua peubah acak diketahui bentuknya. Kita harus menentukan dahulu fungsi peluang marginal dari masing-masing peubah acaknya. Kemudian kita subsitusikan semua pasangan nilai dari kedua peubah acak itu kedalam persyaratan kebebasan stokastik, dan kita perhatikan hasilnya dengan kriteria sebagai berikut:

   1) Apabila ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan bebas stokastik

   2) Apabila ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka kedua ruas peubah acak itu dikatakan tidak bebas stokastik atau bergantingan untuk minimal satu pasangan nilai peubah acak.

b. Fungsi peluang gabungan dari kedua peubah acak tidak diketahui bentuknya. Dalam hal ini, fungsi peluang marginal dari masing-masing peubah acak diketahui bentuknya. Kemudian kita subsitusikan semua pasangan nilai dari kedua peubah acak ke

dalam persyaratan kebebasan stokastik dan kriterianya sama dengan sebelumnya.

Pemahaman dari uraian di atas diperjelas melalui contoh 2.1. Dalam hal ini, kita hanya membahas kemungkinan yang pertama saja

Contoh 1.4.1 :

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$P(x, y) = \left(\frac{1}{72}\right)(x + 2y);\ x = 0, 1, 2, 3 \text{ dan } y = 0, 1, 2, 3$$

Apakah X dan Y bebas stokastik?

Penyelesaian:

Fungsi peluang marginal dari X adalah:

$$P_1(x) = \sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{72}\right)(x + 2y)$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)\{x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6)\}$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)(4x + 12)$$

$$P_1(x) = \left(\frac{1}{18}\right)(x + 3)$$

Jadi: $P_1(x) = \left(\frac{1}{18}\right)(x + 3);\ x = 0, 1, 2, 3$

Fungsi peluang marginal dari Y adalah :

$P_2(y) = \sum_{y=0}^{3} (\frac{1}{72}) (x + 2y)$

$= (\frac{1}{72}) \{2y + (1 + 2y) + (2 + 2y) + (3 + 2y)\}$

$= (\frac{1}{72}) (8y + 6)$

$P_2(x) = (\frac{1}{36}) (4y + 3)$

Jadi: $P_2(x) = (\frac{1}{36}) (4y + 3); y = 0, 1, 2, 3$

Misalnya pasangan nilai X dan Y diambil $(x, y) = (0, 0)$

- $P(x = 0, y = 0) = (\frac{1}{72}) (0 + 0) = 0$
- $P_1(x = 0) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$
- $P_2(y = 0) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Ternyata $P(x = 0, y = 0) \neq P_1(x = 0) \neq P_2(y = 0)$, karena $0 \neq (\frac{1}{72})$.

Maka X dan Y dikatakan kedua peubah acak yang bergantungan.

Penentuan kebebasan stokastik dari dua peubah acak kontinu bisa dilihat dalam definisi 1.4.2

Definisi 1.4.2 : kebebasan stokastik kontinu

Misalnya dua peubah acak Kontinu X dan Y mempunyai nilai fungsi densitas gabungan di (x, y), yaitu f(x, y) serta masing-masing mempunyai nilai fungsi densitas marginal dari X di x, yaitu $f_1(x)$ dan nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, yaitu $f_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$F(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Dalam praktiknya, soal yang menyangkut kebebasan stokastik dua peubah acak Kontinu ini ada dua kemungkinan, yaitu sebagai berikut:

a. Fungsi densitas gabungan dari kedua peubah acak diketahui bentuknya. Kita harus menentukan dahulu fungsi densitas marginal dari masing-masing peubah acaknya. Kemudian kita menggunakan persyaratan kebebasan stokastik, dan kita memperhatikan hasilnya dengan kriteria sebagai berikut:

a. Apabila ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan bebas stokastik.

b. Apabila ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka kedua peubah acak itu dikatakan tidak bebas stokastik atau bergantungan.

b. Fungsi densitas gabungan dari kedua peubah acak tidak diketahui bentuknya. Dalam hal ini fungsi densitas marginal dari masing-masing peubah acak diketahui bentuknya. Kemudian kita menggunakan persyaratan kebebasan stokastik dan kriterianya sama dengan sebelumnya.

Pemahaman dari uraian di atas diperjelas melalui contoh 2.2. Dalam hal ini kita hanya membahas kemungkinan yang pertama saja.

Contoh 1.4.2 :

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$f(x, y) = x + y;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$

$= 0\ ;\ x, y$ lainnya.

Apakah X dan Y bebas stokastik?

Penyelesaian:

Kita harus menentukan dahulu fungsi densitas marginal masing-masing dari X dan Y.

Fungsi densitas marginal dari X adalah:

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy + \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^{\infty} f(x,y)dy$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int_0^1 (x,y)\ dy + \int_1^{\infty} 0\,dy$

$= 0 + \{xy + (\frac{1}{2})y^2\}$

$h(y) = \frac{1}{2} + y$

Jadi: $h(y) = \frac{1}{2} + y;\ 0 < y < 1$

$= 0\ ;\ y$ lainnya.

Maka: $g(x)\ .\ h(y) = (x + \frac{1}{2})\ (\frac{1}{2} + y)$

$= \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$

Ternyata $f(x, y) \neq g(x)\ .\ h(y)$, karena $x + y \neq \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$

Sehingga X dan Y merupakan peubah acak yang tidak bebas stokastik atau bergantungan.

Soal D

1. Misalkan fungsi densitas $\boldsymbol{x}$ dan y adalah:

   $$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)(2x + y); 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

   Tentukan:

   i. Fungsi densitas marginal dari x
   ii. Fungsi densitas marginal dari y
   iii. Fungsi densitas bersyarat $x|y = 1$
   iv. Fungsi densitas bersyarat $y\,\Big|\,x = \frac{1}{4}$

2. Misalkan fungsi densitas gabungan dari y dan z

   $$g(y, z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20}\right); y < z \leq y + 2, 0 \leq y \leq 10 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tentukan :

a) Fungsi densitas marginal dari y

b) Fungsi densitas marginal dari z

c) $h(y|z = 5)$

d) $k(z|y = 3)$

3. Misalkan fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$f(x,y) = \begin{cases} c(6-x-y); 0 \leq x \leq 2, & 2 \leq y \leq 4 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a) Nilai c

b) Fungsi densitas marginal dari x

c) Fungsi densitas marginal dari y

d) Fungsi densitas bersyarat dari Fungsi densitas marginal dari x berikan $Y = y$

e) Fungsi densitas bersyarat dari Fungsi densitas marginal dari y berikan $X = x$

4. Misalkan fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-y); 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa x dan y saling bebas

5. Diketahui fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$f(x,y) = \begin{cases} kx(x-y); -x < y < x, 0 < x < 2 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

a) Tentukan nilai k

b) Apakah x dan y dua peubah acak yang bebas stokastis

Kunci Jawaban Soal D

1. (i) Fungsi densitas marginal dari x

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_{0}^{2} f(x,y)dy + \int_{2}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}(2x+y)dy + 0$$
$$= \frac{1}{4}\left(2xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{4}\left\{2x(2-0 + \frac{1}{2}(2^2 - 0^2)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\{4x+2\}$$
$$= \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$$
$$\therefore f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}; 0 < x < 1 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

(ii) Fungsi densitas marginal dari y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} f(x,y)dy + \int_{1}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= 0 + \int_{0}^{1} \frac{1}{4}(2x+y)dx + 0$$
$$= \frac{1}{4}(x^2 + xy)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{4}\{(1^2 - 0^2 + (1-0)y\}$$
$$= \frac{1}{4}\{1+y\}$$
$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(y+1); 0 < y < 2 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

(iii) Fungsi densitas bersyarat $x|y = 1$

$$f(x|y=1) = \frac{f(x,1)}{f_y(1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2x+1)}{\frac{1}{4}(1+1)}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)$$

$$\therefore f(x|y=1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+1); 0 < x < 1 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

(iv) Fungsi densitas bersyarat $y\left|x = \frac{1}{4}\right.$

$$f\left(y\middle|x=\frac{1}{4}\right) = \frac{f(\frac{1}{4},y)}{f_x(\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2\cdot\frac{1}{4}+y)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+y}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+y}{3}$$

$$= \frac{1}{6}(1+2y)$$

$$\therefore f\left(y\middle|x=\frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1+2y); 0 < y < 2 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

2. a) Fungsi densitas marginal dari y

$$g_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y,z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{y} g(y,z)dz + \int_{y}^{y+2} g(y,z)dz + \int_{y+2}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= 0 + \int_{y}^{y+2} \frac{1}{20}dz + 0$$

$$= \frac{1}{20}z \Big|_{y}^{y+2}$$

$$= \frac{1}{20}z(y+2-y)$$

$$= \frac{1}{10}$$

$$\therefore g_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}; 0 \le y \le 10 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

b) Fungsi marginal dari z

Daerah integral dalam kasus ini terbagi atas 3 daerah keberlakuan yakni:

(i) $y = 0$ dengan $y = z$ untuk $0 \le z < 2$

(ii) $y = z$ dengan $y = z - 2$ untuk $2 \le z < 10$

(iii) $y = z - 2$ dengan $y = 10$ untuk $10 \le z < 12$

Peubah:

(i) $g_{z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y,z)dy$

$$= \int_{0}^{z} \frac{1}{20}dy$$

$$= \frac{1}{20}y \Big|_{0}^{z}$$

$$= \frac{1}{20}(z-0)$$

$$= \frac{1}{20}z \quad ; 0 \le z < 2$$

(ii) $g_{z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y,z)dy$

$$= \int_{z-2}^{z} \frac{1}{20}dy$$

$$= \frac{1}{20}y \Big|_{z-2}^{z}$$

$$= \frac{1}{20}(z-(z-2))$$

$$= \frac{1}{10} \quad ; 2 \le z < 10$$

(iii) $g_{z_3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y,z)dy$

$$= \int_{z-2}^{10} \frac{1}{20} dy$$

$$= \frac{1}{20} y \Big|_{z-2}^{10}$$

$$= \frac{1}{20}(10-(z-2))$$

$$= \frac{1}{20}(12-z) \quad ; 10 \le z < 12$$

$$\therefore g_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{20} z ; 0 \le z < 2 \\ \frac{1}{10} ; 2 \le z < 10 \\ \frac{1}{20}(12-z) ; 10 \le z < 12 \\ 0; \quad lainnya \end{cases}$$

c) $h(y \,|\, z=5) = \frac{g(y,5)}{g_z(5)}$

$$= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore h(y \,|\, z=5) = \begin{cases} \frac{1}{2}; 0 < y < 10 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

d) $k(z \,|\, y=3) = \frac{g(3,z)}{g_y(3)}$

$$= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. a) Karena fungsi densitas gabungan dari x dan y, maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$$

$$\int_0^2\int_2^4 c(6-x-y)dydx = 1$$

$$\int_0^2 c\left\{6y - xy - \frac{1}{2}y^2\right\}\Big|_2^4 dx = 1$$

$$\int_0^2 c\left\{6(4-2) - x(4-2) - \frac{1}{2}(4^2-2^2)\right\} dx = 1$$

$$\int_0^2 c\{12 - 2x - 6\} dx = 1$$

$$c\{6x - x^2y\}\Big|_0^2 = 1$$

$$c\{6(2-0) - (2^2 - 0^2\} = 1$$

$$c\{12-4\} = 1$$

$$8c = 1$$

$$c = \frac{1}{8}$$

Karena $c = \frac{1}{8} > 0$ dan membuat $f(x,y) \ge 0$, maka nilai c yang memenuhi adalah $c = \frac{1}{8}$

b) Fungsi densitas marginal dari x

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{2} f(x,y)dy + \int_{2}^{4} f(x,y)dy + \int_{4}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= 0 + \int_{2}^{4} f(x,y)dy + 0$$
$$= \int_{2}^{4} \frac{1}{8}(6 - x - y)dy$$
$$= \frac{1}{8}(6y - xy - \frac{1}{2}y^2)\Big|_2^4$$
$$= \frac{1}{8}\{6(y-2) - x(y-2) - \frac{1}{2}(4^2 - 2^2)\}$$
$$= \frac{1}{8}\{12 - 2x - 6\}$$
$$= \frac{1}{8}\{6 - 2x\}$$
$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6 - 2x); 0 \le x \le 2 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

c) Fungsi densitas marginal dari y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_{0}^{2} f(x,y)dy + \int_{2}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= 0 + \int_{0}^{2} f(x,y)dy + 0$$
$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{8}(6 - x - y)dy$$

$$= \frac{1}{8}(6x - \frac{1}{2}x^2 - xy)\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{8}\{6(2-0) - \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) - (2-0)y\}$$
$$= \frac{1}{8}\{12 - 2 - 2y\}$$
$$= \frac{1}{8}\{10 - 2y\}$$
$$= \frac{1}{4}\{5 - y\}$$
$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(5 - y); 2 \le y \le 4 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

d) Fungsi densitas bersyarat x berikan $Y = y$

$$f(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$= \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{4}(5 - y)}$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{6-x-y}{5-y})$$
$$\therefore f(x\,\Big|\,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{6 - x - y}{6 - 2x}\right); 0 \le x \le 2 \\ \qquad\qquad 2 \le y \le 4 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

e) Fungsidensitas bersyarat y berikan $X = x$

$$f(y\,|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$
$$= \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{8}(6 - 2x)}$$

$$= (\frac{6-x-y}{6-2x})$$

$$\therefore f(y|x) = \begin{cases} \left(\frac{6-x-y}{6-2x}\right); 0 \le x \le 2 \\ \qquad 2 \le y \le 4 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

4. Untuk menunjukkan bahwa x dan y peubah acak saling bebas, maka harus ditunjukkan bahwa:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Perhatikan

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} f(x,y)dy + \int_{1}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} 12xy(1-y)dy + 0$$

$$= 12\int_{0}^{1} xy - xy^2 dy$$

$$= 12(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy^3)\Big|_0^1$$

$$= 12\{\frac{1}{2}x(1^2 - 0^2) - \frac{1}{3}x(1^3 - 0^3)\}$$

$$= 12\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x\}$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{6}x$$

$$= 2x \qquad ; 0 < x < 1$$

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} f(x,y)dx + \int_{1}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} 12xy(1-y)dx + 0$$

$$= \int_{0}^{1} 12xy - 12xy^2 dx$$

$$= 6xy^2 - 6xy^2)\Big|_0^1$$

$$= 6(1^2 - 0^2)y - 6(1-0)y^2$$

$$= 6y - 6y^2$$

$$= 6y(1-y)$$

Selanjutnya

$$f(x,y) = 12xy(1-y)$$

$$= (2x) \cdot (6y(1-y))$$

$$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Karena $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ maka x dan y saling bebas.

5. a) Karena f merupakan fungsi densitas gabungan dari x dan y maka:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\, dx = 1$

$$\int_{0}^{2}\int_{-x}^{x} kx(x-y)dy\, dx = 1$$

$$\int_{0}^{2}\int_{-x}^{x} kx^2 - kxy\, dy\, dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} kx^2y - \frac{kxy^2}{2}\Big|_{-x}^{x} dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} kx^2(x+x) - \frac{kx(x^2-x^2)}{2} dx = 1$$

$$\int_{0}^{2} kx^3\, dx = 1$$

$$\frac{1}{2}kx^4\Big|_0^2 = 1$$
$$\frac{1}{2}k(2^4 - 0^4) = 1$$
$$\frac{1}{2}k \cdot 16 = 1$$
$$8k = 1$$
$$k = \frac{1}{8}$$

(ii) Karena $f(x,y) \geq 0$ untuk $k = \frac{1}{8}$ maka nilai k yang muncul adalah $k = \frac{1}{8}$

b) Untuk menunjukkan x dan y dua peubah acak yang bebas stokastis maka harus memenuhi $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ Perhatikan!

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$= \int_{-\infty}^{-x} f(x,y)dy + \int_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int_{x}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$= 0 + \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x(x-y)dy + 0$$
$$= \int_{-x}^{x} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}xy\ dy$$
$$= \frac{1}{8}x^2y - \frac{1}{16}xy^2)\Big|_{-x}^{x}$$
$$= \frac{1}{8}x^2(x+x) - \frac{1}{16}x(x^2 - x^2)$$
$$= \frac{1}{8}x^2 \cdot 2x - 0$$

$$= \frac{1}{4}x^3 \quad ;0 < x < 2$$

- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$= \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx + 2 \cdot \int_{y}^{2} f(x,y)dx + \int_{2}^{\infty} f(x,y)dx$$
$$= 0 + 2 \cdot \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x(x-y)dx + 0$$
$$= 2 \cdot \int_{y}^{2} \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}xy\ dx$$
$$= 2(\frac{1}{8}x^2y - \frac{1}{16}xy^2)\Big|_{y}^{2}$$
$$= 2(\frac{1}{8}(2^2 - y^2)y - \frac{1}{16}(2-y)y^2)$$
$$= 2(\frac{1}{8}y - \frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}y^3$$
$$= 2(\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{16}y^3)$$
$$= y\left(1 - \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2\right) \quad ; -2 < y < 2$$

Selanjutnya

$$f(x,y) = \frac{1}{8}x(x-y)$$
$$\neq \frac{1}{4}x^3 \cdot y(1 - \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2)$$
$$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Karena $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ maka x dan y tidak saling bebas

Referensi

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

E Walpole Ronal & H Myers Raymond, *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

EKSPEKTASI DAN RATAAN SATU PEUBAH ACAK

1. Nilai Ekspektasi Peubah Acak Diskrit

Definisi nilai ekspektasi peubah acak diskrit:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluangnya di x adalah p(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari u(X), dinotasikan dengan E[u(X)], didefinisikan sebagai

$E[u(X)] = \sum_x u(x).p(x)$

Pemahaman penghitungan nilai ekspektasi tersebut diperjelas melalui contoh.

Contoh:

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

$p(x) = \frac{x}{15}$; $x = 1, 2, 3, 4, 5$

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$.

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka:

$$\begin{aligned}E(X^2 - 1) &= \textstyle\sum_x (x^2 - 1) \,.\, p(x)\\ &= \textstyle\sum_{x=1}^{5} (x^2 - 1) \,.\, \frac{x}{15}\\ &= (1 - 1)(\tfrac{1}{15}) + (4 - 1)\,(\tfrac{2}{15}) + (9 - 1)\,(\tfrac{3}{15}) +\\ &\quad (16 - 1)\,(\tfrac{4}{15}) + (25 - 1)\,(\tfrac{5}{15})\\ &= 0 + (\tfrac{6}{15}) + (\tfrac{24}{15}) + (\tfrac{60}{15}) + (\tfrac{120}{15})\end{aligned}$$

$E(X^2 - 1) = (\frac{210}{15}) = 14$

b. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka:

$E(X(X-1)) = \sum_x x(x+1).p(x)$

$= \sum_x^5 x(x+1).\frac{x}{15}$

$= (1)(1+1)(\frac{1}{15}) + (2)(2+1)(\frac{2}{15}) + (3)(3+1)(\frac{3}{15}) +$

$(4)(4+1)(\frac{4}{15}) + (5)(5+1)(\frac{5}{15})$

$= (\frac{2}{15}) + (\frac{12}{15}) + (\frac{36}{15}) + (\frac{80}{15}) + (\frac{150}{15})$

$E(X(X-1)) = (\frac{280}{15})$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat penting dari nilai ekspektasi yang selanjutnya akan memudahkan dalam penghitungannya. Sifat–sifat ini akan dijelaskan dalam definisi dan pada pembuktiannya akan digunakan peubah acak diskrit.

Sifat –sifat nilai ekspektasi

i. *Jika c adalah sebuah konstanta,maka* $E(c) = c$.

ii. *Jika c adalah sebuah konstanta dan* $u(X)$ *adalah fungsi dari X, maka:*

$E[c.u(X)] = c.\ E[u(X)]$

iii. *Jika* c_1 *dan* c_2 *adalah dua buah konstanta dan* $u_1(X)$ *dan* $u_2(X)$ *adalah dua buah fungsi dari X, maka:*

$E[c_1.\ v_1(X) + c_2.\ u_2(X)] = c_1.\ [E(u_1(X) + c_2.\ E(u_2(X)]$

Bukti:

Misalnya X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah p(x).

i. $E(c) = \sum_x c.p(x)$

a.

$= c.\sum_x p(x)$

$= (c)(1)$

$E(c) = c$ (terbukti)

ii. $E[c.u(X)] = \sum_x c.u(x).p(x)$

$= c\sum_x u(x).p(x)$

$E[c.u(X)] = c.\ E[u(X)]$ (terbukti)

iii. $E[c_1.\ u_1(X) + c_2.\ u_2(X)] = \sum_x [c_1.\ u_1(x) + c_2.\ u_2(x)].p(x)$

$= \sum_x c_1.\ u_1(x).p(x) + \sum_x c_2.\ u_2(x).p(x)$

$= c_1\sum_x u_1(x).p(x) + c_2\sum_x u_2(x).p(x)$

$E[c_1.\ u_1(X) + c_2.\ u_2(X)] = c_1.\ [E(u_1(X) + c_2.\ E(u_2(X)]$

2. Rataan Peubah Acak Diskrit

Jika u(X) = X dalam definisi peubah acak diskrit, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak diskrit X atau rataan dari distribusi.

Definisi Rataan Peubah Acak Diskrit:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah p(x), maka rataan dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$E(X) = \sum_x x.p(x)$

Pemahaman penggunaan rumus rataan di atas diperjelas melalui contoh:

Jika Sandy mengundi sebuah dadu yang seimbang, maka tentukan rataan dari munculnya angka pada mata dadu itu.

Penyelesaian:

Misalnya peubah acak X menunjukkan munculnya angka pada mata dadu. Jadi nilai –nilai yang mungkin dari X adalah {x: x = 1, 2, 3, 4,5, 6}, dengan masing – masing nilai mempunyai peluang yang sama yaitu $\frac{1}{6}$.

Jadi: $E(X) = \sum_x x.P(x)$

$= \sum_{X=1}^{6} x.\frac{1}{6}$

$= (\frac{1}{6})\ (1+2+3+4+5+6)$

$E(X) \quad = \frac{21}{6} = 3{,}5$

Sehingga apabila ada dadu yang seimbang itu diundi terus-menerus, maka diharapkan rataan angka pada mata dadu yang akan muncul adalah 3,5.

3. Nilai Ekspektasi Peubah Acak Kontinu

Definisi Nilai Ekspektasi Peubah Acak Kontinu:

Jika X adalah peubah acak Kontinu dengan nilai fungsi densitasnya di x adalah f(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari u(X),dinotasikan dengan E[u(X)], didefinisikan sebagai:

$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x).f(x)dx$

Pemahaman penghitungan nilai ekspektasi tersebut diperjelas melalui contoh.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

f(x) $\quad = 2(1 - x);\ 0 < x < 1$

$= 0$; x lainnya

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X + 1)]$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi Kontinu, maka:

$E(X^2 - 1) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 1).f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} (x^2 - 1).f(x)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2 - 1).f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} (x^2 - 1).f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} (x^2 - 1).\,0\ dx + \int_{0}^{1} (x^2 - 1).2(1 - x)\,dx + \int_{1}^{\infty} (x^2 - 1).0\,dx$

$= 0 + 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^3 - 1 + x)\,dx + 0$

$= 2\,(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - x + \frac{1}{2}x^2\,]_{x=0}^{1})$

$= 2\,(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2})$

$E(X^2 - 1) = -\frac{5}{6}$

b. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi Kontinu, maka:

$E[X(X+1)] \quad = \int_{-\infty}^{0} (x(x+1).f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} (x(x+1).f(x)\,dx + \int_{0}^{1} (x(x+1).f(x)$

$dx +$

$\int_{1}^{\infty} (x(x+1).f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} x(x+1).\ 2(1-x)\ dx +$

$\int_{1}^{\infty} 0\,dx$

$= 2.\ (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\,]_{x=0}^{1})$

$= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$E[X(X+1)] \quad = \frac{1}{2}$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat penting dari nilai ekspektasi yang selanjutnya akan memudahkan dalam penghitungannya.

4. Rataan Peubah Acak Kontinu

Jika u(X) = X dalam definisi peubah acak Kontinu, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak Kontinu X atau rataan dari distribusi.

Definisi Peubah Acak Kontinu:

Jika X adalah peubah acak Kontinu dengan nilai fungsi densitas dari X di x adalah f(x), maka rataan dari peubah acaka X didefinisikan sebagai:

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\ d(x)$

Pemahaman penggunaan rumus rataan di atas diperjelas melalui contoh.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk:

$f(x) \quad = 20x^3 (1-x);\ 0 < x < 1$

$= 0\ ;\ x$ *lainnya*

Hitung E(X) !

Penyelesaian:

$E(X) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\ d(x)$

$= \int_{-\infty}^{0} x.f(x)\ d(x) \quad + \quad \int_{0}^{1} x\ .f(x)\ d(x) + \int_{1}^{\infty} x.f(x)\ d(x)$

$= \int_{-\infty}^{0} x\ 0\ \ d(x) + \int_{0}^{1} x\ 20x^3 (1-x)dx + \int_{1}^{\infty} x\ .0\ d(x)$

$= 0 + 20 \int_{0}^{1} (x^4 - x^5)\ dx + 0$

$= 20\ (\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6]_{x=0}^{1})$

$= 20(\frac{1}{5} - \frac{1}{6})$

$E(X) \quad = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Rataan dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun Kontinu biasanya dinotasikan dengan μ (dibaca "mu"), sehingga apabila peubah acaknya *X* maka $\mu = E(X)$.

Nilai rataan dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun Kontinu tidak selalu ada, artinya nilai rataan tersebut bisa mempunyai nilai dan bisa juga tidak mempunyai nilai. Nilai rataan dari sebuah peubah acak itu ada, jika hasil penjumlahannya atau pengintegralannya ada. Sebaliknya, nilai rataan dari sebuah peubah acak itu tidak ada, jika hasil penjumlahannya atau pengintegralannya tidak ada.

Berikut ini diberikan contoh nilai rataan dari sebuah peubah acak itu tidak ada, baik peubah acak diskrit maupun kontinu.

<u>Soal E</u>

1. Misalkan fungsi peluang dari x:

$$p(x) = \frac{x}{15};\ x = 1,2,3,4,5$$

   Hitung nilai dari:

   a. $E[(x^2+2)^2]$
   b. $E[(6x^2-1)]$

2. Misalkan fungsi peluang dari x:

$$p(x) = \frac{(|x|+1)^2}{9};x = -1,0,1$$

Hitung:

a. $E(2x^2 - 3)$

b. $E(x+1)^2$

c. $E(2x-1)$

3. Misalkan fungsi densitas dari x:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2; 0 < x < 1 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Hitunglah:

a. $E(x^2+2)^2$

b. $E(6x^2 - 1)$

4. Ditentukan fungsi densitas dari y:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(y+1); 2 < y < 4 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Hitunglah:

a. $E(y^2 - 1)$

b. $E(y^3 - 2y^2 + 2y - 1)$

5. Diketahui fungsi densitas dari x:

$$f(x) = \begin{cases} x; 0 < x < 1 \\ 2-x; 1 < x < 2 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $E(3x-4)$

b. $E(2x^2 - x + 1)$

c. $E(x^2 - 2x + 1)$

d. $E(x^2 + x - 2)$

Kunci Jawaban Soal E

1. (i) $E[(x^2+2)^2]$

$$= E[x^4 + 4x^2 + 4]$$
$$= E(x^4) + E(4x^2) + E(4)$$
$$= E(x^4) + 4 \cdot E(x^2) + 4$$

Perhatikan

- $E(x^4) = \sum_x x^4 \cdot p(x)$

$$= \sum_{x=1}^{5} x^4 \cdot \frac{x}{15}$$
$$= \sum_{x=1}^{5} \frac{1}{15} x^5$$
$$= \frac{1}{15} \sum_{x=1}^{5} x^5$$
$$= \frac{1}{15}(1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5)$$
$$= \frac{1}{15}(4425)$$
$$= 295$$

- $E(x^2) = \sum_x x^2 \cdot p(x)$

$$= \sum_{x=1}^{5} x^2 \cdot \frac{x}{15}$$
$$= \sum_{x=1}^{5} \frac{1}{15} x^3$$
$$= \frac{1}{15} \sum_{x=1}^{5} x^3$$
$$= \frac{1}{15}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)$$

$$= \frac{1}{15}(225)$$
$$= 15$$

Dengan demikian:

$$E[x^2 + 2)^2] = 295 + 15 + 4$$
$$= 314$$

(ii) $E(6x^2 - 1)$

$$= E(6x^2) - E(1)$$
$$= 6E(x^2) - 1$$

Perhatikan

- $E(x^2) = \sum_x x^2 \cdot p(x)$

$$= \sum_{x=1}^{5} x^2 \cdot \frac{x}{15}$$
$$= \sum_{x=1}^{5} \frac{1}{15} x^3$$
$$= \frac{1}{15} \sum_{x=1}^{5} x^3$$
$$= \frac{1}{15}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)$$
$$= \frac{1}{15}(225)$$
$$= 15$$

Dengan demikian:

$$E[6^2 + 1] = 6 \cdot 15 - 1$$
$$= 89$$

2. a) $E(2x^2 - 3)$

$$= E(2x^2) - E(3)$$
$$= 2E(x^2) - 3$$

Perhatikan

$$E(x^2) = \sum_x x^2 \cdot p(x)$$
$$= \sum_{x=-1}^{1} x^2 \cdot \frac{(|x| + 1)^2}{9}$$
$$= \frac{1}{9} \sum_{x=-1}^{1} x^2(|x|^2 + 2|x| + 1$$
$$= \frac{1}{9} \sum_{x=-1}^{1} x^4 + 2|x| \cdot x^2 + x^2$$
$$= \frac{1}{9}\{(1 + 2 + 1) + (0 + 0 + 0) + (1 + 2 + 1)\}$$
$$= \frac{1}{9}\{4 + 0 + 4\}$$
$$= \frac{8}{9}$$

Dengan demikian:

$$E[2x^2 - 3] = 2 \cdot \frac{8}{9} - 3$$
$$= \frac{16 - 27}{9}$$
$$= \frac{-11}{9}$$

b) $E(x + 1)^2 = E(x^2 + 2x + 1)$

$$= E(x^2) + E(2x) + E(1)$$
$$= E(x^2) + 2E(x) + 1$$

Perhatikan

- $E(x) = \sum_x x \cdot p(x)$

$$= \sum_{x=-1}^{1} x \cdot \frac{(|x|+1)^2}{9}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{x=-1}^{1} x(|x|^2 + 2|x| + 1$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{x=-1}^{1} x^3 + 2|x| \cdot x + x$$

$$= \frac{1}{9}\{(1+2+1) + (0+0+0) + (1+2+1)\}$$

$$= \frac{1}{9}\{4+0+4\}$$

$$= \frac{8}{9}$$

Dengan demikian

$$E(x+1)^2 = \frac{8}{9} + 2 \cdot 0 + 1$$

$$= \frac{17}{9}$$

c) $E(2x-1) = E(2x) - E(1)$

$$= 2E(x) - 1$$

$$= 2 \cdot 0 - 1$$

$$= -1$$

Catat: nilai $E(x) = 0$ sesuai dengan bagian b

3. (i) $E(x^2+2)^2 = E(x^4 + 4x^2 + 4)$

$$= E(x^4) + E(4x^2) + E(4)$$

$$= E(x^4) + 4E(x^2) + 4$$

Perhatikan

- $Ex^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^4 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^4 f(x)dx + \int_{1}^{\infty} x^4 f(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^1 x^4 f(x)dx + 0$$

$$= \int_0^1 x^4 \cdot 3(1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^4 \cdot 3(1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 3x^4 - 6x^5 + 3x^6 dx$$

$$= \frac{3}{5}x^5 - x^6 + \frac{3}{7}x^7 \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{5}(1^5 - 0^5) - (1^6 - 0^6) + \frac{3}{7}(1^7 - 0^7)$$

$$= \frac{3}{5} - 1 + \frac{3}{7}$$

$$= \frac{21 - 35 + 15}{35}$$

$$= \frac{1}{35}$$

- $Ex^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2 dx + 0$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2 dx$$
$$= \int_0^1 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 dx$$
$$= x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1$$
$$= (1^3 - 0^3) - \frac{3}{2}(1^3 - 0^3) + \frac{3}{5}(1^5 - 0^5)$$
$$= 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5}$$
$$= \frac{10 - 15 + 6}{10}$$
$$= \frac{1}{10}$$

Dengan demikian,

$$E(x^2+2)^2 = \frac{1}{35} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 4$$
$$= \frac{1}{35} + \frac{2}{5} + 4$$
$$= \frac{1 + 14 + 140}{35}$$
$$= \frac{155}{35}$$
$$= \frac{31}{7}$$

(ii) $E(6x^2 - 1) = E(6x^2 - E(4)$

$$= 6E(x^2) - 1$$

Perhatikan

$$Ex^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{\infty} x^2 f(x) dx$$
$$= 0 + \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2 dx + 0$$
$$= \int_0^1 x^2 \cdot 3(1-x)^2 dx$$
$$= \int_0^1 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 dx$$
$$= x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1$$
$$= (1^3 - 0^3) - \frac{3}{2}(1^4 - 0^4) + \frac{3}{5}(1^5 - 0^5)$$
$$= 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5}$$
$$= \frac{10 - 15 + 6}{10}$$
$$= \frac{1}{10}$$

Dengan demikian,

$$E(6x^2 - 1) = 6 \cdot \frac{1}{10} - 1$$
$$= \frac{6}{10} - 1$$
$$= \frac{-4}{10}$$
$$= \frac{-2}{5}$$

4. a) $E(Y^2-1) = E(Y^2) - E(1)$
$= E(Y^2) - 1$

Perhatikan:

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} y^2 f(y)dy + \int_{2}^{4} y^2 f(y)dy + \int_{4}^{\infty} y^2 f(y)dy$$
$$= 0 + \int_{2}^{4} y^2 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy + 0$$
$$= \int_{2}^{4} y^2 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy$$
$$= \frac{1}{8}\int_{2}^{4} y^3 + y^2 dy$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3)\Big|_2^4$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}(4^4 - 2^3) + \frac{1}{3}(4^3 - 2^3))$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\cdot 240 + \frac{1}{3}\cdot 56)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 30 + \frac{1}{3}\cdot 7$$
$$= \frac{90+28}{12}$$
$$= \frac{118}{12}$$
$$= \frac{59}{6}$$

Dengan demikian,

$$E(Y^2-1) = \frac{59}{6} - 1$$

$$= \frac{59-6}{6}$$
$$= \frac{53}{6}$$

b) $E(Y^3 - 2Y^2 + 2Y - 1)$
$= E(Y^3) - E(2Y^2) + E(2Y) - E(1)$
$= E(Y^3) - 2E(Y^2) + 2E(Y) - 1$

Perhatikan:

- $EY^3 = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f(y)dy$

$$= \int_{-\infty}^{2} y^3 f(y)dy + \int_{2}^{4} y^3 f(y)dy + \int_{4}^{\infty} y^3 f(y)dy$$
$$= 0 + \int_{2}^{4} y^3 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy + 0$$
$$= \int_{2}^{4} y^3 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy$$
$$= \frac{1}{8}\int_{2}^{4} y^4 + y^3 dy$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{4}y^4)\Big|_2^4$$
$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{5}(4^5 - 2^5) + \frac{1}{4}(4^4 - 2^4))$$
$$= \frac{1}{5}\cdot 124 + \frac{1}{4}\cdot 30)$$
$$= 24\frac{4}{5} + 7\frac{1}{2}$$
$$= 31 + \frac{13}{10}$$

$$= 32\frac{3}{10}$$

- $EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy$

$$= \int_{-\infty}^{2} y^2 f(y)dy + \int_{2}^{4} y^2 f(y)dy + \int_{4}^{\infty} y^2 f(y)dy$$

$$= 0 + \int_{2}^{4} y^2 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy + 0$$

$$= \int_{2}^{4} y^2 \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{2}^{4} y^3 + y^2 dy$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3)\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}(4^4 - 2^4) + \frac{1}{3}(4^3 - 2^3))$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 30 + \frac{1}{3}\cdot 7)$$

$$= 7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}$$

$$= 10\frac{5}{6}$$

- $EY = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)dy$

$$= \int_{-\infty}^{2} y\, f(y)dy + \int_{2}^{4} y\, f(y)dy + \int_{4}^{\infty} y\, f(y)dy$$

$$= 0 + \int_{2}^{4} y \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy + 0$$

$$= \int_{2}^{4} y \cdot \frac{1}{8}(y+1)dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{2}^{4} y^2 + y\ dy$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2)\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{3}(4^3 - 2^3) + \frac{1}{2}(4^2 - 2^2))$$

$$= \frac{1}{8}(\frac{1}{3}\cdot 56 + \frac{1}{2}\cdot 12)$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{28+9}{12}$$

$$= \frac{37}{12}$$

$$= 3\frac{1}{12}$$

Dengan demikian :

$$E(Y^3 - 2Y^2 + 2Y - 1) = 32\frac{3}{10} - 2\left(10\frac{5}{6}\right) + 2\left(3\frac{1}{12}\right) - 1$$

$$= 32\frac{3}{10} - 2\left(\frac{65}{6}\right) + 2\left(\frac{37}{12}\right) - 1$$

$$= \frac{323}{10} - \frac{130}{6} + \frac{37}{6} - 1$$

$$= \frac{1938 - 1300 + 370 - 60}{60}$$

$$= \frac{79}{5}$$

5\. (i) $E(3X-4) = E(3X) - E(4)$

$= 3E(X) - 4$

Perhatikan:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x\, f(x)dx + \int_{2}^{\infty} x\, f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x\, f(x)dx + 0$$

$$= \int_{0}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} 2x - x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2$$

$$= \{\frac{1}{3}(1^3 - 0^3)\} + \{(2^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3)\}$$

$$= \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3}$$

$$= \frac{1+9-7}{3}$$

$$= 1$$

Dengan demikian:

$$E(3X-4) = 3 \cdot 1 - 4$$

$$= -1$$

(ii) $E(2X^2 - X + 1) = E(2X^2) - E(X) + E(1)$

$= 2E(X^2) - E(X) + E(1)$

Perhatikan:

- $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x^2\, f(x)dx + \int_{2}^{\infty} x^2\, f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} x^2\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x^2\, f(x)dx + 0$$

$$= \int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{1}^{2} 2x^2 - x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_1^2$$

$$= \{\frac{1}{4}(1^4 - 0^4)\} + \{(2^3 - 1^3) - \frac{1}{4}(2^4 - 1^4)\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4}$$

$$= \frac{3+56-45}{12}$$

$$= \frac{14}{12}$$

$$= \frac{7}{6}$$

Dengan demikian:

$$E(2X^2 - X + 1) = 2 \cdot \frac{7}{6} - 1 + 1$$

$$= \frac{14}{6}$$
$$= \frac{7}{3}$$

(iii) $E(X^2 - 2X + 1) = E(X^2) - E(2X) + E(1)$

$$= E(X^2) - 2E(X) + 1$$
$$= \frac{7}{6} - 2 \cdot 1 + 1$$
$$= \frac{1}{6}$$

(iv) $E(X^2 + X - 2) = E(X^2) + E(X) - E(2)$

$$= E(X^2) + E(X) - 2$$
$$= \frac{7}{6} + 1 - 2$$
$$= \frac{7}{6} - 1$$
$$= \frac{1}{6}$$

Referensi

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

VARIANSII, MOMEM, DAN FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

1. Variansii dari peubah acak diskrit

Definisi variansii dari peubah acak diskrit:

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka variansi dari X didefinisikan sebagai:

$Var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 . p(x)$

Pemahaman menggunakan rumus variansii diskrit di atas diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya distribusi peluang dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

X	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Hitung Var(X).

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi variansi diskrit, maka:

Var(X) $= \sum_x (x - \mu)^2 . p(x)$

dengan μ $= E(X) = \sum_x x.p(x)$

$= \sum_{x=1}^{3} x.p(x)$

$= (1).p(1) + (2).p(2) + (3).p(3)$

$= (1)\ (\frac{1}{2}) + (2)\ (\frac{1}{3}) + (3)\ (\frac{1}{6})$

$\mu = E(X) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Jadi, $Var(X) = \sum_x (x - \frac{5}{3})^2 . p(x)$

$= (1 - \frac{5}{3})^2 . p(1) + (2 - \frac{5}{3})^2 . p(2) + (3 - \frac{5}{3})^2 . p(3)$

$= (\frac{4}{9})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{9})(\frac{1}{3}) + (\frac{16}{9})(\frac{1}{6})$

$= (\frac{2}{9}) + (\frac{1}{27}) + (\frac{8}{27})$

$Var(X) = (\frac{15}{27}) = (\frac{5}{9})$

2. Fungsi Pembangkit Momen Peubah Acak Diskrit

Definisi fungsi pembangkit momen peubah diskrit:

Jika X peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$M_x(t) = \sum_x e^{tx} . p(x)$

Peubah acak diskrit adalah peubah acak yang ruang sampelnya dapat dihitung dan terbatas. Misalkan barang rusak, angka dadu yang keluar, koin yang muncul. Semuanya terbatas, barang rusak terbatas pada banyak barang yang diproduksi saja, dadu terbatas hasilnya 1 sampai 6 saja.

Peubah acak diskrit memiliki fungsi massa peluang atau disebut pmf (*probability mass function*), pmf dari sebuah peubah acak adalah:

$$p_X(x) = P(X = x), x \in D$$

Maksudnya pmf adalah peluang bahwa peubah acak akan bernilai dengan D adalah himpunan kejadian yang mungkin.

Dan jika dijumlahkan peluang semua kejadian yang mungkin akan sama dengan 1:

$$P_X(x) = \sum_{x \in D} P_X(x) = 1$$

Dan juga nilai peluang pmf selalu:

$$0 \leq P_X(x) \leq 1$$

Lalu yang dimaksud dengan fungsi distribusi atau cdf untuk peubah acak diskrit adalah:

$$P_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i}^{x} P_X(i)$$

Dengan

$$i \leq x, i \in D$$

3. Variansii dari Peubah Acak Kontinu

Definisi

Jika X adalah peubah acak Kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka variansi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^2 . f(x)\, dx$

Pemahaman penggunaan rumus variansi Kontinu diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk:

$f(x) = e^{-x}$; $x > 0$

$= 0$; x lainnya.

Hitung $Var(X)$!

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi variansi Kontinu, maka:

Var(X) $= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 .f(x)\, dx$

dengan : μ $=E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x .f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x .f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x .f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\, dx$

$= 0 + \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\, dx$

$= -xe^{-x} \;|_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx$

$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x} . dx$

$= \lim\limits_{b\to\infty} (-x . e^{-x}]_{x=0}^{b} + \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx)$

$= \lim\limits_{b\to\infty} (-b. e^{-b} + 1 - e^{-b})$

$= \lim\limits_{b\to\infty} -b. e^{-b} + 1 - \lim\limits_{b\to\infty} e^{-b}$

$\mu = 0 + 1 - 0 = 1$

Jadi

$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 .f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} (x-1)^2 .f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} (x-1)^2 .f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} (x-1)^2 .\, 0\, dx + \int_{0}^{\infty} (x-1)^2 .e^{-x}\, dx$

$= 0 + \int_{0}^{\infty} (x^2 - 2x + 1) .\ e^{-x}\, dx$

$= \lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} (x^2 - 2x + 1) .\ e^{-x}\, dx$

$= \lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2 .\ e^{-x}\, dx - 2 . \lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x .\ e^{-x}\, dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx$

Penyelesaian di atas akan diselesaikan satu persatu.

i. $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2 .\ e^{-x}\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} [-b^2 .e^{-b} + 2(-b . e^{-b} + 1 - e^{-b})]$

$= \lim\limits_{b\to\infty} -b^2 .e^{-b} - 2. \lim\limits_{b\to\infty} .b .e^{-b} + \lim\limits_{b\to\infty} 2 - 2. \lim\limits_{b\to\infty} e^{-b}$

$= 0 - (2)(0) + (2)(1) - (2)(0)$

$= 0 - 0 + 2 - 0$

$\lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2 .\ e^{-x}\, dx = 2$

ii. $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x . e\text{-}x\, dx$ = 1 (Lihat penghitungan μ pada halaman sebelumnya)

iii. $\lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} (e^{-x}])$

$= \lim\limits_{b\to\infty} (1 - e^{-b})$

$= \lim\limits_{b\to\infty} 1 - \lim\limits_{b\to\infty} e^{-b}$

$= 1 - 0$

$\lim\limits_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\, dx = 1$

Jadi $\mathrm{Var}(X) = 2 - (2)(1) + 1 = 1$

Jika kita menguraikan lebih lanjut perumusan variansi dalam definisi variansi, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut.

Var(X) $= E(X - \mu)^2$

$= E(X^2 - 2.\mu X + \mu^2)$

$= E(X^2) - 2.\mu.\ E(X) + \mu^2$

$= E(X^2) - 2.\mu.\ \mu + \mu^2$

$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2$

Jadi $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2$

atau Var(X) = E(X)2 – [E(X)]2

Dengan demikian, perhitungan variansi dari sebuah peubah acak dapat dilakukan dengan dua rumus, yaitu:

a. Perumusan variansi berdasarkan fungsi peluang atau fungsi densitas.
   Perumusan variansi dari peubah acak diskrit bisa dilihat dalam definisi variansi diskrit dan perumusan variansi dari peubah acak Kontinu.
b. Perumusan variansi berdasarkan penguraian lebih lanjut dari rumus variansi. Dalam hal ini, penghitungan variansinya berlaku untuk peubah acak diskrit dan Kontinu.
   Berikut ini akan dijelaskan beberapa sifat dari variansi.

Dalil 1:

Jika c adalah sebuah konstanta, maka $Var(c) = 0$

Bukti:

Berdasarkan definisi dari perumusan variansi,maka:

$Var(c) = E\,[c - E(c)]^2$

$= E(c - c)^2$

$= E\,(0)$

$Var(c) = 0$ *(terbukti)*

Dalil 2:

Jika X adalah peubah acak dan adalah sebuah konstanta, maka:

$Var(X + c) = Var(X)$

Bukti:

Berdasarkan definisi dari perumusan variansi,maka:

$Var\,(X + c) = E[(X + c) - E(X + c)^2]$

$= E[X + c - E(X) - E(c)]^2$

$= E[X + c - E(X) - c]^2$

$= E[X - E(X)]^2$

$Var\,(X + c) = Var(X)$ *(terbukti)*

Dalil 3:

Jika a dan b adalah dua buah konstanta dan X adalah peubah acak, maka:

$Var(aX+b) = a^2\,.\,Var(X)$

Bukti:

Berdasarkan definisi dari perumusan variansi, maka:

$Var(aX+b) = E[aX + b) - E(aX + b)]^2$

$= E[aX + b) - E(aX - E(b)]^2$

$= E[aX + b - a\,.\,E(X) - b]^2$

$= E[aX - a\,.\,E(X)]^2$

$= a^2\,.\,E[X - E(X)]^2$

$Var(aX+b) = a^2\,.\,Var(X)$ *(terbukti)*

Berikut ini akan diberikan contoh penggunaan sifat-sifat variansi di atas.

Misalnya Farah mengundi sebuah dadu yang seimbang. Jika peubah acak X menyatakan kuadrat dari munculnya angka pada mata dadu,maka hitunglah

a. Var (2X)
b. Var (1/2X – 1)

Penyelesaian:

Distribusi peluang dari X berbentuk:

X	1	4	9	16	25	36
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Berdasarkan definisi rataan diskrit,maka:

i. E(X) $= \sum_x p(x)$

$=(1)(\frac{1}{6}) + (4)(\frac{1}{6}) + (9)(\frac{1}{6}) + (16)(\frac{1}{6}) + (25)(\frac{1}{6}) + (36)(\frac{1}{6})$

$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6}$

E(X) $= \frac{91}{6}$

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit,maka:

ii. E(X^2) $= \sum_x x^2$. p(x)

$= (1)(\frac{1}{6}) + (16)(\frac{1}{6}) + (81)(\frac{1}{6}) + (16)(\frac{1}{6}) + (625)(\frac{1}{6})$

$+(1296)(\frac{1}{6})$

$= \frac{1}{6} + \frac{16}{6} + \frac{81}{6} + \frac{196}{6} + \frac{625}{6} + \frac{1296}{6}$

E(X^2) $= \frac{2215}{6}$

Maka Var(X) $= \frac{2215}{6} - \frac{8281}{36} = \frac{5009}{6}$

a. Var(2X) = 4. Var(X)

$= (4)(\frac{5009}{36})$

b. Var(2X) $= \frac{5009}{9}$

c. Var(1/2X – 1) = ¼ . Var(X)

$= (1/4)(\frac{5009}{36})$

Var(1/2X – 1) $= \frac{5009}{144}$

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk:

$g(x) = 1; 0 < x < 1$

$= 0$; x lainnya

Hitung Var(3X) dan Var(2X+10).

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi rataan kontinu, maka:

i. E(X) $= \int_{-\infty}^{\infty} x.g(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x.g(x)\,dx + \int_{0}^{1} x.g(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x.g(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x.0\,dx + \int_{0}^{1} x.1\,dx + \int_{1}^{\infty} x.0\,dx$

$= 0 + \frac{1}{2}x^2\,]_{x=0}^{1} + 0$

E(X) $= \frac{1}{2}$

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi kontinu, maka:

ii. E(X^2) $= \int_{-\infty}^{\infty} x^2.\,g(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x^2.\ g(x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2.\ g(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2.$
$g(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x^2.\,0\,dx + \int_{0}^{1} x^2.\,1\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2.\,0\,dx$

$= 0 + \frac{1}{3}x^3\,]_{x=0}^{1} + 0$

E(X^2) $= \frac{1}{3}$

Jadi, Var(X) = E(X^2) – [E(X^2)]

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Var(*X*) $= \frac{1}{12}$

iii. Sehingga:

Var(3X) = 9. Var(X)

$= (9).\ (\frac{1}{12})$

Var(3X) $= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Var(2X+10) = Var(2X)

= 4 . Var(X)

$=(4)\ .\ (\frac{1}{12})$

Var(2X+10) $= \frac{1}{3}$

4. Fungsi Pembangkit Momen Peubah Acak Kontinu

Definis fungsi pembangkit momen peubah acak kontinu

Jika X adalah peubah acak Kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x,maka fungsi pembangkit momen dari x didefinisikan sebagai :

$M_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)\ dx$

<u>Soal F</u>

1. Diketahui peluang dari x:

$$P(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$$

Tentukan:

a. Var (x)

b. μ_3'

c. μ_3

2. Diketahui fungsi densitas dari X:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x); 0 < x < 1 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. Var (x)

b. μ_3'

c. μ_3

3. Misalkan fungsi peluang dari x:

$$P(x) = 2(\frac{1}{3})^x; x = 1,2,3, \ldots$$

Tentukan $M_x(t)$

4. Misalkan fungsi peluang dari x:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1); 2 < x < 4 \\ 0; Lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $M_x(t)$

b. $E(x)$

5. Diketahui fungsi peluang dari x :

$$P(x) = \frac{|x-2|}{7}; x = -1,0,1,3$$

Tentukan:

a. $M_x(t)$

b. $E(x)$

Kunci Jawaban Soal F

1. (i) $\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$

   Perhatikan

   - $E(X^2) = \sum_x x^2\, p(x)$

     $= \sum_{x=1}^{5} x^2 \cdot \frac{x}{15}$

     $= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x^3 \cdot$

     $= \frac{1}{15}(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)$

     $= \frac{1}{15}(1 + 8 + 27 + 64 + 125)$

     $= \frac{1}{15} \cdot 225$

     $= 15$

   - $E(X) = \sum_x x\,p(x)$

     $= \sum_{x=1}^{5} x \cdot \frac{x}{15}$

     $= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x^2 \cdot$

     $= \frac{1}{15}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

     $= \frac{1}{15}(1 + 4 + 9 + 16 + 25)$

     $= \frac{1}{15} \cdot 55$

$= \frac{11}{3}$

Dengan demikian:

$\text{Var}\ (x) = 15 - (\frac{11}{3})^2$

$= 15 - \frac{121}{9}$

$= \frac{135 - 121}{9}$

$= \frac{14}{9}$

(ii) $\mu_3' = \sum_x x^3\, P(x)$

$= \sum_{x=1}^{5} x^3 \cdot \frac{x}{15}$

$= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x^4 \cdot$

$= \frac{1}{15}(1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4)$

$= \frac{1}{15}(1 + 16 + 81 + 256 + 625)$

$= \frac{1}{15} \cdot 979$

$= \frac{979}{15}$

(iii) $\mu_3 = \sum_x (x-\mu)^3\, P(x)$

$= \sum_{x=1}^{5} (x-\mu)^3 \cdot \frac{x}{15}$

Perhatikan:

$\mu = EX$

$$= \sum_x x\,P(x)$$
$$= \sum_{x=1}^{5} x \cdot \frac{x}{15}$$
$$= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x^2$$
$$= \frac{1}{15}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$
$$= \frac{1}{15}(1 + 4 + 9 + 16 + 25)$$
$$= \frac{1}{15} \cdot 55$$
$$= \frac{11}{3}$$

Selanjutnya:

$$\mu_3 = \sum_x (x-\mu)^3 P(x)$$
$$= \sum_{x=1}^{5} (x-\mu)^3 \cdot \frac{x}{15}$$
$$= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{5} x\,(x - \frac{11}{3})^3$$
$$= (\frac{1}{15})(\frac{1}{27})\sum_{x=1}^{5} x\,(x - 11)^3$$

$$= \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{27}\right)\{(1(3-11)^3 + (2(6-11)^3 + (3(9 - 11)^3 + (4(12-11)^3 + (5(15 - 11)^3\}$$
$$= \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{27}\right)\{-512 - 250 - 24 + 4 + 320\}$$
$$= \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{27}\right)\{-462\}$$
$$= \frac{-154}{135}$$

2. (i) Var$(x) = E(X^2) - (EX)^2$\

   Perhatikan:

   - $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_0^1 x^2\, f(x)dx + \int_1^{\infty} x^2\, f(x)dx$$
$$= 0 + \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx + 0$$
$$= \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx$$
$$= 6\int_0^1 x^3 - x^4\, dx$$
$$= 6\{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1$$
$$= 6\{\frac{1}{4}(1^4 - 0^4) - \frac{1}{5}(1^5 - 0^5)\}$$
$$= 6\{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\}$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{20}$$

$$= \frac{3}{10}$$

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{\infty} x\, f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} x \cdot 6x(1-x)dx + 0$$

$$= \int_{0}^{1} x \cdot 6x(1-x)dx$$

$$= 6\int_{0}^{1} x^2 - x^3\, dx$$

$$= 6\{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1$$

$$= 6\{\frac{1}{3}(1^3 - 0^3) - \frac{1}{4}(1^4 - 0^4)\}$$

$$= 6\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Selanjutnya

$$\text{Var}\,(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

$$= \frac{3}{10} - (\frac{1}{2})^2$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12-10}{40}$$

$$= \frac{2}{40}$$

$$= \frac{1}{20}$$

(ii) $\mu_3' = \int_{-\infty}^{\infty} x^3\, f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^3\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x^3\, f(x)dx + \int_{1}^{\infty} x^3\, f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} x^3 \cdot 6x(1-x)dx + 0$$

$$= \int_{0}^{1} x^3 \cdot 6x(1-x)dx$$

$$= 6\int_{0}^{1} x^4 - x^5\, dx$$

$$= 6\{\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \Big|_0^1$$

$$= 6\{\frac{1}{5}(1^5 - 0^5) - \frac{1}{6}(1^6 - 0^6)\}$$

$$= 6\{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{5}$$

(iii) $\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x-\mu)^3\, f(x)dx + \int_{0}^{1} (x-\mu)^3\, f(x)dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} (x-\mu)^3\, f(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^1 (x-\mu)^3 f(x)dx + 0$$
$$= \int_0^1 (x-\mu)^3 f(x)dx$$

Perhatikan:

$$\mu = EX$$
$$= \int_0^1 x\, f(x)dx$$
$$= \int_0^1 x \cdot 6x \cdot (1-x)dx$$
$$= 6\int_0^1 x^2 - x^3\, dx$$
$$= 6\{\frac{1}{3}(1^3 - 0^3) - \frac{1}{4}(1^4 - 0^4)\}$$
$$= 6\{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\}$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Selanjutnya,

$$\mu_3 = \int_0^1 (x-\mu)^3 f(x)dx$$
$$= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx$$
$$= 6\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot x(1-x)dx$$

$$= 6\int_0^1 \frac{1}{8} \cdot x(1-x)(2x-1)^3 dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x(1-x)(2x-1)^3 dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x(1-x)(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x(-8x^4 + 20x^3 - 18x^2 + 7x - 1)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x(-8x^5 + 20x^4 - 18x^3 + 7x^2 - x)dx$$
$$= \frac{3}{4}(-\frac{8}{6}x^6 + \frac{20}{5}x^5 - \frac{18}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2})\Big|_0^1$$
$$= \frac{3}{4}(-\frac{8}{6} + \frac{20}{5} - \frac{18}{4} + \frac{7}{3} - \frac{1}{2})$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{6}$$
$$= \frac{7}{4}$$

3. $M_X(t) = \sum_x e^{tx} \cdot P(x)$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot 2(\frac{1}{3})^x$$
$$= \sum_{x=1}^{\infty} 2(\frac{e^t}{3})^x$$
$$= 2(\left(\frac{e^t}{3}\right) + (\frac{e^t}{3})^2 + ..)$$

$$= 2\left(\frac{\frac{e^t}{3}}{1-\frac{e^t}{3}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^t}{3-e^t}\right) \qquad ; t \in R$$

Referensi

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

EKSPEKTASI DAN RATAAN GABUNGAN

1. Ekpektasi Gabungan Peubah Acak Diskrit

Definisi Ekpektasi Gabungan Peubah Acak Diskrit:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari (X,Y) di (x,y) dan v(X,Y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y; maka nilai ekspektasi gabungan dari v(X,Y) (dinotasikan dengan E[v(X,Y)] dirumuskan sebagai:

$E[v(X,Y)] = \sum_x \sum_y v(x,y).p(x,y)$

Pemahaman penghitungan nilai ekspektasi gabungan diskrit tersebut diperjelas melalui contoh.

Contoh:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$p(x,y) = (\frac{1}{72})(x+2y);\qquad x=0,1,2,3$

$\qquad y=0,1,2,3$

hitung $E(2XY^2 - 1)$

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi gabungan diskrit,maka:

$E(2XY^2 - 1) = \sum_x \sum_y (2xy^2 - 1) . p(x,y)$

$= \sum_{x=0}^{3} \sum_{x=0}^{3} (2xy^2 - 1) . (\frac{1}{72})(x+2y)$

$= (\frac{1}{72})[(-1)(0) + (-1)(2) + (-1)(4) + (-1)(6) + (-1)(1) + (1)(3) + (7)(5) + (17)(7) + (-1)(2) + (3)(4) + (15)(6) + (35)(8) + (-1)(3) + (5)(5) + (23)(7) + (53)(9)]$

$= (\frac{1}{72})(0-2-4-6-1+1+3+35+119-2+12+90+280-3+25+161+477)$

$E(2XY^2-1) \quad = \frac{1184}{72}$

2. Ekpektasi Bersyarat Peubah Acak Diskrit dan Rataan Bersyarat

Definisi ekspektasi bersyarat peubah acak diskrit:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x\|y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan p''(y\|x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y= y dirumuskan sebagai berikut.

$E[u(X)\backslash y] = \sum_x u(x).p'(x\backslash y)$

Dan ekspektasi bersyarat dari v(Y) diberikan X=x dirumuskan sebagai berikut.

$E[v(Y)\backslash x] = \sum_y v(x).p''(y\backslash x)$

Penentuan ekspektasi bersyarat diskrit di atas diperjelas melalui contoh berikut:

Contoh:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$p(x,y) = \frac{xy}{18}$; $x = 1, 2, 3$ dan $y = 1,2$

hitung $E(3X|y = 1)$ dan $E(2Y^2|x = 1)$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi ekspektasi bersyarat diskrit, maka:

$E(3X|y = 1) = \sum_x 3x.p'(x \mid y)$

Fungsi peluang marginal dari Y adalah:

$P_2(y) \quad = \sum_{x=1}^{3} \frac{xy}{18}$

$= (\frac{y}{18})\ (1+2+3)$

$= \frac{6y}{18}$

Jadi, $P_2(y) \quad = \frac{y}{3}$; $y = 1,2$

Fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y = y$ adalah:

$p'(x \mid y) = \frac{\frac{xy}{18}}{\frac{y}{3}} = \frac{x}{6}$; $x = 1, 2, 3$

Maka:

$E(3X|y = 1) \quad = \sum_{x=1}^{3} (3x)(\frac{x}{6})$

$= (\frac{1}{2})\ (1+4+9)$

$E(3X|y = 1) \quad = 7$

b. Berdasarkan definisi ekspektasi bersyarat diskrit, maka:

$E(2Y^2|x = 1) = \sum_y 2y^2\ .p''(y\backslash x = 1)$

Fungsi peluang marginal dari X adalah:

$P_1(x) \quad = \sum_{x=1}^{2} \frac{xy}{18}$

$= (\frac{xy}{18})\ (1+2)$

$= \frac{3x}{18}$

Jadi: $P_1(x) = \frac{x}{6}$; $x = 1, 2, 3$

Fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X = x$ adalah:

$p'(y \mid x) = \frac{\frac{x}{18}}{\frac{x}{6}} = \frac{y}{3}$; $y = 1, 2$

Maka:

$E(2Y^2|x=1) = \sum_{y=1}^{2} 2y^2 \cdot \frac{y}{3}$

$= (\frac{2}{3})(1+8)$

$E(2Y^2|x=1) = 6$

3. Ekspektasi Gabungan Peubah Acak Kontinu dan Rataan Bersyarat Peubah Acak Kontinu

   Definisi nilai ekspektasi gabungan Kontinu:

   Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x,y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari (X,Y) di (x,y) dan v(X,Y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y;maka nilai ekspektasi gabungan dari v(X,Y) (dinotasikan dengan E[v(X,Y)] dirumuskan sebagai:

   $E[v(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y).f(x,y)dx\,dy$

   Pemahaman penghitungan nilai ekspektasi gabungan Kontinu tersebut diperjelas melalui contoh berikut.

   Contoh:

   Misalnya densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

   $f(x,y) = x + y ; 0 < x < 1, 0 < y < 1$

   $= 0 ; x, y$ lainnya.

Hitung $E(2XY^2 - 1)$.

Penyelesaian:

$E(2XY^2 - 1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(2xy^2 - 1) . f(x,y)dx\,dy$

$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}(2xy^2 - 1). f(x,y)dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(2xy^2 - 1) . f(x,y)dx\,dy + \int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}(2xy^2 - 1) . f(x,y)dx\,dy$

$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}(2xy^2 - 1).0\,dy + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(2xy^2 - 1) . x + y\,dx\,dy + \int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}(2xy^2 - 1) . 0\,dx\,dy$

$=0 + \int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}(2x^2y^2 + 2xy^3 - x - y)\,dx\,dy + 0$

$=\int_{0}^{1}(\frac{2}{3}2x^2y^2 + x^2y^3 = \frac{1}{2}x^2 - xy]_{x=0}^{1})\,dy$

$= \int_{0}^{1}(\frac{2}{3}y^2 + y^3 - 12 - y)\,dy$

$= \frac{2}{9}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2]$

$= \frac{2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$E(2XY^2 - 1) = -\frac{19}{36}$

4. Ekspektasi Bersyarat Peubah Acak Kontinu

   Definisi ekspektasi bersyarat peubah acak Kontinu:

   Jika X dan Y adalah dua peubah acak Kontinu, g(x|y) adalah nilai fungsi densitas bersyaratdari X diberikan Y=y di x,dan h(y|x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut.

   $E[u(X) / y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x).g(x|y)\,dx$

   Dan ekspektasi bersyarat dari v (Y) diberikan X=x dirumuskan sebagai berikut.

$E[v(Y)\ /x] = \int_{-\infty}^{\infty} v(y).h(y/x)dy$

Penentuan ekspektasi bersyarat Kontinu di atas diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

$f(x,y) \quad = (\frac{3}{4})\ xy^2;\ 0 < x < 2$ dan $1 < y < 2$

$= 0$; x,y lainnya

Hitung $E(3X|y=1)$ dan $E(2Y|x=1)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi ekspektasi bersyarat kontinu, maka:

$E(3X|y=1) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} 3x.g(x\ /y)\ dx$

Fungsi densitas marginal dari Y adalah :

$f_2(y) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

<u>Soal G</u>

1. Misalkan fungsi peluang gabungan dari x dan y:

$$P(x,y) = \frac{1}{30}(x+y); x = 0,1,2,3, y = 0,1,2$$

Hitunglah:

a. $E(2x^2y - 3xy + 1)$

b. $E(2xy^2 + xy - y + 2)$

c. $E(3x^2|y)$

d. $E(2y^2|x)$

e. $E(x|y)$

f. $E(y|x)$

2. Misalkan diketahui peluang gabungan dari x dan y

x \ y	1	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$

Hitunglah:

a. $E(2x^2y - 3xy + 1)$

b. $E(2xy^2 + xy - y + 2)$

c. $E(3x^2|y)$

d. $E(2y^2|x)$

e. $E(x|y)$

f. $E(y|x)$

3. Misalkan x dan y adalah peubah acak yang saling bebas dan masing-masing mempunyai fungsi densitas sebagai berikut:

$$f_x(y) = \begin{cases} 6x(1-x); 0 < x < 1 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

$$f_y(x) = \begin{cases} 2y; 0 < y < 1 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Hitunglah:

a. $E(2x^2y - 3xy + 1)$

b. $E(2xy^2 + xy - y + 2)$

c. $E(3x^2|y)$

d. $E(2y^2|x)$
e. $E(x|y)$
f. $E(y|x)$

4. Diketahui fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}; 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Hitunglah:
a. $E(x)$
b. $E(y)$
c. $E(x|y)$
d. $E(y|x)$

5. Diketahui fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$h(x,y) = \begin{cases} xye^{-\mu-y}; x > 0, y > 0 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Tentukan:
a. $E(x)$
b. $E(y)$
c. $E(x|y)$
d. $E(y|x)$

Kunci jawaban soal G

1. a) E $(2x^2y - 3xy + 1)$
$= \text{E}\ (2x^2y) - E\ (\ 3xy\ ) + \ E\ (1)$
$= 2\ \text{E}\ (2x^2y - 3E\ (xy) + 1$
$= 2\ E\ (x^2y\ ) - 3E\ (xy) + 1)$

Perhatikan :
E $(x^2y) = \sum_y \sum_x x^2y\ p\ (x,y)$

$= \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} x^2\,y\ .\frac{1}{30}\ (x+y)$
$= \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{30}\ .\,x^2\ y\ (x+y)$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ 0\ (\ 0+y\ ) + y\ (1+y) + 4y(2+y) +$
$9y\ (\ 3+y\ \}$
$=\sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ y + y^2 + 8y + 4y^2 + 27y + \ 9y^2\ \}$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ 36y + 14y^2\ \}$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{15}\ .\,y\ (\ 18y + 7y\ )$
$= \frac{1}{15}\ \{0\ (\ 18+0\ ) + 1\ (\ 18+7\ ) + 2\ (\ 18+14\ )\ \}$
$= \ \frac{1}{15}\ \{0 + 25 + 64\ \}$
$= \frac{1}{15}\ .\ 89$
$= \frac{89}{15}$

E $x\ y = \ \sum_y \sum_x xy\ p\ (x,y)$
$= \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} x^2\,y\ .\frac{1}{30}\ (x+y)$
$= \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{30}\ xy\ (x+y)$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ 0\ (\ 0+y\ ) + y\ (1+y) + 2y(2+y) +$
$3y\ (\ 3+y\ \}$
$=\sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ 0 + y + y^2 + 4y + 2y^2 + 9y + \ 3y^2\ \}$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30}\ \{\ 14y + 6y^2\ \}$
$= \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{15}\ (\ 7y + 3y^2\ )$
$= \frac{1}{15}\ \{(\ 0+0\ ) + (\ 7+3\ ) + (\ 14+12\ )\ \}$

$= \frac{1}{15}(10 + 26)$

$= \frac{36}{15}$

Dengan demikian,

$E (2x^2y - 3xy + 1) = 2 . \left(\frac{89}{15}\right) - 3 \left(\frac{36}{15}\right) + 1$

$= \frac{178}{15} - \frac{108}{15} + \frac{15}{15}$

$= \frac{17}{3}$

b) $E (2xy^2 + xy - y + 2) = E (2xy^2 + E (xy) - E (y + 2)$

$= 2 E (xy^2) + E (xy) - E (y + 2)$

Perhatikan :

$E y = \sum_y y\, p_y (y)$

$p_y (y)$ adalah fungsi densitas marginal dari y diperoleh dengan cara :

$p_y (y) = \sum_x p (x,y)$

$= \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{30} (x + y)$

$= \frac{1}{30} + \{(0 + y) + (1 + y) + (2 + y) + (3 + y)\}$

$= \frac{1}{30} \{ 6 + 4y\}$

$= \frac{1}{15} (3 + 2y)$

Dengan nilai $p_y (y)$, maka E Y dapat dihitung :

$E y = \sum_y y\, p_y (y)$

$= \sum_{y=0}^{2} y \cdot \frac{1}{15} (3 + 2y)$

$= \frac{1}{15} \sum_{y=0}^{2} y (3 + 2y)$

$= \frac{1}{15} \{0 (3 + 0) + 1(3 + 2) + 2(3 + 4) \}$

$= \frac{1}{15} \{ 5 + 14\}$

$= \frac{19}{15}$

$E\, x\, y^2 = \sum_y \sum_x xy^2\, p (x, y)$

$= \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} xy^2 \cdot \frac{1}{30} (x + y)$

$= \frac{1}{30} \sum_{y=0}^{2} \sum_{x=0}^{3} xy^2 (x + y)$

$= \frac{1}{30} \sum_{y=0}^{2} \frac{1}{30} \{ 0 (0 + y) + y^2(1 + y) + 2y^2(2 + y) + 3y^2 (3 + y)\}$

$= \frac{1}{30} \sum_{y=0}^{2} \{ 0 + y^2 + y^3 + 4y^2 + 2y^3 + 9^2 + 3y^3 \}$

$= \frac{1}{30} \sum_{y=0}^{2} \{ 14y^2 + 6y^3 \}$

$= \frac{1}{15} \sum_{y=0}^{2} y^2(7 + 3y)$

$= \frac{1}{15} \{0 (7 + 0) + 1 (7 + 3) + 4 (7 + 6) \}$

$= \frac{1}{15} (0 + 10 + 52)$

$= \frac{62}{15}$

Dengan demikian,

$E (2xy^2 + xy - y + 2) = 2 . \left(\frac{62}{15}\right) + \left(\frac{36}{15}\right) - \frac{19}{15} + 2$

$= \frac{124 + 36 - 19 + 30}{15}$

$= \frac{171}{15}$

2. $E (2 x^2 y - 3 x + 1) = E (2 x^2 y) - E (3 xy) + E (1)$

$= 2 E (x^2 y) - 3 E (xy) + 1$

Penyelesaian :

- $E (x^2y) = \sum_y \sum_x x^2 y\, p(x, y)$

  $= \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{4} x^2 y\, p(x, y)$

$= \sum_{y=1}^{2}\{yp(1,y) + 4yp(2,y) + 9yp(3,y) + 16yp(4,y)\}$

$= \{1p(1,1) + 4p(2,1) + 9p(3,1) + 16p(4,1)\} + \{2p(1,2) + 8p(2,2) + 18p(3,2) + 32p(4,2)\}$

$= \left\{1.\frac{1}{8} + 4.\frac{1}{16} + 9.\frac{1}{8} + 18.\frac{3}{16}\right\} + \left\{2.\frac{1}{16} + 8.\frac{1}{16} + 18.\frac{1}{8} + 32.\frac{1}{4}\right\}$

$= \left\{\frac{10}{8} + \frac{52}{16}\right\} + \left\{\frac{10}{16} + \frac{82}{8}\right\}$

$= \frac{20+52+10+164}{18}$

$= \frac{246}{18}$

$= \frac{123}{9}$

- E xy $= \sum_y \sum_x xy\ p(x,y)$

$= \sum_{y=1}^{2} \sum_{x=1}^{4} xy\ p(x,y)$

$= \sum_{y=1}^{2}\{yp(1,y) + 2yp(2,y) + 3yp(3,y) + 4yp(4,y)\}$

$= \{1p(1,2) + 4p(2,2) + 6p(3,2) + 8p(4,2)\} + \{2p(1,2) + 4p(2,2) + 6p(3,2) + 8p(4,2)\}$

$= \left\{1.\frac{1}{8} + 2.\frac{1}{16} + 3.\frac{1}{8} + 4.\frac{3}{16}\right\} + \left\{2.\frac{1}{16} + 4.\frac{1}{16} + 6.\frac{1}{8} + 8.\frac{1}{4}\right\}$

$= \left\{\frac{4}{8} + \frac{14}{16}\right\} + \left\{\frac{6}{16} + \frac{22}{8}\right\}$

$= \frac{20}{16} + \frac{26}{8}$

$= \frac{20+52}{16}$

$= \frac{72}{16}$

$= \frac{9}{2}$

Dengan demikian,

$E\,(2x^2y - 3xy + 1) = 2\left(\frac{123}{9}\right) - 2\left(\frac{9}{2}\right) + 1$

$= \frac{492-243+18}{18}$

$= \frac{267}{18}$

Referensi

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

MOMEN DAN FUNGSI PEMBANGKIT GABUNGAN

1. Momen Sekitar Rataan Peubah Diskrit

   Definisi momen sekitar rataan peubah diskrit:

   Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang adari X di x, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k) dinotasikan sebagai :

   $\mu_k = \sum_x (x-\mu)^k . p(x)$

   Pemahaman penggunaan rumus momen sekitar rataan diskrit diperjelas melalui contoh berikut.

   Contoh:

   Misalnya fungsi peluang dari X berbentuk

   $p(x) = \frac{1}{3}; x = 1,2,3$

   hitung μ_3

   penyelesaian:

   Berdasarkan definisi momen sekitar rataan diskrit, maka:

   $\mu_3 = \sum_x (x-\mu)^3 \, p(x)$

   Kita akan menghitung dahulu nilai μ

   Berdasarkan definisi rataan diskrit,maka:

   $\mu = E(X) \quad = \sum_x x.p(x)$

   $= \sum_{x=1}^{3} x.\frac{1}{3}$

   $= (\frac{1}{3})\,(1+2+3)$

   $\mu = E(X) \quad = 2$

   Jadi:

$\mu_3 = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^3 . \frac{1}{3}$

$= (\frac{1}{3})[(1-2)^3 + (2-2)^3 + (3-2)^3]$

$= (\frac{1}{3})(-1 + 0 + 1)$

$\mu_3 = 0$

2. Variansii Bersyarat Peubah Acak Diskrit

   Definisi variansii Bersyarat Peubah Acak Diskrit:

   Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x / y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y=y di x, dan p'' (y/ x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X=x di y, maka variansi bersyarat dari X diberikan Y=y dirumuskan sebagai:

   $Var(X/y) = \sum_x [x - E(X/y)]^2 . p'(x/y)$

   Dan variansi bersyarat dari Y diberikan X=x dirumuskan sebagai:

   $Var(Y/x) = \sum_y [x - E(Y/x)]^2 . p''(y/x)$

   Pemahaman penggunaan rumus variansi bersyarat diskrit di atas diperjelas melalui contoh berikut:

   Contoh:

   Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

   $p(x,y) = (\frac{1}{72})(x+2y)$; $x = 0, 1, 2, 3$ dan $y = 0, 1, 2, 3$

   Tentukan $Var(X/y)$ dan $Var(Y/x)$.

   Penyelesaian:

   a. Berdasarkan perumusan variansi bersyarat diskrit, maka:

      $Var(X/y) = \sum_x [x - E(X/y)]^2 . p'(x/y)$

      Dari penyelesaian diperoleh:

$p'(x\ /y) = \frac{x+2y}{6+8y}$; $x = 0, 1, 2, 3$ dan $y = 0, 1, 2, 3$

$$E(X/y) = \sum_{x=0}^{3}(x - \frac{7+6y}{3+4y})^2(\frac{x+2y}{6+8y})$$

$$= \sum_{x=0}^{3}(x - \frac{7+6y}{3+4y})^2(\frac{x+2y}{6+8y})$$

$$= \sum_{x=0}^{3}(x^2)(\frac{x+2y}{6+8y}) - \frac{2(7+6y)}{3+4y}\sum_{x=0}^{3}x(\frac{x+2y}{6+8y}) + \frac{(7+6y)2}{3+4y}\sum_{x=0}^{3}(\frac{x+2y}{6+8y})$$

Kita akan menguraikan suku satu per satu

i. $\sum_{x=0}^{3}(x^2)(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{1}{6+8y}\{0 + (1)(1+2y) + (4)(2+2y) + (9)(3+2y)\}$

$$= \frac{1}{6+8y}(1+2y+8+8y+27+18y)$$

$$\sum_{x=0}^{3}(x^2)(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{36+8y}{6+8y}$$

ii. $\sum_{x=0}^{3}x(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{1}{6+8y}\{0 + (1)(1+2y) + (4)(2+2y) + (9)(3+2y)\}$

$$= \frac{1}{6+8y}(1+2y+4+4y+9+6y)$$

$$\sum_{x=0}^{3}x(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{14+12y}{6+8y} = \frac{7+6y}{3+4y}$$

iii. $\sum_{x=0}^{3}(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{1}{6+8y}\{2y + (1+2y) + (2+2y) + (3+2y)\}$

$$\sum_{x=0}^{3}(\frac{x+2y}{6+8y}) = \frac{6+8y}{6+8y} = 1$$

Maka:

$$Var(X/y) = \frac{18+14y}{3+4y} - (\frac{14+12y}{3+4y})(\frac{7+6y}{3+4y}) + (\frac{7+6y}{3+4y})^2(1)$$

$$= \frac{(18+14y)(3+4y) - (14+12y)(7+6y) + (7+6y)^2}{3+4y^2}$$

$$Var(X/y) = \frac{20y^2+30y+5}{3+4y^2};\ y = 0, 1, 2, 3$$

b. Berdasarkan perumusan variansi bersyarat diskrit, maka:

$$Var(Y/x) = \sum_y y - E(Y/x)]^2 \cdot p''(x\ /y)$$

Dari penyelesaian diperoleh:

$p''(x\ /y) = \frac{x+2y}{4x+12}; x = 0, 1,2 , 3$ dan $y = 0, 1, 2, 3$

$$E(Y/x) = \frac{3x+14}{2x+6}$$

Jadi:

$$Var(Y/x) = \sum_{y=0}^{3}[y - \frac{3x+14}{2x+6}]^2(\frac{x+2y}{4x+12})$$

$$= \sum_{y=0}^{3}(y^2)(\frac{x+2y}{4x+12}) - \frac{2(3x+14)}{2x+6}\sum_{y=0}^{3}y(\frac{x+2y}{4x+12}) + \frac{(3x+14)2}{2x+6}\sum_{y=0}^{3}(\frac{x+2y}{4x+12})$$

Kita akan menguraikan suku satu per satu

i. $\sum_{y=0}^{3}(y^2)(\frac{x+2y}{4x+12}) = \frac{1}{4x+12}\{0 + (1)(x+2) + (4)(x+4) + (3)(x+6)\}$

$$= \frac{1}{4x+12}(x+2+4x+16+9x+54)\}$$

$$\sum_{y=0}^{3}(y^2)(\frac{x+2y}{4x+12}) = \frac{36+8y}{6+8y}$$

ii. $\sum_{y=0}^{3}y(\frac{x+2y}{4x+12}) = \frac{1}{4x+12}\{0 + (1)(x+2) + (2)(x+4) + (3)(x+6)\}$

$$= \frac{1}{4x+12}(x+2+2x+8+3x+18)\}$$

$$\sum_{y=0}^{3}y(\frac{x+2y}{4x+12}) = \frac{6x+28}{4x+12} = \frac{3x+14}{2x+6}$$

iii. $\sum_{y=0}^{3}(\frac{x+2y}{4x+12}) = \frac{1}{4x+12}\{x + (x+2) + (x+4) + (x+6)\}$

$$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{x+2y}{4x+12}\right) = \frac{4x+12}{4x+12} = 1$$

Maka:

$Var(Y/x)$ $= \frac{36+76x}{6+2x} - (\frac{6x+28}{6+2x})(\frac{14+3x}{6+2x}) + (\frac{3x+142}{6+2x})^2(1)$

$= \frac{(36+7x)(6+2x)-(6x+28)(14+3x)+(3x+14)^2}{(6+2x)^2}$

$Var(X/y)$ $= \frac{5x^2+30x+20}{(6+2x)^2}$; x=0, 1, 2, 3

Penentuan variansi bersyarat dari sebuah peubah acak Kontinu diberikan peubah acak Kontinu lainnya, baik variansi bersyarat dari X diberikan Y=y maupun variansi bersyarat dari Y diberikan X= x dijelaskan dalam definisi variansi bersyarat kontinu berikutnya.

3. Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Peubah Acak Diskrit

Definisi Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Peubah Acak Diskrit:

Jika X dan Y adalah peubah acak diskrit dengan p(x,y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x,y) maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai:

$M(_{t1,t2}) = \sum_x \sum_y \; e^{t1x+t2y}.\, p(x,y)$

Pemahaman penggunaan rumus fungsi pembangkit momen gabungan diskrit dan penghitungan nilai rataan dan variansi berdasarkan hasil fungsi pembangkit momen gabungan diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$p(x,y) = (\frac{1}{21})\,(x+y)$; x= 1,2,3, dan y=1,2

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen gabungan diskrit, maka:

$M(_{t1.t2})$ $= \sum_x \sum_y \; e^{t1x+t2y}.\, p(x,y)$

$= \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{2} e^{t1x+t2y}(\frac{1}{21})\,(x+y)$

$= (\frac{1}{21})\,(e^{t_1 x + t_2 y}.2 + e^{t_1 x + 2t_2}.3 + e^{2t_1+2t_2}.4 + e^{3t_1 x + t_2}.4 + e^{3t_1 x + t_2}.5)$

$M(t_1,t_2)$ $= (\frac{1}{21})\,(2.e^{t1+t2} + 3.e^{2t1+t2} + e^{2t1+2t2}.4 + 5.e^{3t_1 x + t_2})$

Dengan: $t_1 \in \Re$, $t_2 \in \Re$

b. Fungsi pembangkit momen marginal dari X adalah:

$M(_{t1}) = M(_{t1},0) = (\frac{1}{21})\,(5.e^{t1} + 7.e^{2t1} + 9.\, e^{3t_1})$; $t_1 \in \Re$

Rataan dari X adalah:

$E(X) = \frac{\partial M(t1,0)}{\partial t1}]_{t1=0}$

$= (\frac{1}{21})\,(5.e^{t1} + 7.e^{2t1} + 9.\, e^{3t_1})]_{t1=0}$

$= (\frac{1}{21})(5 + 14 + 27)$

$E(X) = \frac{46}{21}$

Variansi dari X adalah:

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \frac{\partial 2M(t1,0)}{\partial t12}]_{t1=0}$

$= \frac{1}{21}\,(5.e^{t1} + 28.e^{2t1} + 81.\, e^{3t_1})]_{t1=0}$

$= (\frac{1}{21})(5 + 28 + 81)$

$E(X^2) = \frac{114}{21}$

Jadi, $Var(X) = \frac{114}{21} - (\frac{46}{21})^2 = \frac{278}{441}$

c. Fungsi pembangkit momen marginal dari Y adalah:

$M(_{t2}) = M(0,_{t2}) = (\frac{1}{21})\,(9.e^{t2} + 12.e^{2t2})$; $t_2 \in \Re$

Rataan dari Y adalah:

$E(Y) = \frac{\partial M(0,t2)}{\partial t2}]_{t2=0}$

$= (\frac{1}{21})\ (9.e^{t2} + 24.e^{2t2}$

$= (\frac{1}{21})(9+24)$

$E(Y) = \frac{33}{21}$

Variansi dari Y adalah :

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$E(Y^2) = \frac{\partial M(0,t2)}{\partial t22}]_{t2=0}$

$= (\frac{1}{21})\ (9.e^{t2} + 48.e^{2t2}]_{t2=0}$

$= (\frac{1}{21})(9+48)$

$E(Y^2) = \frac{57}{21}$

Jadi, $Var(Y) = \frac{57}{21} - (\frac{33}{21})^2 = \frac{108}{441}$

4. Momen Sekitar Rataan Peubah Acak Kontinu

Definisi momen sekitar rataan peubah acak Kontinu:

Jika X adalah peubah acak kontinu dan p(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k) dinotasikan sebagai :

$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x)\ dx$

Pemahaman penggunaan rumus momen sekitar rataan kontinu diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk:

$f(x) = \frac{1}{10}; 20 < x < 30$

$= 0; x$ lainnya.

Hitung $\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 . f(x)\ dx$

Kita akan menghitung dulu nilai μ

Berdasarkan definisi rataan kontinu maka:

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\ f(x)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{20} x.\ f(x)\ dx + \int_{20}^{30} x.\ f(x)\ dx + \int_{30}^{\infty} x.\ f(x)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{20} 0.\ f(x)\ dx + \int_{20}^{30} \frac{1}{10}.\ f(x)\ dx + \int_{30}^{\infty} 0.\ f(x)\ dx$

$= 0 + (\frac{1}{10} x^2]_{x=20}^{30}) + 0$

$\mu = E(X) = 25$

Jadi:

$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-25)^3 . f(x)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{20} (x-25)^3 . f(x)\ dx + \int_{20}^{30} (x-25)^3 . f(x)$

$dx + \int_{30}^{\infty} (x-25)^3 . f(x)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{20} (x-25)^3 . 0\ dx + \int_{20}^{30} (x-25)^3 . \frac{1}{10}\ dx +$

$\int_{30}^{\infty} (x-25)^3 . 0\ dx$

$= 0 + \frac{1}{10} \int_{20}^{30} (x-25)^3 dx + 0$

Misalnya : $\mu = x - 25$

$d\ \mu = d\ x$

Batas-batas : untuk $x = 20$, maka $\mu = -5$

untuk $x = 30$, maka $\mu = 5$

$\mu_3 = \frac{1}{10} \int_{-5}^{5} \mu^3 d\ \mu$

$= \frac{1}{40}\ \mu^4]_{u=-5}^{5}$

$\mu_3 = 0$

5. Variansii Bersyarat Peubah Acak Kontinu

Definisi variansii bersyarat peubah acak Kontinu:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak Kontinu, g(x/y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y=y di x, dan h(y/x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X= x di y, maka variansi bersyarat dari X diberikan Y= y dirumuskan sebagai:

$Var(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X/y)]^2 . g(x/y)\ dx$

Dan variansi bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai:

$Var(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y/x)]^2 . g(y/x)\ dx$

Pemahaman penggunaan rumus variansi bersyarat kontinu di atas diperjelas melalui contoh berikut.

Contoh:

Misalnya fungsi densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

$f(x,y) \quad = e^{-y}\ ;\ 0 < x < y < \infty = 0;\ x,y$ lainnya.

Hitung Var(X/y) dan Var(Y/x)

Penyelesaian:

a. Berdasarkan perumusan variansi bersyarat Kontinu, maka:

   $Var(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X/y)]^2 . g(x/y)\ dx$

   Dari penyelesaian contoh tersebut diperoleh:

   $g(x/y) \quad = \frac{1}{y}\ ;\ 0 < x < y < \infty$

   $\qquad\qquad = 0;\ x,y$ lainnya.

   $E(X/y) \quad = \frac{y}{2};\ 0 < y < \infty$

   Jadi:

   $Var(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \frac{y}{2}]^2 . g(x/y)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{0} [x - \frac{y}{2}]^2 . g(x/y)\ dx + \int_{0}^{y} [x - \frac{y}{2}]^2 . g(x/y)\ dx + \int_{-2}^{\infty} [x - \frac{y}{2}]^2 . g(x/y)\ dx$

$= \int_{-\infty}^{0} [x - \frac{y}{2}]^2 .(0)\ dx + \int_{0}^{y} [x - \frac{y}{2}]^2 . \frac{1}{y}\ dx + \int_{-2}^{\infty} [x - \frac{y}{2}]^2 .(0)\ dx$

$= 0 + \frac{1}{y} \{\int_0^y x^2\ dx - y \int_0^y x\, dx + \frac{y2}{4} \int_0^y dx + 0$

$= \frac{1}{y} \{\frac{1}{3} x^3 - \frac{y}{2} x^2 + y^2/4x]_{x=0}^{y}\}$

$= (\frac{1}{y})\ (y^3/3 - y^3/2 + y^3/4)$

$Var(X/y) = y^2/12\ ;\ y > 0$

6. Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Peubah Acak Kontinu

   Definisi fungsi pembangkit momen gabungan peubah acak kontinu:

   Jika X dan Y adalah peubah acak Kontinu dengan f(x,y) adalah nilai fungsi gabungan dari X dan Y di (x,y), maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai:

   $M(t1,t2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t1x + t2y} . f(x,y)\ dx\ dy$

   Pemahaman penggunaan rumus fungsi pembangkit momen gabungan diskrit dan penghitungan nilai rataan dan variansi berdasarkan hasil fungsi pembangkit momen gabungan diperjelas melalui contoh berikut.

   Contoh:

   Misalnya fungsi densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

   $f(x,y) \quad = e^{-y}\ ;\ 0 < x < y < \infty$

   $\qquad\quad = 0\ ;\ x,\ y$ lainnya.

a. Tentukan fungsi pembangkit momen gabungan $M(_{t1,t2})$.
b. Tentukan fungsi pembangkit momen marginal dari X, kemudian hitung $E(X)$ dan Var(X)

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen gabungan Kontinu, maka:

$$M(_{t1,t2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t1x+t2y}.\ f(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} e^{t1x+t2y}.\ f(x,y)\ dx\ dy + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{y} e^{t1x+t2y}.\ f(x,y)\ dx\ dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t1x+t2y}.\ f(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} (e^{t1x+t2y})\ (0)\ dx\ dy + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{y} (e^{t1x+t2y})\ (e^{-y})\ dx\ dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{t1x+t2y})\ (0)\ dx\ dy$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-y(1-t2)} (\frac{1}{t1} e^{t1x}]_{x=0}^{y})\ dy + 0$$

$$= \frac{1}{t1}\int_{0}^{\infty} e^{-y(1-t1-t2)} - e^{-y(1-t2)}\ dy$$

$$= \frac{1}{t1}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-y(1-t1-t2)} - e^{-y(1-t2)}\ dy$$

$$= \frac{1}{t1}\lim_{b\to\infty}(\frac{-1}{1-t1-t2} e^{-y(1-t1-t2)} + \frac{-1}{1-t2} e^{-y(1-t2)})]_{y=0}^{b}$$

$$M(_{t1,t2}) = \frac{-1}{(1-t1-t2)(1-t2)};\ t_1 + t_2 < 1,\ t_2 < 1$$

b. Fungsi pembangkit momen marginal dari X adalah:

$$M(t_1,0) = \frac{1}{1-t1};\ t_1 < 1$$

Rataan dari X adalah:

$$E(X) = \frac{\partial M(t1,0)}{\partial t1}]_{t1=0}$$

Soal H

1. Diketahui fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$f(x,y) = \begin{cases} xye^{-\mu-y}; x > 0, y > 0 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $\mu_{2,3'}$
b. $\mu_{2,1}$

2. Diketahui fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}; (x,y) = (0,2),(1,1),(2,2) \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $\mu_{2,3'}$
b. $\mu_{2,1}$

3. Misalkan fungsi densitas gabungan x dan y

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{-y}; x > 0, y > x \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $M(t_1,t_2)$
b. P berdasarkan hasil $M(t_1,t_2)$

4. Misalkan fungsi peluang gabungan dari x dan y

$$P(x,y) = \frac{xy}{36}; x = 1,2,3, dan\ y = 1,2,3$$

a. Tunjukkan bahwa $E(xy) = Ex.Ey$
b. Tunjukkan bahwa P = 0

5. Misalkan fungsi densitas gabungan dari x dan y

$$k(x,y) = \begin{cases} 8xy; 0 < y < x < 1 \\ 0; lainnya \end{cases}$$

Tentukan:

a. $\mathrm{Var}(x|y)$

b. $\mathrm{Var}(y|x)$

Referensi

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

DISTRIBUSI BERNAULI DAN BINOMIAL

1. Distribusi Bernoulli

Apabila ada sebuah eksperimen mempunyai dua hasil yang muncul, seperti "sukses" dan "gagal" dengan masing-masing peluangnya p dan (1-p), maka peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal akan berdistribusi bernoulli.

Definisi 8.1: Fungsi Peluang Bernoulli

Peubah acak X dikatakan berdistriusi Bernoulli, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}; x = 0, 1$$

Peubah acak X yang berdistribusi Bernoulli dikatakan juga peubah acak Bernoulli.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi Bernoulli adalah $B(x;\ 1,\ p)$, artinya peubah acak X yang berdistribusi Bernoulli dengan peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal dinyatakan dengan x, banyak eksperimen yang dilakukan satu kali, dan peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal sebesar p.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi Bernoulli, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. Eksperimennya terdiri atas dua peristiwa, yaitu peristiwa yang diperhatikan (sering disebut peristiwa sukses) dan peristiwa yang tidak diperhatikan (sering disebut peristiwa gagal).

b. Eksperimennya hanya dilakukan sekali saja

Dalil 8.1 Parameter Distribusi Bernoulli

Rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernoulli adalah sebagai berikut:

1. $\mu = p$
2. $\sigma^2 = p(1-p)$
3. $M_x(t) = (1\text{-}p) + p \,.\, e^t;\ t \in R$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$$\mu = E(X) = \sum x \,.p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x \,.p(x)(1-p)^{1-x}$$

$$= 0 + p^1(1-p)^{1-1}$$

$\mu = E(X) = p$ (terbukti)

2. Berdasarkan definisi variansi diskrit, maka:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 \,.\, p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 \,.p^x(1-p)^{1-x}$$

$$= (0-p)^2(p^0)(1-p) + (1-p)^2(p^1)(1-p)^0$$

$$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$$

$$= p - p^2$$

$\sigma^2 = Var(X) = p(1-p)$ (terbukti)

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen diskrit, maka:

$M_x(t) = \sum_x e^{tx} \,.p(x)$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{tx} \,.p^x(1-p)^{(1-x)}$$

$$= (e^0)(p^0)(1-p)^t + (e^t)(p^1)(1-p)^0$$

$M_x(t) = (1\text{-}p) + p \,.\, e^t$(terbukti)

Contoh:

Misalnya $Y \sim B(y;\ 1,\ \frac{1}{4})$

Tentukan fungsi distribusi dari Y.

Penyelesaian:

Fungsi peluang dari Y adalah:

$$p(x) = P(Y=y) = (\frac{1}{4}^y)\ (\frac{3}{4})^{1-y}$$

Jadi: $p(0) = \frac{3}{4}$ dan $p(1) = \frac{1}{4}$

Fungsi distribusi dari Y adalah:

Untuk $y < 0$:

$F(y) = 0$

Untuk $0 \le y < 1$:

$$F(y) = \textstyle\sum_{t\le y} p(t) = \sum_{t\le 0} p(t) = p(0)$$

$$F(y) = \frac{3}{4}$$

Untuk $y \ge 1$:

$$F(y) = \textstyle\sum_{t\le y} p(t) = \sum_{t\le 1} p(t) = p(0) + p(1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$F(y) = 1$$

Sehingga $F(y) = 0;\ y < 0$

$= \frac{3}{4};\ 0 \le y < 1$

$= 1;\ y \ge 1$

2. Distribusi Binomial

Misalnya kita melakukan suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, seperti peristiwa sukses (S) dan peristiwa gagal (G).

Peluang terjadinya peristiwa S, $P(S)$, sebesar p dan peluang terjadinya peristiwa G, $P(G)$, sebesar $1 - p$. Kemudian eksperimen itu diulang sampai n kali secara bebas. Dari n kali pengulangan itu, peristiwa S terjadi sebanyak x kali dan sisanya $(n\text{-}x)$ kali terjadi peristiwa G. Kita akan menghitung besar peluang bahwa banyak peristiwa sukses dalam eksperimen itu sebanyak x kali.

Karena setiap pengulangan bersifat bebas, $P(S) = p$ dan $P(G) = 1 - p$ berharga tetap untuk setiap pengulangan percobaan, maka besar peluang dari peristiwa susunan di atas adalah:

$$P(SSS...SGGG...G) = P(S).P(S).P(S)...P(S).P(G).P(G).P(G)...P(G)$$

$$= (p)\ (p)\ (p)...(p)(1\text{-}p)(1\text{-}p)(1\text{-}p)...(1\text{-}p)$$

$$= p^x(1\text{-}p)^{n-x}$$

Karena banyak susunan keseluruhan peristiwa S terjadi ada $\binom{n}{x}$ cara, maka peluang bahwa peristiwa S terjadi dalam x kali adalah:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1\text{-}p)^{n-x}$$

Definisi 8.2: Fungsi Peluang Binomial

Peubah acak X dikatakan berdistribusi binomial, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1\text{-}p)^{n-x};\ x = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

Peubah acak X yang berdistribusi binomial dikatakan juga *peubah acak binomial.*

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi binomial adalah $B(x;\ n,\ p)$, artinya peubah acak X berdistribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimen sampai n kali, peluang terjadi peristiwa sukses sebesar p, dan banyak peristiwa sukses terjadi ada x.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi binomial, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai beriku:

1. Eksperimennya terdiri atas dua peristiwa, seperti sukses dan gagal.
2. Eksperimennya diulang beberapa kali dan ditentukan banyak pengulangannya.
3. Peluang terjadinya peristiwa sukses dan gagal pada setiap pengulangan eksperimen bersifat tetap.
4. Setiap pengulangan eksperimen bersifat bebas.

Dalil 8.1 Parameter Distribusi Binomial

Rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Binomial adalah sebagai berikut:

1. $\mu = np$
2. $\sigma^2 = np(1-p)$
3. $M_x(t) = [(1\text{-}p) + p\ .\ e^t];\ t \in R$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$$\mu = E(X) = \sum x\ .p(x) = \sum_{x=0}^{n} x\ .\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

Misalnya: $y = x - 1$ dan $m = n - 1$.

Batas-batas: Untuk $x = 1$, maka $y = 0$.

Untuk $x = n$, maka $y = n - 1 = m$.

$= np\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^{y}(1-p)^{m-y}$.

$= (np)(1)$

$\mu = E(X) = (np)$ (terbukti)

2. Berdasarkan definisi variansi diskrit, maka:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= E[(X(X-1) + X] - [E(X)]^2$$
$$= E[(X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka:

$$E[(X(X-1)] = \sum_{x} x(x-1).p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1).\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n}\frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}p^{x-2}(1-p)^{n-x}$$

Misalnya: $y = x - 2$ dan $m = n - 2$.

Batas-batas:

Untuk $x = 2$ maka $y = 0$.

Untuk $x = n$ maka $y = n - 2 = m$

$E[(X(X-1)]$

$$= n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{m}\frac{m!}{y!\,(m-y)!}p^{y}(1-p)^{m-y}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}p^{y}(1-p)^{m-y}$$

$$= [n(n-1)p^2](1)$$

$$E[(X(X-1)] = n(n-1)p^2$$

Jadi: $Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$

$= np - n^2p^2$

$Var(x) = np(1-p)$ (terbukti)

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen diskrit, maka:

$M_x(t) = \sum_x e^{tx}.p(x)$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{(n-x)}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(p.e^{t})^{x}(1-p)^{(n-x)}$$

$M_X(t) = [(1-p) + p.e^{t}]^n$ (terbukti)

Contoh:

Apakah artinya $Y \sim B(Y;\ 6,\ \frac{1}{4})$? Kemudian tuliskan bentuk fungsi peluangnya.

Penyelesaian:

$Y \sim B(Y;\ 6,\ \frac{1}{4})$ artinya peubah acak Y mengikuti distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai 6 kali, peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar $\frac{1}{4}$ dan banyak peristiwa sukses y.

Fungsi peluang dari Y adalah:

$$p(x) = \binom{6}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{y}\left(\frac{3}{4}\right)^{6-y} \quad ; y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Soal I

1. Jika fungsi pembangkit momen dari Y adalah $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot e^{t}$, tentukan
   a. Bentuk fungsi peluangnya
   b. E (Y) dan Var (Y)
2. Tunjukan bahwa P (x) = $(1 - p)^{1-x} = 0,1$ merupakan fungsi peluang dari distribusi Bernoulli
3. Sebuah kotak berisi 8 bola pingpong kuning dan 12 bola pingpong putih. Kemudian sebuah bola pingpong sambil secara acak dari kotak itu. Minsalnya x = 1, jika bola pingpong yang terambil berwarna kuning dan x = 0, jika bola pingpong yang terambil berwarna putih.
   a. Tentukan distribusi peluang dari x
   b. Tentukan fungsi dari pembangkit momen dari x
   c. Hitung E (x) dan Var (x)
4. Jika $x \sim B(x; n, p)$, maka buktikan bahwa :
   a. E $(\frac{x}{n}) = p$
   b. E $(\frac{x}{n} - p)^2 = \frac{1-p}{n}$
5. Minsalkanfungsi pembangkit momen dari X berbentuk :

$M_x(t) = (0,4 \cdot e^{t} + 0,6)^{8}$; $t \in R$

Jika y = 3x + 2, maka :

a. Tentukan fungsi pembangkit momen dari y
b. Hitung E (y) dan Var (y)

Referensi

Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

E Walpole Ronal & H Myers Raymond, *Ilmu peluang dan statistika untuk insinyur dan ilmuwan*, Bandung: ITB. 1995

DISTRIBUSI TRINOMIAL DAN POISSON

1. Fungsi Peluang Trinomial

Ditribusi binomial bisa diperluas menjadi distribusi trinomial

Definisi 8.3 : fungsi peluang trinomial

Peubah acak X dan Y dikatakan berdistribusi trinomial, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk :

$$p(x,y) = \frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y} \; ; x + y \leq n$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

peubah acak X yang berdistribusi Trinomial dikatakan juga peubah acak trinomial .

penulisan notasi dari peubah acak X dan Y yang berdistribusi trinomial adalah

T (x, y ; n, p_1, p_2) artinya peubah acak X dan Y berdistribusi trinomial dengan banyak pengulangan eksperimenya sampai n kali, peluang terjadi peristiwa sukses pertama dan kedua berturut – turut p_1 (x) dan p_2 (y), dan banyak peristiwa sukses pertama dan kedua masing – masing x dan y.

Fungsi pembangkit moment dari distribusi binomial bisa dilihat dalam dalil 8.3

Dalil 8.3 : Fugsi pembangkin momen gabungan trinomial

Fungsi pembangkit dari distribusi trinomial adalah :

$M(t_1, t_2) = (p_1 . e^{t_1} + p_2 . e^{t_2} p_3 . e^{t_3})^n$; $t_1, t_2 \in R$

Berdasarkan fungsi pembangkit momen gabungandari X dan Y , kita bisa menentukan fungsi fungsi pembangkit momen marginal masing – masing dari X dan Y,

Fungsi pembangkit momen marginal dari X adalah

$M_X(t_1) = M(t_1, 0) = (p_1 . e^{t_1} + p_2 + p_3)^n$

$M(t) \; = M(t_1, 0) = [p_1 . e^{t_1} + (1 - p_1)]^n$; $t_1 \in R$

Ternyata bentuk diatas merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai n kali dan peluang terjadinya peristiwa sukses pertama sebesar p_1 , sehingga bisa ditulis

$X \approx B(x ; n, p_1)$

Maka fungsi peluang dari X berbentuk

$P(x) = \binom{n}{x} p_1^x (1 - p_1)^{n-x}$; $X = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$

Rataan dan Variansi dari X adalah

$E(X) = n . p_1$

$Var(X) = n . p_1 (1 - p_1)$

Fungsi pembangkit momen marginal dari Y adalah \

$M_Y(t_2) = M(0, t_2) = (p_1 + p_2 . e^{t_2} + p_3)^n$

$M_Y(t_2) = M(0, t_2) = [p_2 . e^{t_2} + (1 - p_2)]^n$; $t_2 \in R$

Ternyata bentuk diatas merupakan fungsi pembangkit momen dari ditribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai n kali dan peluang terjadinya peristiwa ke dua sebesar p sehingga bisa ditulis

$Y \approx B(y; n, p_2)$

Maka fungsi peluang Y berbentuk

$P(y) = \binom{n}{y} p_1^y (1 - p_2)^{n-y}$; y = 0, 1, 2, 3,… , n

Rataan peluang dari Y adalah

$E(Y) = n \cdot p_2$

$Var(Y) = n \cdot p_2 (1 - p_2)$

Dari uraian diatas, kita dapat menyimpulkan bahwa jika X dan Y berdistribusi trinomial, maka distribusi marginal masing – masing dari X dan Y adalah distribusi binomial.

Contoh :

Jika X dan Y adalah peubah acak berdistribusi trinomial, maka tentukan :

a. Ditribusi bersyarat dari X diberikan Y = y

Penyelesaian :

a. Fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y adalah :

$P(x \text{ I } y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$

Dengan :

$P(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$

$P_2(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_2^y (1 - p_2)^{n-y}$

Maka :

$$P((x \mid y)) = \frac{\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}}{\frac{n!}{y!(n-y)!} p_2^y (1-p_2)^{n-y}}$$

$$= \frac{(n-y)!}{x!(n-x-y)!} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^x \left(\frac{p_3}{1-p_2}\right)^{n-x-y}$$

$P((x \mid y) = \frac{(n-y)!}{x!(n-x-y)!} \left(\frac{p_1}{1-p_2}\right)^x \left(1 - \frac{p_1}{1-p_2}\right)^{n-x-y}$; x = 0, 1, 2, 3, …, n – y

Ternyata fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y berasal dari distribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai (n – y) dan dan peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar $\frac{p_1}{(1-p_2)}$, sehingga bisa ditulis

$(x \mid y) \approx B\left(x; n - y, \frac{p_1}{1-p_2}\right)$

2. Fungsi Distribusi Poisson

Distribusi poisson ini diperoleh dari distribusi binomial, apabila dalam distribusi binomial beraku syarat-syarat sebagai berikut.

a. Banyak pengulangan eksperimennya sangat besar (n $\rightarrow$ ∞).

b. Peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan mendekati nol (n 0) $\rightarrow$

c. Perkalian $n \cdot p = \alpha$, sehingga $p = \frac{\alpha}{n}$.

Definisi 8.4 : fungsi peluang poisson

Peubah acak X ditanyakan berdistribusi poisson, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk :

$P(x) = p\ (X = x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x\,!}$; x = 0,1,2,3,...

Peubah acak X yang berdistribusi poisson dikatakan juga peubah acak poisson.

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi poisson adalah ( ), artinya peubah acak X berdistribusi poisson dengan parameter .

Dalil 8.4 parameter distribusi poisson

Rataan, variansi, dan fungsi pembangkin moment dari distribusi poisson adalah sebagai beikut

1. $\mu = \alpha$

Bukti :

Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka :

$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\,.\,p(x)$

$= \sum_{x=0}^{\infty} x\,.\frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x\,!}$

$= \sum_{x=1}^{\infty} x\,.\frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{(x-1)\,!}$

Minsalnya : y = x – 1

Batas – batas : Untuk x = 1, maka y = 0

Untuk x = ∞ , maka y = ∞

$\mu\ = E(X) = \sum_{y=0}^{\infty}\ \frac{\alpha^{y+1} e^{-\alpha}}{y\,!}$

$= \alpha \sum_{y=0}^{\infty}\ \frac{\alpha^{y+1} e^{-\alpha}}{y\,!}$

$= (\ \alpha\ )\ (\ 1\ )$

$\mu\ = E(X) = \alpha$ (terbukti)

2. $\sigma^2 = \alpha$

Bukti :

Berdasarkan definisi variansi, maka :

$\sigma^2 \quad = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$=E[X(X\text{-}1) + X] - [E(X)]^2$

$=E[X(X\text{-}1\ )] + E(X) - [E(X)]^2$

Berdasarkan nilai ekspektasi diskrit, maka :

$E[X(X\text{-}1\ )] \quad = \sum_x x(\ x - 1\ )\ .\ p(x)$

$= \sum_{x=0}^{\infty}(x-1)\ .\ \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x\,!}$

$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{(x-2)\,!}$

Minsalnya : y = x -2

Batas – batas : untuk x =2 , maka y =0

Untuk x = ∞ , maka y = ∞

$$E[X(X-1)] = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\alpha^{y+2} e^{-\alpha}}{(y+2)!}$$

$$= \alpha^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\alpha^{y} e^{-\alpha}}{y!}$$

$$= (\alpha^2)(1)$$

$$E[X(X-1)] = \alpha^2$$

Sehingga :

$$\sigma^2 = Var(X) = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \alpha \text{ (terbukti)}$$

3. $M_x(t) = e^{a}$; t ϵ R

Bukti :

$$MX(t) = \sum_x e^{tx} \,.\, p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \,.\, \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!}$$

$$= e^{-\alpha} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\alpha \,.e^{1})}{x!}$$

$$= (\alpha^{-\alpha})(\alpha^{\alpha .e^{t}})$$

$$MX(t) = e^{\alpha(e^{t}-1)} \text{ (terbukti)}$$

Contoh :

Misalnya X adalah peubah acak berdistribusi poisson dengan parameter jika p (X = 0) =0,2 maka hitung P(X = 2).

Penyelesaian :

$P(x) = p(X = x) = \frac{\alpha^x e^{-\alpha}}{x!}$; x = 0,1,2,3,...

p (X = 0) = 0,2

$\frac{\alpha^0 e^{-\alpha}}{0!} = 0,2$

$e^{-a} = 0,2$

$\alpha = 1,6$

Jadi :

$p(X = 2) = \frac{(1,6)^2 e^{-1,6}}{x!} = 0,2584$

Soal J

1. Misalnya peubah acak x dan y berdistribusi trinomial, dengan $n = 5$, $p_1 = \frac{1}{4}$, dan $p_2 = \frac{1}{3}$;
   a. Hitung E (x |y = 2)
   b. Hitung Var (x |y = 2)
   c. Hitung E (y |x = 2)
   d. Hitung Var (y |x = 2)
   e. Tentukan fungsi pembangkit momen gabungan dari x dan y
   f. Hitung E (x), Var (x), E (y) dan Var (y)
2. Minsalnya peubah acak X dan Y berdistribusi trinomial dengan $n = 7$, $p_1 = \frac{1}{3}$ dan $p_2 = \frac{1}{2}$

a. Hitung E (x | $y = 2$)
b. Hitung Var (x | $y = 2$)
c. Hitung E (y | $x = 2$)
d. Hitung Var (y | $x = 2$)
e. Tentukan fungsi pembangkit momen gabungan dari x dan y
f. Hitung E (x), Var (x), E (y) dan Var (y)

3. Misalnya peubah acak x berdistribusi poisson dengan parameter α, jika p (x = 1) = 2 . p (x = 2), maka hitung :
   a. P (x = 0) dan p (x = 1)
   b. Rataannya
   c. Variansinya
4. Jika peubah acak x berdistribusi poisson dengan parameter α, maka buktikan bahwa E (x^2) = α . E (x + 1)
5. Minsalnya peubah acak x berdistribusi poisson dengan parameter α jika y = x − α, maka :
   a. Tentukan fungsi pembangkit momen dari y
   b. Hitung Var (y) berdasarkan hasil di a.

Referensi

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

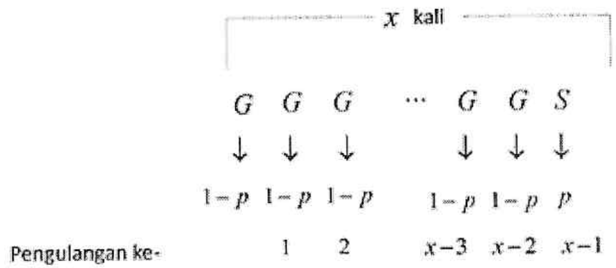
Nan haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

DISTRIBUSI GEOMETRIK DAN HIPERGEOMETRIK

1. Distribusi Geometris

Suatu eksperimen dilakukan untuk hanya menghasilkan dua kejadian, seperti kejadian sukses (S) dan kejadian gagal (G). Peluang terjadinya kejadian S, $P(S)$, sebesar p dan peluang terjadinya peristiwa G, $P(G)$ sebesar $1-p$. Dan ketika eksperimen tersebut diulang beberapa kali sampai kejadian S terjadi pertama kali.

Jika peubah acak X menyatakan banyak eksperimen dan pengulangan yang dilakukan sampai pada kejadian S terjadi pertama kali, maka $X = x$ artinya bahwa banyak eksperimen dan pengulangannya yang dilakukan sampai menghasilkan kejadian S pertama kali, adalah x kali. Dan ini berarti bahwa sampai pada pengulangan ke $(x-2)$ menghasilkan peristiwa G dan pada pengulangan ke $(x-1)$ menghasilkan peristiwa S.



Gambar Bagan Kemungkinan pada percobaan

Karena setiap pengulangan bersifat bebas, $P(S) = p$ dan $P(G) = 1 - p$ berharga tetap untuk setiap pengulangan eksperimen, maka peluang dari peristiwa bagan diatas adalah:

$$P(G\,G\,G \ldots G\,G\,S)$$
$$= P(G).P(G).P(G). \ldots .P(G).P(G).P(S)$$
$$= (1-p)(1-p)(1-p)\ldots(1-p)(1-p)$$

$$P(G\,G\,G \ldots G\,G\,S) = (1-p)^{x-1}.p$$

Sehingga peluang peristiwa sukses terjadi pertama kali pada pengulangan eksperimen ke-x adalah :

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}.p$$

Jadi dari pemaparan diatas dapat didefinisikan distribusi geometrik.

Definisi Fungsi Peluang Geometrik
Peubah acak X dikatakan berdistribusi geometric, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:
$P(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}.p\,; x = 1, 2, 3, \ldots$

Karena suku – suku berurutan tersebut membentuk pengembangan geometrik, adalah hal yang lazim untuk mengacu hal yang khusus ini sebagai distribusi geometris dan menunjukkan nilai – nilainya dengan $g(x;p)$. Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi geometrik adalah $X \sim G(x;p)$, artinya peubah acak X berdistribusi geometrik dengan banyak pengulangan eksperimennya sampai x kali dan peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar p. Adapun sifat – sifat yang harus dipenuhi agar dapat dikatakan mengikuti distribusi geometrik sebagai berikut:

a. Eksperimennya terdiri dari dua peristiwa atau kejadian, seperti peristiwa sukses dan gagal.
b. Eksperimennya diulang beberapa kali sampai peristiwa sukses terjadi pertama kali.
c. Peluang terjadinya peristiwa sukses dan gagal pada setiap pengulangan eksperimen bersifat tetap.
d. Setiap pengulangan eksperimen sifatnya bebas.

2. Rataan, variansi dan fungsi pembangkit momen dari distribusi geometrik

Adapun rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi geometrik adalah sebagai berikut:

a. $\mu = \frac{1}{p}$
b. $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$
c. $M_x(t) = \frac{p.e^t}{1-(1-p).e^t}\,; t \in \mathcal{R}$

Contoh

Di dalam suatu proses produksi tertentu diketahui bahwa, secara rata-rata, 1 di dalam setiap 100 barang adalah cacat. Berapakah probabilitas bahwa barang kelima yang diperiksa merupakan barang cacat pertama yang ditemukan?

Penyelesaian

Dengan menggunakan sebaran geometri dengan $x = 5$ dan $p = 0{,}01$. Maka diperoleh :

$$g(5; 0{,}01) = (0{,}01)(0.99)^4 = 0.0096$$

Contoh

Pada saat "waktu sibuk" sebuah papan sakelar telepon sangat mendekati kapasitasnya, sehingga para penelpon mengalami kesulitan melakukan hubungan telepon. Mungkin menarik untuk mengetahui jumlah upaya yang perlu untuk memperoleh sambungan. Andaikan bahwa kita mengambil $\boldsymbol{p = 0{,}05}$ sebagai probabilitas dari sebuah sambungan selama waktu sibuk. Kita tertarik untuk mengetahui bahwa 5 kali upaya diperlukan untuk satu sambungan yang berhasil.

Penyelesaian

Dengan menggunakan distribusi geometris dengan $x = 5$ dan $p = 0{,}05$ menghasilkan

$P(X = x) = g(5; 0{,}05) = (0{,}05)(0{,}95)^4 = 0{,}041$

Contoh

Pada seleksi karyawan baru sebuah perusahaan terdapat 3 dari 10 pelamar sarjana komputer sudah mempunyai keahlian komputer tingkat *advance* dalam pembuatan program. Para pelamar di interview secara intensif dan diseleksi secara random.

a. Hitunglah persentase yang diterima dari jumlah pelamar yang ada.
b. Berapa probabilitas pertama kali pelamar diterima pada 5 interview yang dilakukan?
c. Berapakah rata-rata pelamar yang membutuhkan interview guna mendapatkan satu calon yang punya *advance training*.

Penyelesaian

a. 3 sarjana komputer yang diterima dari sejumlah 10 calon

Persentase yang diterima $= \frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$

b. $f(x) = p.q^{x-1}, x = 1,2,3,4,5$

$f(5) = (0{,}3)(0{,}7)^4 = 0{,}072$

c. $E(x) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}333$

3. Distribusi Hipergeometri

Pada setiap percobaan statistik keluaran yang telah dihasilkan, objeknya selalu dikembalikan, sehingga probabilitas setiap percobaan peluang seluruh obyek memiliki probabilitas yang sama. Hal ini dapat terjadi dalam pengujian kualitas suatu produksi, maka objek yang diuji tidak akan diikutsertakan lagi dalam pengujian selanjutnya, atau bisa dikatakan bahwa pengujian tanpa pengembalian objek.

Misalkan ada N benda yang terdiri dari k benda yang akan diberi nama sukses sedangkan sisanya $N - k$, akan diberi nama gagal. Yang ingin dicari adalah peluang memiliki x sukses dari k yang tersedia dan $n - x$ gagal dari sebanyak $N - k$ yang tersedia, bila sampel acak ukuran n diambil dari N benda. Percobaan yang demikian ini disebut sebagai percobaan hipergeometrik.

Percobaan hipergeometrik harus memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Sampel acak ukuran n diambil dari N benda
2. Sebanyak k benda dapat diberi nama sukses sedangkan sisanya, $N - k$ diberi nama gagal.

Sedangkan banyaknya sukses X dalam percobaan hipergeometrik disebut peubah acak hipergeometrik.

4. Definisi Hipergeometrik

Distribusi hipergeometrik didefinisikan sebagai distribusi peluang peubah acak hipergeometrik X, yaitu banyaknya sampel acak ukuran n yang diambil dan N benda yang mengandung k bernama sukses dan $N-k$ bernama gagal, yakni:

$$h(x,N,n,k)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x=0,1,2,\dots,n$$

Contoh 1

Suatu kotak berisi 40 hasil produksi dikatakan dapat diterima jika mengandung paling banyak tiga yang tercatat. Suatu kotak ditolak jika sampel acak ukuran 5 hasil produksi yang terpilih mengandung suatu cacat yang cacat. Berapakah peluang mendapatkan tepat satu yang cacat dalam sampel, jika kotak tersebut mengandung tiga hasil produksi yang cacat?

Penyelesaian

Dengan menggunakan distribusi hipergeometrik untuk $n=5$, $N=40, k=3,$ dan $x=1$, peluang mendapatkan tepat satu yang cacat adalah

$$h(1,40{,}5{,}3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}}=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0{,}3011$$

Contoh 2

Dari 6 kontraktor jalan, 3 diantaranya telah berpengalaman selama lima tahun atau lebih. Jika 4 kontraktor dipanggil secara random dari 6 kontraktor tersebut, berapa probabilitas bahwa 2 kontraktor telah berpengalaman selama lima tahun atau lebih?

Penyelesaian

$P(X=2;N=6,k=3,n=4)$

$$\frac{\binom{6-3}{4-2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}}=\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}}=\frac{\frac{3!}{2!\,1!}\frac{3!}{2!1!}}{\frac{6!}{4!2!}}=\frac{(3)(3)}{(15)}=0{,}6$$

Teorema Rataan dan Variansii Distribusi Hipergeometrik

Rataan dan variansii distribusi hipergeometrik $h(x,N,n,k)$ dinyatakan oleh

$\mu=\frac{nk}{N}$ untuk rataan dan $\sigma^2=\frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$

Teorema Perluasan dari Distribusi Hipergeometrik

Jika$N$ benda dapat dikelompokkan dalam k sel $A_1,A_2,\dots,A_k$ masing – masing berisi $a_1,a_2,\dots,a_k$ benda, maka distribusi peluang peubah acak $X_1,X_2,\dots,X_k$ yang menyatakan banayaknya benda (anggota) yang terambil dari $A_b,A_n,\dots,A_k$ dalam sampel acak ukuran n adalah:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_k;\,a_1,a_2,\dots,a_k,N,n)=\frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\dots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}.$$

Dengan $\sum_{i=1}^{k}x_i=n$ dan $\sum_{i=1}^{k}a_i=N$

Contoh 3

Sejumlah 10 tikus putih dipakai dalam suatu kasus penelitian tentang pengaruh kekebalan suatu penyakit. Tiga diantaranya bergolongan darah O, 4 bergolongan darah B. Berapakah peluang suatu sampel ukuran 5 akan beranggotakan satu tikus bergolongan darah O, 2 bergolongan darah A, dan 2 lainnya bergolongan darah B?

Penyelesaian

Dengan menggunakan perluasan distribusi hipergeometrik diatas, untuk $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$; $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3, N = 10$, dan $n = 5$ maka peluang yang dicari adalah

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k;\, a_1, a_2, \ldots, a_k, N, n) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\cdots\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

Soal K

1. Pehatikan bahwa p(x) = (1 – p) x -1 , p : x = 1, 2, 3 . . . meupakan fungsi peluang dai distibusi geometik
2. Tentukan fungsi peluangnya, jika fungsi pembangkit momennya bebentuk:
   a. $M_X(t) = e^t (5 - 4 \cdot e^t)^{-1}$
   b. $M_X(t) = e^t (2 - e^t)^{-1}$
3. Misalnya Ira melakukan pengundian sebuah dadu yang seimbang . Kemudian pengundian itu diulang bebeapa kali sampai mata dadu-dadu muncul pertama kali. Hitung peluang mata dadu "2" itui akan muncul pada pengulangan ke – 10.
4. Jika peubah acak x bedistibusi geometrik dengan parameter p. perhatikan bahwa peluang dari x yang beharga ganjil adalah
   $$\frac{p}{[\,1 - (\,1 - p)^2]}$$
   Petunjuk : jika x behaga ganjil, maka x dapat dinyatakan dalam bentuk x = 2 m – 1 , m = 1, 2, 3, . . .
5. Kita sudah mengetahhui rataan dan variansi dari distribusi hipergeometrik jika k = p . N, maka hitung rataan dan variansi yang baru.

Referensi

Irzani dan Rifa'i. 2011. *Pengantar Statistika Matematika.* Yogyakarta: Media Graffindo Press.

Kislam, Syamsul. 1987. *Teori Kemungkinan.* Malang: Penerbit Utama.

Raymond H.Myers,dkk. 1998. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Sixth Edition.* New Jersey: Prentice Hall,Inc. Alih bahasa oleh Jozep Edyanto dan diterbitkan oleh PT Prenhallindo, Jakarta.

DISTRIBUSI SERAGAM DAN GAMMA

1. Distribusi Seragam

Definisi

Nilai-nilai dari peubah acak X yang berdistribusi ini adalah berupa sebuah interval terbuka (α, β) berarti rangenya adalah S_x = (α, β) = {x / α < x < β}, fkp-nya bernilai sama (seragam) pada interval ini.

a. Fungsi Densitas Seragam

Peubah acak X dikatakan berdistribusi seragam, jika dan hanya jika fungsi $densitasnya$ berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \; ; \; \alpha < x < \beta$$

$$= 0 \; ; \; x \; lainnya$$

Catatan:

Peubah acak X berdistribusi seragam pada (α, β) ditulis dengan X : U (α, β)

- Parameter Distribusi Seragam

1) Rataaan

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\alpha + \beta \right)$$

- Bukti

Berdasarkan definisi rataan Kontinu, maka :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x \,.\, f(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} x \,.\, f(x)\, dx + \int_{\beta}^{\infty} x \,.\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x \,.\, 0\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} x \,.\, \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx + \int_{\beta}^{\infty} x \,.\, 0\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=\alpha}^{\beta}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \,.\, \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \alpha^2 \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta \right) \surd \text{(Terbukti)}$$

2) Variansi

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\beta - \alpha \right)^2$$

- Bukti

Berdasarkan definisi Variansi, maka :

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$dengan$:

$E\,(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \,.\, f(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 . f(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2 . f(x)\, dx + \int_{\beta}^{\infty} x^2 . f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 . 0\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2 . \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx + \int_{\beta}^{\infty} x^2 . 0\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\left[\tfrac{1}{3} x^3 \right]_{x=\alpha}^{\beta} \right) + 0$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3)}{\beta - \alpha}$$

$$= (\tfrac{1}{3})(\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2)$$

Jadi : $Var\,(X) = (\frac{1}{3})(\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2) - (\frac{1}{4})(\alpha + \beta)^2$

$$= \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$Var\,(X) = \left(\tfrac{1}{12}\right)(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2)$$

$$Var\,(X) = \left(\tfrac{1}{12}\right)(\beta - \alpha)^2 \surd \text{ (Terbukti)}$$

3) Fungsi Pembangkit Momen

$$\boxed{\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)} ; t \neq 0 \\ &= 1 ; t = 0 \end{aligned}}$$

- Bukti

  Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen Kontinu, maka :

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{tx} . f(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} . f(x)\, dx + \int_{\beta}^{\infty} e^{tx} . f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\acute{a}} e^{tx} . 0\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx} . \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx + \int_{\beta}^{\infty} e^{tx} . 0\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\left[\tfrac{1}{t} e^{tx} \right]_{x=\alpha}^{\beta} \right) + 0$$

$$= \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)} ; t \neq 0$$

Untuk $t = 0$ di gunakan dalil L'Hospital, yaitu :

$$\lim_{t \to 0} M_x(t) = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\beta . e^{\beta t} - \alpha . e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$= 1$$

$$Jadi : M_x(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)} ; t \neq 0$$

$= 1 ; t = 0$ (terbukti)

Contoh :

1) Diketahui X : U (5.2).
   a) Tentukan Fkp, fd dan fpm dari X.
   b) Hitung rataan, variansi dan simpangan baku dari X.

Penyelesaian:

a) Dalam hal ini α= -5, β = 2, maka Fkp dari X adalah

$f(x) = \frac{1}{7}, -5 < x < 2$

$= 0, x \ lainnya$

Misalkan F fungsi distribusi dari X, maka F(x) = $P[\ X \leq x\ ] = \int_{-x}^{x} f(t)\ di$

Untuk $x \leq -5 \ -\!\!\gg F(x) = \int_{-x}^{-5} 0\ dt = 0$

Untuk $-5 < x < 2$ =>> F(x) = $\int_{-x}^{-5} 0\ dt + \int_{-5}^{x} \frac{1}{7}\ dt = \frac{1}{7}]_{-5}^{x} = \frac{1}{7}\ (x+5)$

Untuk $x \geq 2$ =>> $F(x) = \int_{-x}^{-5} 0\ dt + \int_{-5}^{2} \frac{1}{7}\ dt + \int_{2}^{\infty} 0\ dt = 1$

Jadi F(x) $= 0 : X \leq -5$

$= \frac{1}{7}(\ x+5\ );\ -5, x, 2$

$= 1 : X \geq 2$

$M_x(\ t\ ) = E[e^{2x}] = \frac{1}{7}\int_{-5}^{2} e^{2x}\ \ dx = \frac{1}{7} e^{2x}]_{-5}^{2}$

$= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{7t}$

b) $\mu = \frac{1}{2}(\ \alpha + \ \beta\ ) = \frac{1}{2}(\ -5+2\ ) = \frac{-3}{2}$

$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\ \beta - \ \alpha\ )^2$

$\sigma^2 = \frac{1}{12}(-5-2\ )^2$

$\sigma = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{12}} = \frac{7}{\sqrt{12}}$

2) Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk :

$g(x) = \frac{1}{4}\ ; 0 < x \ < 4$

$= 0;\ x\ lainnya$

a) Hitung $P(\ 1 \ < X \ < 3)$

b) Hitung $P\ (\ X\ > 2)$ berdasarkan fungsi distribusinya.

Penyelesaian :

a) Berdasarkan sifat (iii) dari fungsi densitas, maka :

$$P(1 < X < 3) = \int_{1}^{3} \frac{1}{4}\ dx$$

$= \frac{1}{4}(\ [\ x\ ]_{x=1}^{3})$

$= \ \frac{2}{4} = \ \frac{1}{2}$

b) Fungsi distribusi dari X adalah sebagai berikut

Untuk x < 0

G(x) = 0

Untuk $0 \ \leq x \ < 4$

G(x) = $\int_{-\infty}^{x} g(t)\ \ dt$

$= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \ \int_{0}^{x} g(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\ \ dt + \ \int_{0}^{x} \frac{1}{4}\ \ dt$

$= \ 0 + \frac{1}{4}\ \ (\ [\ t\ ]_{t=o}^{x}\ )$

$= \frac{1}{4}\ x$

Untuk $\ x \ \geq 4$

G(x) = $\int_{-\infty}^{x} g(t)\ \ dt$

$= \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \ \int_{0}^{4} g(t)dt + \ \int_{4}^{\infty} g(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{4} \frac{1}{4}\, dt + \int_{4}^{\infty} o\, dt$

$= 0 + \frac{1}{4}\,([\, t\,]_{t=0}^{4} + 0$

G(x) = 1

Jadi : G(x) = 0; x < 0

$= \frac{1}{4} x \,; 0 \le x < 4$

$= 1; x \ge 4$

Maka : $P(X > 2\,) = 1 - P\,(X \le 2)$

$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)(2)$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2. Distribusi Gamma

Definisi

Suatu peubah acak Kontinu X yang distribusinya berbentuk kurva gamma disebut peubah acak gamma dengan fungsi densitasnya :

$$f(x) = k\,.x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}} \;; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

= 0; x lainnya

a. Fungsi Densitas Gamma

Peubah acak X disebut berdistribusi gamma, dengan parameter α dan β jika dan hanya jika fungsi densitas berbentuk :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}} ; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \qquad = 0 \;;\; x \text{ lainnya}}$$

- Catatan

Peubah acak x berdistribusi gamma dengan parameter dan ditulis X : G (α, β)

- Parameter Distribusi Gamma

1) Rataan

$$\boxed{\mu = \alpha\,\beta}$$

Bukti

Berdasarkan definisi rataan Kontinu , maka :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.f(x)\,dx$$

$= \int_{-\infty}^{0} x\,.\, f(x)dx + \int_{0}^{\infty} x\,.f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x\,.\,0\, dx + \int_{0}^{\infty} x\,.\frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma\,(\alpha)} x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

$= 0 + \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

$= \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$

Misalnya $y = \frac{x}{\beta}, maka\ x = \beta\, y$

$dx = \beta\, dy$

Batas- batas : Untuk x = 0 , maka y = 0

Untuk x = ∞ , maka y = ∞

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (\beta\, y)^{\alpha}.\,e^{-y}.\,\beta\, dy$$

$= \frac{\beta}{\gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha}.\,e^{-y}\, dy$

$= \frac{\beta}{\gamma(\alpha)} . \gamma(\alpha + 1)$

$= \frac{\beta}{\gamma(\alpha)} . \alpha . \gamma(\alpha)$

$= \alpha \beta$ (terbukti)

2) Variansi

$$\boxed{\sigma = \alpha \beta^2}$$

Bukti

Berdasarkan definisi variansi, maka :

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Dengan :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 . f(x) dx + \int_{0}^{\infty} x^2 . f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 . 0\, dx$$

$$+ \int_{0}^{\infty} x^2 . \frac{1}{\beta^{\alpha} . \gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} . e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta^{\alpha} . \gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha+1} . e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha} . \gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha+1} . e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$$

Misalnya: $y = \frac{x}{\beta}, maka\ x = \beta\, y$

$dx = \beta\, dy$

Batas–batas : Untuk x = 0, maka y = 0

Untuk x = ∞, maka y = ∞

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta^{\alpha} . \gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (\beta\, y)^{\alpha+1} . e^{-y} . \beta\, dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1} . e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\beta^2}{\gamma(\alpha)} . \gamma(\alpha + 2)$$

$$= \frac{\beta^2}{\gamma(\alpha)} . (\alpha + 1)(\alpha) . \gamma(\alpha)$$

$$= \alpha\, (\alpha + 1) \beta^2$$

Sehingga :

$Var(X) = \alpha\ (\alpha + 1)\ \beta^2 - (\alpha\ \beta)^2$

$= \alpha^2 \beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2 \beta^2$

$= \alpha\beta^2$ (Terbukti)

3) Fungsi Pembangkit Momen

$$\boxed{M_x(t) = (1 - \beta\ t)^{-\alpha}\ ; t < \frac{1}{\beta}}$$

Bukti

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen kontinu, maka :

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}.f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.0\,dx +$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{tx}.\ \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.e^{\frac{-x}{\beta}}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x[(\frac{1}{\beta})-1]}dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-x[(\frac{1}{\beta})-1]}dx$$

Misalnya : $y = x\left(\frac{1}{\beta}-1\right), maka\ x = \frac{y}{\frac{1}{\beta}-t}$

$$dx = \frac{\beta}{1-\beta t}\,dy$$

Batas–batas : Untuk x = 0, maka y = 0

Untuk x = ∞, maka y = ∞

$$M_x(t) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1}.e^{-y}.\frac{\beta}{1-\beta t}dy$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha}.\gamma(\alpha).(1-\beta t)^{\alpha}}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1}.e^{-y}dy$$

$$= \frac{1}{\gamma(\alpha).(1-\beta t)^{\alpha}}.\gamma(\alpha)$$

$(1-\beta t)^{-\alpha};\ t < \frac{1}{\beta}$ (terbukti)

Contoh :

1) Misal peubah acak Kontinu X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β. Jika α= 2 dan β= 3, maka tulislah fungsi densitasnya !

Penyelesaiannya :

$$= \frac{1}{\gamma(2).\ 3^2}.x^1 e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\ xe^{\frac{1}{3}}\ x > 0$$

= x lainnnya .

2) Misalnya peubah acak Y berdistribusi gamma dengan parameter α= 2 dan β= 3, Hitung peluang bahwa Y berharga lebih dari 4 .

Penyelesaian :

Fungsi densitas dari Y berbentuk :

$$h(y) = \left(\frac{y}{9}\right)e^{\frac{-y}{3}};y > 0$$

= 0 ; y lainnya

Jadi: $P(Y > 4) = \int_{4}^{\infty}\frac{1}{9}y.e^{\frac{-y}{3}}\,dy$

$$= \frac{1}{9}\lim_{b\to\infty} y.e^{\frac{-y}{3}}\ dy$$

Integral diatas diselesaikan dengan menggunakan integral parsial.

Misalnya : u = y, maka du = dy

$$dv = e^{\frac{-y}{3}}\ dy, maka\ v = -3.e^{\frac{-y}{3}}$$

$P(Y > 4)$

$$= \frac{1}{9}\lim_{b\to\infty}\left(-3y.e^{\frac{-y}{3}}\right]_{y=4}^{b} + 3\int_{4}^{b} e^{\frac{-y}{3}}\ dy\Big)$$

$$= \frac{1}{9}\lim_{b\to\infty}\left(-3y.e^{\frac{-y}{3}}\right]_{y=4}^{b} - 9.e^{\frac{-y}{3}}\Big]_{y=4}^{b}\ dy\Big)$$

$= \frac{1}{9}\lim_{b\to\infty}(-3b\,.e^{\frac{-b}{3}} + 12.e^{\frac{-4}{3}} -$

$9.e^{\frac{-b}{3}} + 9.e^{\frac{-4}{3}})$

$= \frac{1}{9}\ [\lim_{b\to\infty}(-3b\,.e^{\frac{-b}{3}} + 21.e^{\frac{-4}{3}}$

$- \lim_{b\to\infty}(9.e^{\frac{-4}{3}})]$

$= \left(\frac{1}{9}\right)(0 + 21\,.e^{\frac{-4}{3}} - 0)$

$= \left(\frac{21}{9}\right).e^{\frac{-4}{3}} = 0{,}6151$

3) Diketahui X : G(2.3).

a) Tentukan fkp dan fpm dari X.

b) Hitung rerata dan variansi dari X.

c) Hitung ([X>3].

Penyelesaian:

a) Berdasarkan definisi dan dengan α= 2 dan β= 3 maka fkp dari X adalah :

$f(x) = \frac{1}{23^2}x^{2-1}e^{\frac{x}{3}},\ x > 0$

$= 0,\ x \le 0$

$f(x) = \frac{1}{9}\ x\ e^{\frac{x}{3}},\ x > 0$

$= 0,\ x \le 0$

Berdasarkan teorema tentang fpm untuk peubah acak gamma dengan α= 2 dan β= 3, maka fpm dari X adalah :

b) $\mu = \alpha - \beta = 2 - 3 = 6\ dan\ \sigma\beta^2 = 2 - 3^2 = 18$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)\ dengan$

$P(X \le 3) = P(0 < X \le 3)$

$= \int_0^3 \frac{1}{9}xe^{\frac{x}{3}} - \int_0^3 \frac{1}{9}(-3)xd(e^{\frac{x}{3}})$

$= \frac{1}{3}\int_0^3 xd(e^{\frac{x}{3}}) = -\frac{1}{3}[xe^{\frac{x}{3}} - \int e^{\frac{x}{3}}]_0^3$

$= -\frac{1}{3}[xe^{\frac{x}{3}} + 3e^{\frac{x}{3}}]_0^3$

$= -\frac{1}{3}[3e^{-1} + 3e^{-1} - 0 - 3e^0]$

$= -\frac{1}{3}[\frac{6}{e} - 3]$

$= 1 - \frac{2}{e}$

$Maka\ P\ (\ X > 3) = 1 - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e} = 0{,}7358$

Soal L

1. Misalkan peubah acak x berdistribusi seragam pada inteval (-3 , 3).
   a. Hitung p(x > 2), p(|x| < 2), dan p(|x-2| < 2)
   b. Tentukan nilai k sedemikian hingga p(x > k) = 1/3
2. Tentukan rataan dan variansi dari distribusi seragam dengan menggunakan hasil fungsi pembangkit moment.
3. Jika fungsi pembangkit moment dari x berbentuk :

   $M(x) = \left(\frac{1}{t}\right)(e^{5t} - e^{4t});\ t \ne 0$

   $= 1 : t = 0$

   a. Hitung p(4, 2 < x 4, 7)

b. Hitung E (x) dan var (x) dengan dua cara yaitu :
   (i) Melalui fungsi densitas
   (ii) Melalui fungsi pembangkit moment nya

4. Jika pengubah acak x berdistibusi gamma, maka buktikan bahwa f(x) adalah fungsi densitasnya, dengan:
   $f(x) = \beta^{1/a} . \Gamma (a)\, x^{a-1} . e^{-x/b} ; x > 0$
   $= 0$; x lainnya
5. Tentukan rataan dan variansi dari distribusi gamma berdasarkan hasil fungsi pembangkit momennya.

Referensi

Heryanto, N., Gantini, T.(2014) . Pengantar Statistika Matematika, Bandung : CV Yrama Widya

Maman, S, H., (-) . Statistik_5. http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/1952 02121974121-MAMAN_SUHERMAN/Statistik_5.pdf diakses tanggal 14 April 2017

Irzani dan Rifa'i.2011. *Pengantar Statistika Matematika.* Yogyakarta: Media Graffindo Press.

DISTRIBUSI BETA DAN EKSPONENSIAL

1. Distribusi Beta

Misalkan fungsi densitas dari peubah acak. Y yang distribusinya seragam berbentuk:

$h(y) = 1; 0 < y < 1$

$= 0$; y lainnya.

Apabila kita memperhatikan fungsi densitas di atas, maka sebenarnya fungsi densitas tersebut merupakan hal khusus dari distribusi lain, yang distribusi beta.

Definisi 9.5: Fungsi Densitas Beta

Peubah acak X dikatakan distribusi beta, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a).\Gamma(\beta)} x^{a-1} . (1-x)^{\beta-1}; 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

$= 0$; x lainnya.

Peubah acak X yang berdistribusi beta disebut juga peubah acak beta.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistriibusi beta adalah $B\ (x;\ \alpha,\ \beta)$, artinya peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter α dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi beta dengan parameter α dan β bisa juga ditulis sebagai:

$X \sim B(\alpha, \beta)$

Rataan dan variansi dari distribusi beta bisa dilihat dalam dalil 9.5.

Dalil 9.5; PARAMETER DISTRIBUSI BETA

Rataan dari variansi dari distribusi beta dirumuuskan sebagai berikut:

a) $\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

b) σ^{α}

Bukti:

a. Berdasarkan definisi rataan Kontinu, maka:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\ .f(x)\ dx + \int_{0}^{1} x\ .f(x)\ dx + \int_{1}^{\infty} x\ .f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\ .0\ dx + \int_{0}^{1} x\ .\frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\ .\ \Gamma(\beta)} x^{a-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} x\ .0\ dx$$

$$= 0 + \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\ .\ \Gamma(\beta)} \int_{1}^{\infty} x\ .x^{a-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx + 0$$

$$= \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\ .\ \Gamma(\beta)} \int_{1}^{\infty} x^{a}.(1-x)^{\beta-1}\ dx$$

Penyelesaian integral di atas dilakukan menggunakan bantuan *fungsi beta,* yaitu:

$$\int_{0}^{1} x^{a-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\ .\ \Gamma(\beta)}$$

Keterangan lebih lanjut dari fungsi beta ini bisa dilihat dalam Lampiran 2. Sehingga:

$$\mu = E(X) = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\ .\ \Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(a+1).\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{a.\Gamma(a)}{(a+\beta).\Gamma(a+\beta)}$$

b. Berdasarkan definisi variansi, maka

$\sigma^{\alpha} = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

dengan:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2\ .f(x)\ dx + \int_{0}^{1} x^2.f(x)\ dx + \int_{1}^{\infty} x^2.f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2.0\ dx + \int_{0}^{1} x^2.\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} x^2.0\ dx$$

$$= 0 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} \int_{1}^{\infty} x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx + 0$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} \int_{0}^{1} x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}\ dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} . \frac{\Gamma(\alpha+2).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} . \frac{\alpha.\Gamma(\alpha)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta).\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha.(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

Sehingga:

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+1) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \text{(terbukti)}$$

Pemahaman uraian tentang distribusi beta bisa dilihat dalam Contoh 9.11 dan 9.12.

Contoh 9.11.

Apakah artinya $X \sim B$ (2,3)? Kemudian tulisan bentuk fungsi densitasnya.

Penyelesaian:

$X \sim B$ (2,3) artinya peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$.

Fungsi densitas dari X berbentuk:

$$h(x) = 12\,x\,(1-x)^2\ ;\ 0 < x < 1 = 0;\ \text{x lainnya.}$$

Contoh 9.12.

Jika peubah acak X berdistribusi beta dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 4$, maka hitung:

a. μ

b. Peluang bahwa X bernilai paling sedikit $\frac{1}{4}$.

Penyelesaian:

Fungsi densitas dari X berbentuk:

$$g(x) = 4(1-x)^2\ ;\ 0 < x < 1$$

$$= 0;\ \text{x lainnya.}$$

a. $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\ .f(x)\ dx + \int_{0}^{1} x\ .f(x)\ dx + \int_{1}^{\infty} x\ .f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\ .0\ dx + \int_{0}^{1} x^2\ .4(1-x)^3\ dx + \int_{1}^{\infty} x\ .0\ dx$$

$$= 0 + 4.B(2,4) + 0$$

$$= 4.B(2,4)$$

$$= 4\left(\frac{\Gamma(2).\Gamma(4)}{\Gamma(6)}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1!\,3!}{5!}\right)$$

$$\mu = E(X) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

b. $P\left(X \geq \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{0} 4\,(1-x)^3\ dx$

Misalnya: $y = 1 - x$, maka $x = 1 - y$

$dx = -dy$

Batas-batas: Untuk $x = \frac{3}{4}$, maka $y = \frac{1}{4}$

Untuk $x = 1$, maka $y = 0$

$$P\left(X \geq \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{3}{4}}^{0} 4y^3\,(-dy)$$

$$= \int_{0}^{\frac{3}{4}} 4y^3\,dy$$

$$= y^4\Big]_{y=0}^{\frac{3}{4}}$$

$$P\left(X \geq \frac{3}{4}\right) = (\frac{3}{4})^4 = 0{,}3164$$

2. Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial ini diperoleh dari distribusi gamma dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$. Sehingga kita peroleh definisi distribusi eksponensial berikut.

Definisi 9.3: Fungsi Densitas Eksponensial

Peubah acak X dikatakan berdistribusi eksponensial, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right).\,e^{\frac{-x}{\theta}}\ ;\ x > 0, \qquad \theta > 0$$

$$= \quad 0 \qquad ;\ x\ lainnya.$$

Peubah acak X yang berdistribusi eksponensial disebut juga peubah acak, eksponensial.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi eksponensial adalah *Exp(x; θ)*, artinya peubah acak X berdistribusi eksponensial dengan parameter θ.

Peubah acak X yang berdistribusi eksponensial dengan parameter θ bisa juga ditulis sebagai:

$X \sim EXP(\theta)$

Rataan, variansi, dan fungsi pembangkit mornen dari distribusi eksponensial bisa dilihat dalam Dalil 9.3.

Dalil 9.3: Parameter Distribusi Eksponensial

Rataan, Variansi, dan fungi pembangkit momen dari distribusi eksponensial dirumuskan sebagai berikut.

1. $\mu = \theta$
2. $\sigma^2 = \theta^2$
3. $M_t(t) = (1 - \theta t)^{-1}; t < \frac{1}{\theta}$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi rataan kontinu, maka:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \,. f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} x \,. f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \,.\, 0\ dx + \int_{0}^{\infty} x \,.\, \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\theta} \lim_{b \to 0} \int_{0}^{b} x \,.\, e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \lim_{b \to 0} \int_{0}^{b} x \,.\, e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

Integral di atas diselesaikan dengan menggunakan integral parsial.

Misalnya: $u = x$, maka $du = dx$

$dv = e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx, maka\ v = -\theta . e^{\frac{-x}{\theta}}$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}\left(-x.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}} \Big]_{x=0}^{b} + \theta \int_{0}^{b} e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx \right)$$

$$= \frac{1}{\theta} \lim_{b \to \infty} \left[-b.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}} + \theta^2 \left(e^{\frac{-x}{\theta}} + 1 \right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\lim_{b \to \infty} \left(-b.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}} \right) + \lim_{b \to \infty} \left(\theta^2.e^{\frac{-x}{\theta}} \right) + \theta^2 \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\ (0 + \theta^2 + 0) \right)$$

$\mu = E(X) = \theta\ (terbukti)$

2. Berdasarkan definisi variansi, maka:

$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

dengan:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 . f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} x^2 . f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \,.\, 0\ dx + \int_{0}^{\infty} x^2 . \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\theta} \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x^2 . e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\theta} \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x^2 . e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

Integral ini diselesaikan dengan menggunakan integral persial.

Misalnya: $u = x^2$, maka $du = 2x\ dx$

$dv = e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx, maka\ v = -\theta . e^{\frac{-x}{\theta}}$

$$\mu = E(X^2) = \frac{1}{\theta} \lim_{b \to \infty} \left(-x^2.\theta.e^{\frac{-x}{3}} \Big]_{x=4}^{b} + 2\ \theta \int_{0}^{b} x.e^{\frac{-x}{3}}\ dx \right)$$

Integral yang ada di dalam kurang diselesaikan dengan menggunakan integral parsial.

Misalnya: $u = x$, maka $du = dx$

$dv = e^{\frac{-x}{\theta}}\, dx, maka\ v = -\theta . e^{\frac{-x}{\theta}}$

$$\mu = E(X^2)$$

$$= \frac{1}{\theta}\lim_{b\to\infty}\left[-x^2.\theta.e^{\frac{-x}{3}}\right]_{x=0}^{b}$$

$$+ 2\,\theta\left(-x.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}}\right]_{x=0}^{b}\ \theta^2.e^{\frac{-x}{\theta}}\Big]_{x=0}^{b}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\theta}\lim_{b\to\infty}\left[-b^2.\theta.e^{\frac{-x}{3}}\right]_{x=0}^{b}$$

$$+ 2\,\theta\left(-x.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}}\right]_{x=0}^{b}\ \theta^2.e^{\frac{-x}{\theta}}\Big]_{x=0}^{b}\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\lim_{b\to\infty}\left(-b.\theta.e^{\frac{-x}{\theta}}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\theta^2.e^{\frac{-x}{\theta}}\right) + \theta^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\ (0 + \theta^2 + 0)\right)$$

$$\mu = E(X) = \theta\ (terbukti)$$

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen Kontinu, maka:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}.f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.\ 0\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}.\frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}}\ dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\theta}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)-t\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)-t\right]}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{\frac{1}{\theta}-t}\,e^{-x\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)-t\right]}\right]_{x=0}^{b}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\theta t}\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)-t\right]} + 1\right)$$

$$= 1-\theta\ t)^{-1}\left(\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x\left[\left(\frac{1}{\theta}\right)-t\right]}\right) + 1\right)$$

$$= (1-\theta\ t)^{-1}.(0+1)$$

$$M_x(t) = (1-\theta\ t)^{-1}; t < \frac{1}{\theta}(terbukti)$$

Pemahaman uraian tentang distribusi eksponensial diperjelas melalui contoh 9.6 dan 9.7

Contoh 9.6:

Apakah artinya $X \sim EXP(2)$? Kemudian tuliskan bentuk fungsi densitasnya.

Penyelesaian:

$X \sim EXP(2)$ artinya peubah acak X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 2$.

Fungsi densitas dari x berbentuk:

$$g(x) = \frac{1}{2}.e^{\frac{-x}{2}}; x > 0 = 0\ ; x\ \text{lainnya.}$$

Contoh 9.7:

Misalkan peubah acak Y berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 3$. Hitunglah peluang bahwa Y berniai lebih dari 2.

Penyelesaian:

Fungsi densitas dari Y berbentuk:

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right).e^{\frac{-x}{3}}; x > 0$$

$$= \quad 0 \quad ; y \text{ lainnya.}$$

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2)$$

$$= 1 - \int_0^2 \frac{1}{3}.e^{\frac{-y}{3}}\ dy$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(-3.e^{\frac{-y}{3}}\Big]_{y=0}^{2}\right)$$

$$= 1 + \left(e^{\frac{-2}{3}} - 1\right)$$

$$P(Y > 2) = e^{\frac{-2}{3}} = 0{,}5134$$

Soal M

1. Jika peubah acak x bedistribusi ekspenesial dengan parametet $\Theta = 20$, maka hitung :
   a. P(10 < x < 30)
   b. P(x > 40 | x > 10)
2. Misalkan fungsi densitas dai x berbentuk :
   $f(x) = \frac{1}{2} . e^{-x/2}$; x > 0 = 0 ; x lainnya

   a. Hitung rataan dan vaians dari x, tentukan juga fungsi pembangkit momennya.
   b. Hitung p(x > 3)
   c. Hitung p(x > 5 | x > 2)
3. Misalkan peubah acak x berdistribusi ekspensial daya parameter $\Theta = \frac{1}{4}$
   a. Hitung p(| x – 1 | < 2)
   b. Tentukan fungsi pembangkit momennya
   c. Tentukan rataan dan vaians berdasarkan hasil fungsi pembangkit momennya
4. Jika peubah acak x berdistribusi x dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$, maka hitung :
   a. P (x < 0, 30)
   b. E (x) dan Var (X)
5. Berdasarkan bahwa parameter-parameter a dan p dari distribusi beta dengan dinyatakan dalam bentuk rataan dan variansinya yaitu:

$$\alpha = \mu\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right]$$

$$\beta = (1 - \mu)\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right]$$

Referensi

Heryanto, N., Gantini, T.(2014) . Pengantar Statistika Matematika, Bandung : CV Yrama Widya

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

DISTRIBUSI CHI KUADRAT DAN DISTRIBUSI NORMAL

1. Distribusi Chi Kuadrat

Definisi

Chi Kuadrat disebut juga dengan *Chi Square*. *Chi Square* adalah salah satu jenis uji komparatif non parametris yang dilakukan pada dua variabel, di mana skala data kedua variabel adalah nominal. (Apabila dari 2 variabel, ada 1 variabel dengan skala nominal maka dilakukan uji chi square dengan merujuk bahwa harus digunakan uji pada derajat yang terendah).

Rataan, variansi, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi khi kuadrat dirumuskan sebagai berikut :

$\mu = v$

$\sigma^2 = 2v$

$Mx(t) = (1-2t)^2 \,; < \frac{1}{2}$

a. Contoh kasus

1) Perusahaan penyalur alat elektronik AC ingin mengetahui apakah ada hubungan antara gender dengan sikap mereka terhadap kualitas produk AC. Untuk itu mereka meminta 25 responden mengisi identitas mereka dan sikap atau persepsi mereka terhadap produknya. Permasalahan: Apakah ada hubungan antara gender dengan sikap terhadap kualitas AC?

Hipotesis :

- H0 = Tidak ada hubungan antara gender dengan sikap terhadap kualitas AC
- H1 = Ada hubungan antara gender dengan sikap terhadap kualitas AC

Tolak hipotesis nol (H0) apabila nilai signifikansi chi-square < 0.05 atau nilai chi-square hitung lebih besar (>) dari nilai *chi-square* tabel.

2) Pada penelitian tentang hubungan antara merokok dengan hipertensi dengan total sampel 110 orang laki-laki, didapatkan 35 orang menderita Coronary Heart Disease (CHD) disertai dengan kebiasaan merokok, 25 orang menderita CHD tanpa disertai dengan kebiasaan merokok, sedangkan sisanya 20 orang non-CHD dengan kebiasaan merokok dan 30 orang non CHD tanpa kebiasaan merokok. Hitunglah apakah terdapat perbedaan antara merokok dengan tidak merokok terhadap kejadian CHD!

Jawaban:

MEROKOK	HIPERTENSI		TOTAL
	CHD	NON CHD	
POSITIF	35	20	55
NEGATIF	25	30	55
TOTAL	60	50	110

Ho: tidak ada perbedaan yang bermakna antara merokok dengan tidak merokok terhadap kejadian CHD

H1: ada perbedaan yang bermakna antara merokok dengan tidak merokok terhadap kejadian CHD

α = 5 % =0,05

df = (k-1) (b-1) = (2-1) (2-1)= 1

X^2 tabel adalah 3,841

Kriteria pengujian hipotesis:

X^2 tabel < X^2 hitung, maka Ho ditolak (H1 diterima).
X^2 tabel > X^2 hitung, maka Ho diterima (H1 ditolak).

Penghitungan :

$$X^2 = \frac{n\ (ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+c)}$$

$$X^2 = \frac{110\ ((35 \times 30)-(25 \times 20))^2}{55 \times 55 \times 60 \times 50} = 3{,}7$$

Kesimpulan:

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diketahui bahwa X^2 tabel > X^2 hitung, maka Ho diterima (H1 ditolak), sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada perbedaan yang bermakna antara merokok dengan tidak merokok terhadap kejadian CHD.

2. Distribusi Normal

Definisi

Distribusi normal merupakan salah satu distribusi probabilitas yang penting dalam analisis statistika. Distribusi ini memiliki

parameter berupa *mean* dan *simpangan baku*. Distribusi normal dengan mean = 0 dan simpangan baku = 1 disebut dengan distribusi normal standar. Apabila digambarkan dalam grafik, kurva distribusi normal berbentuk seperti genta (*bell-shaped*) yang simetris. Distribusi normal, disebut pula distribusi Gauss, adalah distribusi probabilitas yang paling banyak digunakan dalam berbagai analisis statistika. Distribusi normal baku adalah distribusi normal yang memiliki rata-rata nol dan simpangan baku satu. Distribusi ini juga dijuluki *kurva lonceng* (*bell curve*) karena grafik fungsi kepekatan probabilitasnya mirip dengan bentuk lonceng.

Contoh

a. PT Work Electric, memproduksi Bohlam Lampu yang dapat hidup 900 jam dengan standar deviasi 50 jam. PT Work Electric ingin mengetahui berapa persen produksi pada kisaran antara 800-1.000 jam, sebagai bahan promosi bohlam lampu. Hitung berapa probabilitasnya!

Jawab:

P(800<X<1.000)?

Hitung nilai Z

Z1 = (800-900)/50 = -2,00;

Z2 = (1.000-900)/50 = 2,00

Jadi: P(800<X<1.000) =P(-2,00<Z<2,00);

P(-2,00<Z) = 0,4772 dan P(Z>2,00) = 0,4772

Sehingga luas daerah yang diarsir adalah = 0,4772+0,4772= 0,9544. Jadi P(800<X<1.000) = P(-2,00 < Z<2,00) = 0,9544.

Jadi 95,44% produksi berada pada kisaran 800-1.000 jam. Jadi jika PT Work Electric mengklaim bahwa lampu bohlamnya menyala 800-1.000 jam, mempunyai probabilitas benar 95,44%, sedang sisanya 4,56% harus dipersiapkan untuk garansi.

b. PT GS mengklaim rata-rata berat buah mangga "B" adalah 350 gram dengan standar deviasi 50 gram. Bila berat mangga mengikuti distribusi normal, berapa probabilitas bahwa berat buah mangga mencapai kurang dari 250 gram, sehingga akan diprotes oleh konsumen.

Jawaban
Transformasi ke nilai z

AP(x< 250); P(x=250) = (250-350)/50=-2,00 Jadi P(x<250)=P(z<-2,00)

Lihat pada tabel luas di bawah kurva normal

P(z<-2,00)=0,4772

Luas sebelah kiri nilai tengah adalah 0,5. Oleh sebab itu, nilai daerah yang diarsir menjadi 0,5 – 0,4772=0,0228. Jadi probabilitas di bawah 250 gram adalah 0,0228 (2,28%).

Dengan kata lain probabilitas konsumen protes karena berat buah mangga kurang dari 250 gram adalah 2,28%.

Soal N

1. Jika fungsi pembangkit momen dari x berbentuk
   $M_x(t) = (1 - 2t)\ 1 < \frac{1}{2}$ maka hitung :
   a. E (x) dan Var (x)
   b. P (15,66 < x < 42,98)
2. Tentukan rataan dan variansi dari distribusi chi-kuadrat dengan menggunakan hasil fungsi pembangkit momennya.
3. Tentukan rataan dan variansi dari distribusi normal umum berdasarkan hasil fungsi pembangkit momennya.
4. Buktikan bahwa dalam distribusi normal umum berlaku
   $M_{x\text{-}\mu(t)} = \exp\left(\frac{\sigma^2 1^2}{2}\right)$
5. Jika peubah acak x berdistribusi normal umum dengan rataan μ dan variansi σ^2, maka buktikan bahwa fungsi pembangkit momen dari peubah acak $z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ akan berdistribusi normal baku.

Referensi

Nar haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika matematis* (Bandung: CV.YRAMA WIDIA,2009)

Suhardi,Purnomo S.K.(2007).*Statistika Untuk Ekonomi dan keuangan modern,edesi 2.* Jakarta:salemba empat.

REFERENSI

E Walpole Ronal & H Myers Raymond,1995. *Ilmu Peluang Dan Statistika Untuk Insinyur Dan Ilmuwan*, Bandung: ITB.

Heryanto, N., Gantini, T.(2014). Pengantar Statistika Matematika, Bandung : Yrama Widya.

Irzani dan Rifa'i.2011. *Pengantar Statistika Matematika.* Yogyakarta: Media Graffindo Press.

Kislam, Syamsul. 1987. *Teori Kemungkinan.* Malang: Penerbit Utama.

Maman, S, H., (-) . Statistik_5. http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/195202121974121-MAMAN_SUHERMAN/Statistik_5.pdf diakses tanggal 14 April 2017.

Nar haryanto, Tuti Gantini, *Pengantar Statistika Matematis* (Bandung: Yrama Widia,2009).

Raymond H.Myers,dkk. 1998. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Sixth Edition.* New Jersey: Prentice Hall,Inc. Alih bahasa oleh Jozep Edyanto dan diterbitkan oleh PT Prenhallindo, Jakarta.

Raymond H.Myers,dkk. 1998. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Sixth Edition.* New Jersey: Prentice Hall,Inc. Alih bahasa oleh Jozep Edyanto dan diterbitkan oleh PT Prenhallindo, Jakarta.

Suhardi,Purnomo S.K.(2007).*Statistika Untuk Ekonomi dan Keuangan Modern,Edesi 2.* Jakarta: Salemba Empat.

PROFIL PENULIS

Mauliddin, M.Si. Lulus S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin (FMIPA UNHAS) tahun 2006. Lulus S2 di Jurusan Matematika FMIPA ITB (Institut Teknologi Bandung) pada tahun 2012. Penulis memulai karirnya sebagai dosen yang mengampuh mata kuliah Statistik Matematika, Aljabar Linier dan Persamaan Differensial di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Dayanu Ikhsanuddin Baubau sejak tahun 2007 hingga 2015. Saat ini penulis adalah dosen tetap Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan di Universitas Islam Negeri Mataram (UIN Mataram).

Alfira Mulya Astuti, M.Si adalah dosen Univesitas Islam Negeri Mataram sejak tahun 2009 hingga sekarang.Lahir di Gowa, 25 September 1984. Penulis menempuh pendidikan dasar di SD Inpres 12/79 biru II kabupaten bone pada tahun 1990 – 1996, pendidikan menengah pertama di SLTP Negeri 3 Watampone Kab. Bone pada tahun 1996-1999, dan pendidikan menengah atas di SMU Negeri 2 Watampone pada Tahun 1999 – 2002. Penulis menyelesaikan Sarjana Pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makasar pada tahun 2006 dan Magister Statistika di Pasca Sarjana Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya pada tahun 2009. Saat ini, penulis diamanahkan untuk menjadi Sekretaris Program Studi Tadris Matematika FTK Universitas Islam Negeri Mataram.