

# DISTRIBUSI WEIBULL

## Konsep Dasar & Aplikasinya

Buku ini menyajikan secara rinci baik secara teori dan aplikasi, berdasarkan hasil riset dan studi literatur, tentang model Weibull, sebagai salah satu distribusi yang populer digunakan untuk memodelkan fenomena keseharian terkait alam, komponen mesin, dan kejadian fisis lainnya. Struktur buku referensi ini terdiri dari lima bab, mulai dari ikhtisar umum hingga aplikasi model Weibull pada kebijakan garansi produk mesin fotokopi, sebagai contoh item yang dapat diperbaiki (repairable).

**Sanabil**

Puri Bunga Amanah  
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram  
Telp. 0370-7505946  
Mobile: 081-805311362  
Email: sanabilpublishing@gmail.com  
www.sanabilpublishing.com

ISBN 978-623-317-224-0



Indira Puteri Kinasih

DISTRIBUSI WEIBULL Konsep Dasar & Aplikasinya

Indira Puteri Kinasih

# DISTRIBUSI WEIBULL

## Konsep Dasar & Aplikasinya

**Sanabil**

**DISTRIBUSI WEIBULL**  
**Konsep Dasar & Aplikasinya**



Halaman Sengaja Dikosongkan

**Indira Puteri Kinasih**

**DISTRIBUSI WEIBULL**  
**Konsep Dasar & Aplikasinya**



# **Distribusi Weibull: Konsep Dasar & Aplikasinya**

© Sanabil 2021

Penulis: Indira Puteri Kinasih

Editor : Kristayulita

Layout: Kurniawan Arizona

Desain Cover : Sanabil Creative

*All rights reserved*

Hak Cipta dilindungi Undang Undang

Dilarang memperbanyak dan menyebarkan sebagian atau keseluruhan isi buku dengan media cetak, digital atau elektronik untuk tujuan komersil tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit.

ISBN : 987-623-317-244-0

Cetakan 1 : Oktober 2021

Penerbit:

Sanabil

Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram

Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362

Email: sanabilpublishing@gmail.com

[www.sanabil.web.id](http://www.sanabil.web.id)

# DAFTAR ISI

Halaman

Halaman Sampul .....	i
Daftar Isi .....	v
Daftar Tabel.....	vii
Daftar Gambar .....	viii
Kata Pengantar Dekan .....	xi
Prakata Penulis .....	xv

## **BAB I IKHTISAR: PEMODELAN EMPIRIS**

A. Pendahuluan.....	1
B. Ilustrasi Masalah .....	2
C. Metode Pemodelan Empiris .....	6
D. Model Weibull.....	9
E. Pemilihan Model Weibull .....	12
F. Aplikasi dari Model Weibull .....	12

## **BAB II TAKSONOMI WEIBULL**

A. Pendahuluan.....	15
B. Taksonomi untuk Model Weibull .....	15
C. Model Tipe I: Transformasi dari Model Weibull.....	18
D. Model Tipe II: Modifikasi dari Distribusi Weibull .....	21
E. Model Tipe III: Melibatkan Lebih dari 1 Distribusi .....	27
F. Model Tipe IV: Variasi Parameter .....	30
G. Model Tipe V: Model Weibull Diskrit.....	33
H. Model Tipe VI: Model Weibull Multivariat .....	34
I. Model Tipe VII: Model Stokastik ( <i>Point Process</i> ) .....	38

## **BAB III DISTRIBUSI WEIBULL STANDAR**

A. Pendahuluan .....	41
B. Distribusi Weibull Univariat.....	42
C. Distribusi Weibull Bivariat .....	50
D. Distribusi Weibull Multivariat .....	59

## **BAB IV ESTIMASI PARAMETER WEIBULL**

A. Pendahuluan .....	65
B. Estimasi Parameter Univariat.....	66
C. Estimasi Parameter Bivariat .....	87

## **BAB IV APLIKASI: ESTIMASI BIAYA GARANSI**

A. Pendahuluan .....	92
B. Kebijakan <i>Basic</i> FRW Satu Dimensi.....	93
C. Kebijakan <i>Basic</i> FRW Dua Dimensi.....	103

DAFTAR PUSTAKA.....	110
SINOPSIS .....	114
INDEKS .....	115
LAMPIRAN-LAMPIRAN.....	118
BIODATA PENULIS.....	129

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Hasil Estimasi Parameter dengan 3 Metode.....	74
Tabel 4.2 Hasil Estimasi Parameter Data Sistem Fotocopy .....	85
Tabel 4.3 Hasil Estimasi Parameter Komponen <i>Cleaning Web</i> .....	86
Tabel 4.4 Hasil Estimasi Parameter Komponen <i>Feed Roller</i> .....	86
Tabel 4.5 Hasil Estimasi Parameter Komponen <i>Ozone Filter</i> .....	87
Tabel 4.6 Hasil Simulasi Algoritma Genetika .....	91
Tabel 4.7 Hasil Estimasi Parameter Data Bivariat Fotocopy .....	92
Tabel 5.1 Evaluasi Fungsi Pembaruan.....	98
Tabel 5.2 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Cleaning Web berdasarkan WAK .....	99
Tabel 5.3 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Cleaning Web berdasarkan CAK .....	99
Tabel 5.4 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Feed Rollers berdasarkan WAK .....	100
Tabel 5.5 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Feed Rollers berdasarkan CAK.....	100
Tabel 5.6 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Ozone Filter berdasarkan WAK .....	101
Tabel 5.7 Evaluasi Fungsi Pembaruan & Estimasi Biaya Ozone Filter berdasarkan CAK.....	101
Tabel 5.8 Evaluasi Fungsi Pembaruan Cleaning Web berdasarkan Usia dan Salinan .....	107
Tabel 5.9 Ekspektasi Biaya Garansi Cleaning Web.....	108
Tabel 5.10 Evaluasi Fungsi Pembaruan Feed Rollers berdasarkan Usia dan Salinan .....	108
Tabel 5.11 Ekspektasi Biaya Garansi Feed Rollers .....	108
Tabel 5.12 Evaluasi Fungsi Pembaruan Ozone Filter berdasarkan Usia dan Salinan .....	109
Tabel 5.13 Ekspektasi Biaya Garansi Ozone Filter.....	109

# DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1 Grafik Fungsi Keandalan Weibull dengan parameter bentuk berubah-ubah .....	43
Gambar 3.2 Grafik Fungsi Keandalan Weibull dengan parameter skala berubah-ubah .....	43
Gambar 3.3 Grafik Fungsi Distribusi Weibull dengan parameter bentuk berubah-ubah .....	44
Gambar 3.4 Grafik Fungsi Distribusi Weibull dengan parameter skala berubah-ubah.....	44
Gambar 3.5 Grafik Fungsi Hazard Weibull dengan parameter bentuk berubah-ubah.....	45
Gambar 3.6 Grafik Fungsi Hazard Weibull dengan parameter skala berubah-ubah.....	46
Gambar 3.7 Grafik Bathhtub .....	47
Gambar 3.8 Grafik Fungsi Kumulatif Hazard Weibull dengan parameter bentuk berubah-ubah.....	47
Gambar 3.9 Grafik Fungsi Kumulatif Hazard Weibull dengan parameter skala berubah-ubah .....	48
Gambar 3.10 Grafik Fungsi Kepadatan Peluang Weibull dengan parameter bentuk berubah-ubah.....	49
Gambar 3.11 Grafik Fungsi Kepadatan Peluang Weibull dengan parameter skala berubah-ubah .....	49
Gambar 3.12 Grafik Fungsi Keandalan Weibull Bivariat .....	53
Gambar 3.13 Grafik Fungsi Distribusi Weibull Bivariat.....	54
Gambar 3.14 Grafik Fungsi Hazard Weibull Bivariat .....	55
Gambar 3.15 Grafik Fungsi Hazard Kumulatif Weibull Bivariat .	55
Gambar 3.16 Grafik Fungsi Kepadatan Peluang Weibull Bivariat	56
Gambar 4.1 Diagram Alir Metode Newton Raphson .....	69
Gambar 4.2 Ilustrasi Metode Newton Raphson .....	70
Gambar 4.3 Diagram Alir Algoritma Genetika .....	71

Gambar 4.4 Box Plot Waktu dan Copies antar Kerusakan Mesin Fotokopi.....	75
Gambar 4.5 Plot WAK dan CAK Mesin Fotokopi.....	76
Gambar 4.6 Box Plot WAK Komponen Mesin Fotokopi .....	78
Gambar 4.7 Box Plot CAK Komponen Mesin Fotokopi .....	79
Gambar 4.8 Plot WAK Komponen Mesin Fotokopi.....	80
Gambar 4.9 Plot CAK Komponen Mesin Fotokopi.....	81
Gambar 4.10 Probability Plot Mesin Fotokopi .....	82
Gambar 4.11 Probability Plot Cleaning Web.....	83
Gambar 4.12 Probability Plot Feed Rollers .....	84
Gambar 4.13 Probability Plot Ozone Filter.....	84
Gambar 5.1 Wilayah FRW 1 Dimensi .....	94
Gambar 5.2 Grafik Banyaknya Kerusakan.....	96
Gambar 5.3 Bidang Kebijakan Dua Dimensi FRW 1 .....	102
Gambar 5.4 Bidang Kebijakan Dua Dimensi FRW 2 .....	102
Gambar 5.5 Bidang Kebijakan Dua Dimensi FRW 3 .....	103
Gambar 5.6 Bidang Kebijakan Dua Dimensi FRW 4 .....	103
Gambar 5.7 Karakter Kerusakan Dua Dimensi pada Daerah Kebijakan FRW 1.....	104



Halaman Sengaja Dikosongkan

## KATA PENGANTAR DEKAN

*Alhamdulillah*, segala puji hanya milik Allah SWT. Shalawat & Salam semoga senantiasa terlimpah pada teladan agung Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari kebangkitan kelak. Berkat rahmat dan hidayah Allah SWT, program penulisan buku ajar dan referensi telah dapat dirampungkan.

Kewajiban dosen untuk menulis dan memproduksi buku, baik buku ajar maupun buku referensi sejatinya sudah diatur dalam UU Nomor 12 tahun 2012 tentang perguruan tinggi dan UU Nomor 14 tahun 2005 tentang Guru dan Dosen dan sejumlah regulasi lainnya. Pasal 12 UU No.12 tahun 2012 dengan tegas menyebutkan bahwa dosen secara perseorangan atau kelompok wajib menulis buku ajar atau buku teks yang diterbitkan oleh perguruan tinggi sebagai salah satu sumber belajar.

Kompetisi Buku Ajar dan Referensi (KOBAR) Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram tahun 2021 adalah upaya Fakultas untuk berkontribusi dalam implemmentasi undang-undang di atas, dimana secara kuantitatif, grafik riset dan publikasi dosen PTKI masih harus terus ditingkatkan. Tujuan lainnya adalah meningkatkan mutu pembelajaran dengan mewujudkan suasana akademik yang kondusif dan proses pembelajaran yang efektif, efisien dengan kemudahan akses sumber belajar bagi dosen dan mahasiswa. Publikasi ini juga diharapkan *men-support* peningkatan karir dosen dalam konteks kenaikan jabatan fungsional dosen yang ujungnya berdampak pada

peningkatan status dan peringkat akreditasi program studi dan perguruan tinggi.

Secara bertahap, Fakultas terus berikhtiar meningkatkan kuantitas dan kualitas penerbitan buku. Pada tahun 2019 berjumlah 10 judul buku dan meningkat cukup signifikan tahun 2021 menjadi 75 judul buku referensi. Ikhtiar Fakultas tidak berhenti pada level publikasi, namun berlanjut pada pendaftaran Hak Kekayaan Intelektual (HKI) dosen di Direktorat Jenderal Kekayaan Intelektual (DJKI) Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia RI, sehingga tahun 2021 menghasilkan 75 HKI dosen.

Kompetisi buku ajar dan referensi tahun 2021 berorientasi interkoneksi-integrasi antara agama dan sains, berspirit Horizon Ilmu UIN Mataram dengan inter-multi-transdisiplin ilmu yang mendialogkan metode dalam *Islamic studies* konvensional berkarakteristik deduktif-normatif-teologis dengan metode *humanities studies* kontemporer seperti sosiologi, antropologi, psikologi, ekonomi, hermeneutik, fenomenologi dan juga dengan metode ilmu eksakta (*natural sciences*) yang berkarakter induktif-rasional. Buku yang dikompetisikan dan diterbitkan pada Tahun 2021 sejumlah 75 buku referensi dan 20 buku ajar untuk kalangan dosen. Disamping kompetisi buku untuk dosen, FTK UIN Mataram juga menyelenggarakan kompetisi buku bagi mahasiswa. Ada 20 judul buku yang dikompetisikan dan telah disusun oleh mahasiswa. Hal ini tentunya menjadi suatu pencapaian yang patut untuk disyukuri dalam meningkatkan kemampuan literasi dan karya ilmiah semua civitas akademika UIN Mataram.

Mewakili Fakultas, saya berterima kasih atas kebijakan dan dukungan Rektor UIN Mataram dan jajarannya, kepada

penulis yang telah berkontribusi dalam tahapan kompetisi buku tahun 2021, dan tak terlupakan juga editor dari dosen sebidang dan penerbit yang tanpa sentuhan *ruangnya*, *performace* buku tak akan semenarik ini. Tak ada gading yang tak retak; tentu masih ada kurang, baik dari substansi maupun teknis penulisan, di ‘ruang’ inilah kami harapkan saran kritis dari khalayak pembaca. Semoga agenda ini menjadi *amal jariyah* dan hadirkan keberkahan bagi sivitas akademika UIN Mataram dan ummat pada umumnya.

Mataram, 25 Oktober 2021

Dekan



**Dr. Jumarim, M.H.I**

NIP. 197612312005011006



Halaman Sengaja Dikosongkan

## PRAKATA PENULIS

Puji syukur penulis panjatkan hanya ke hadirat Allah *Azga wa Jalla*, karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga Buku Referensi dengan judul “Distribusi Weibull: Konsep Dasar & Aplikasinya” ini dapat terselesaikan. Selanjutnya shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan alam Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaibi Wasallam* yang menuntun kita kepada jalan yang benar.

Buku ini menyajikan secara rinci baik secara teori dan aplikasi, berdasarkan hasil riset dan studi literatur, tentang model Weibull, sebagai salah satu distribusi yang populer digunakan untuk memodelkan fenomena keseharian terkait alam, komponen mesin, dan kejadian fisis lainnya. Struktur buku referensi ini terdiri dari lima bab, mulai dari ikhtisar umum hingga aplikasi model Weibull pada kebijakan garansi produk mesin fotokopi, sebagai contoh item yang dapat diperbaiki (*repairable*).

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk kesempurnaan isi buku ini. Akhirnya semoga buku ini dapat digunakan sebagai referensi dalam dunia sains dan pendidikan, serta memberikan manfaat baik untuk pembacanya.

Mataram, 1 September 2021

Indira Puteri Kinasih





## **BAB I**

### **IKHTISAR: PEMODELAN EMPIRIS**

#### **A. PENDAHULUAN**

Permasalahan pada dunia nyata muncul dalam banyak konteks berbeda. Pemecahan masalah tersebut adalah suatu kegiatan yang sejarahnya menyamai usia umat manusia. Model telah memainkan peran penting dalam pemecahan masalah dan dapat ditelusuri kembali jauh melampaui catatan sejarah umat manusia. Berbagai macam model telah digunakan. Ini termasuk model fisik (penuh atau skala), model bergambar, model analog, model deskriptif, model simbolik, dan model matematika. Penggunaan model matematika relatif baru (kira-kira 500 tahun terakhir). Awalnya, model matematika digunakan untuk memecahkan masalah dari ilmu fisika (misalnya, memprediksi gerakan planet, waktu pasang surut), tetapi, selama beberapa ratus tahun terakhir, model matematika telah digunakan secara luas dalam memecahkan masalah dari ilmu biologi dan sosial. Hampir tidak ada disiplin ilmu di mana model matematika belum digunakan untuk memecahkan masalah.

Dua pendekatan berbeda untuk membangun model matematika adalah sebagai berikut:

1. **Pemodelan Berbasis Teori.** Di sini, pemodelan didasarkan pada teori-teori yang telah mapan (dari ilmu fisika, biologi, dan sosial) yang relevan dengan masalah tersebut. Model semacam ini disebut juga model berbasis fisika atau model *white-box* sebagai mekanisme yang mendasari pembentukan model.

2. **Pemodelan Empiris.** Di sini, data yang tersedia menjadi dasar untuk pembuatan model, dan tidak memerlukan pemahaman tentang mekanisme yang mendasari yang terlibat. Dengan demikian,

model ini digunakan ketika pemahaman yang kurang memadai untuk menggunakan pendekatan sebelumnya. Model semacam ini juga disebut model bergantung data atau model kotak hitam.

Dalam pemodelan empiris, jenis formulasi matematika yang dibutuhkan untuk pemodelan ditentukan oleh analisis awal dari data yang tersedia. Jika analisis menunjukkan bahwa ada tingkat variabilitas yang tinggi, maka perlu digunakan model yang dapat menangkap variabilitas ini. Ini membutuhkan model probabilistik dan stokastik untuk memodelkan kumpulan data tertentu.

Pemodelan empiris yang efektif membutuhkan pemahaman yang baik tentang (i) metodologi yang diperlukan untuk membangun model, (ii) properti model yang berbeda, dan (iii) alat dan teknik untuk menentukan apakah model tertentu sesuai untuk memodelkan kumpulan data tertentu.

Berbagai model seperti itu telah dikembangkan dan dipelajari secara ekstensif. Salah satu model kelas tersebut adalah model Weibull. Ini adalah kumpulan model probabilistik dan stokastik yang berasal dari distribusi Weibull. Ini dapat dibagi menjadi model univariat dan multivariat dan masing-masing, pada gilirannya, dapat dibagi lagi menjadi model kontinu dan diskrit. Model Weibull telah digunakan dalam banyak aplikasi berbeda untuk memodelkan kumpulan data yang kompleks.

## **B. ILUSTRASI MASALAH**

Pada bagian ini kami memberikan sedikit gambaran masalah dan jenis data yang tersedia untuk membangun model guna mendapatkan solusi dari masalah tersebut.

### **Contoh 1: Ketinggian Pasang Surut**

Di pantai turis yang populer, musim siklon mendahului musim turis. Air pasang yang sangat tinggi pada musim siklon menyebabkan erosi pasir di pantai. Erosi terkait dengan amplitudo air pasang, dan perlu waktu lama bagi pantai untuk pulih secara alami dari efek erosi tersebut. Seringkali, pasir perlu dipompa untuk memulihkan kehilangan dan untuk memastikan jumlah wisatawan yang tinggi. Masalah yang menarik bagi dewan kota yang bertanggung jawab atas pantai adalah kemungkinan bahwa air pasang selama musim siklon melebihi ketinggian tertentu yang mengakibatkan dewan

mengeluarkan biaya pemompaan pasir. Data yang tersedia adalah amplitudo pasang naik selama beberapa tahun.

### **Contoh 2: Khasiat Pengobatan**

Dalam ilmu kedokteran, masalah yang menarik adalah menentukan kemanjuran pengobatan baru untuk mengendalikan penyebaran penyakit (misalnya kanker). Dalam hal ini, uji klinis dilakukan untuk jangka waktu tertentu. Data yang tersedia adalah jumlah pasien yang masuk program, jangka waktu, dan usia kematian pasien yang meninggal selama masa uji coba, usia pasien yang selamat selama periode tes, dan sebagainya. Data serupa untuk sampel yang tidak diberi perlakuan baru mungkin juga tersedia. Masalahnya adalah untuk menentukan apakah pengobatan baru meningkatkan harapan hidup pasien.

### **Contoh 3: Kekuatan Komponen**

Karena variabilitas manufaktur, kekuatan suatu komponen sangat bervariasi. Komponen digunakan di lingkungan di mana ia langsung gagal saat digunakan jika kekuatannya di bawah beberapa nilai yang ditentukan. Masalahnya adalah untuk menentukan probabilitas bahwa komponen yang diproduksi akan gagal dalam lingkungan tertentu. Jika probabilitas ini tinggi, mengubah material, proses manufaktur, atau mendesain ulang mungkin merupakan alternatif yang mungkin perlu dieksplorasi oleh pabrikan. Data yang tersedia adalah data uji laboratorium. Di sini item mengalami peningkatan tingkat stres dan tingkat stres saat kegagalan dicatat.

### **Contoh 4: Klaim Asuransi**

Setiap kali ada klaim yang sah, perusahaan asuransi mobil harus membayar. Pembayaran menunjukkan tingkat variabilitas yang tinggi (karena dapat bervariasi dari jumlah yang kecil hingga yang sangat besar). Perusahaan asuransi telah menggunakan nilai yang diharapkan sebagai dasar untuk menentukan premi tahunan yang harus dibebankan kepada pelanggannya. Ia berencana untuk mengubah premi dan tertarik untuk menilai probabilitas klaim individu melebihi lima kali premi yang dibebankan. Data yang tersedia adalah klaim asuransi selama beberapa tahun terakhir.

### **Contoh 5: Pertumbuhan Pohon**

Pembuatan kertas membutuhkan serpihan kayu. Salah satu cara untuk menghasilkan kayu serpih adalah melalui perkebunan dimana pohon dipanen pada saat pohon mencapai umur tertentu. Ketinggian pohon pada saat pemanenan sangat penting karena volume serpihan kayu yang diperoleh berkaitan dengan ketinggian tersebut. Ketinggian pohon sangat bervariasi. Akibatnya, hasil suatu perkebunan dapat sangat bervariasi, dan hal ini berdampak pada profitabilitas operasi. Operator perkebunan dihadapkan pada masalah memilih di antara dua jenis pohon yang berbeda. Data yang tersedia (dari perkebunan lain) adalah tinggi pohon pada saat pemanenan untuk kedua spesies tersebut.

### **Contoh 6: Perawatan Lampu Jalan**

Umur lampu listrik yang digunakan untuk penerangan jalan tidak pasti dan dipengaruhi oleh berbagai faktor (variabilitas bahan yang digunakan dan dalam proses pembuatannya, fluktuasi tegangan listrik, dll.). Penggantian item gagal individu umumnya mahal. Dalam hal ini otoritas jalan raya dapat memutuskan beberapa tindakan pemeliharaan preventif di mana lampu diganti dengan yang baru pada waktu yang ditentukan  $t = kT$ ;  $k = 1, 2, \dots$ . Biaya penggantian bohlam berdasarkan kebijakan penggantian seperti itu jauh lebih murah, tetapi ini melibatkan pembuangan sisa masa pakai bohlam. Setiap kegagalan di antara hasil di item yang gagal diganti dengan yang baru dengan biaya yang jauh lebih tinggi. Masalah yang dihadapi otoritas adalah menentukan  $T$  optimal yang meminimalkan biaya yang diharapkan. Data yang tersedia adalah catatan sejarah kegagalan dan penggantian preventif di masa lalu.

### **Contoh 7: Tegangan pada Anjungan Lepas Pantai**

*Platform* lepas pantai harus dirancang untuk menahan hentakan ombak. Dampak setiap gelombang pada struktur ditentukan oleh energi yang terkandung dalam gelombang tersebut. Ketinggian gelombang merupakan indikator energi dalam gelombang. Data yang tersedia adalah ketinggian gelombang yang berurutan selama interval waktu tertentu, dan ini menunjukkan tingkat variabilitas yang tinggi. Masalahnya adalah untuk menentukan risiko runtuhnya anjungan

lepas pantai jika dirancang untuk menahan gelombang hingga ketinggian tertentu.

### **Contoh 8: Kecepatan Angin**

Kincir angin adalah struktur yang memanfaatkan energi angin dan mengubahnya menjadi energi listrik atau mekanik. Kecepatan angin berfluktuasi, dan akibatnya keluaran kincir angin berfluktuasi. Kelangsungan aspek ekonomis kincir angin bergantung pada kemampuannya untuk menghasilkan tingkat output minimum tertentu untuk sebagian kecil hari. Masalahnya adalah menentukan kelangsungan hidup kincir angin berdasarkan data kecepatan angin yang diukur setiap 5 menit selama seminggu.

### **Contoh 9: Peledakan Batu**

Penambangan melibatkan peledakan pembentukan bijih menggunakan bahan peledak. Efek ledakan adalah memecah bijih menjadi ukuran yang berbeda. Bijih yang lebih kecil dari ukuran tabel minimum yang diterima tidak memiliki nilai karena tidak cocok untuk diproses. Gumpalan bijih yang lebih besar dari ukuran maksimum yang dapat diterima perlu dipecah, yang melibatkan biaya tambahan. Masalah yang menjadi perhatian operator tambang adalah untuk menentukan distribusi ukuran bijih di bawah strategi peledakan yang berbeda sehingga dapat memutuskan strategi peledakan terbaik. Dalam hal ini, data yang tersedia adalah distribusi ukuran bijih yang diambil sampelnya secara acak setelah ledakan.

### **Contoh 10: Perencanaan Suku Cadang**

Untuk peralatan komersial (mis., Pesawat terbang, lokomotif), waktu henti berarti hilangnya pendapatan. Waktu henti terjadi karena kegagalan satu atau lebih komponen peralatan. Kegagalan suatu komponen bergantung pada keandalan komponen. Waktu henti tergantung pada apakah cadangan tersedia atau tidak dan waktu untuk mendapatkan cadangan jika tidak tersedia. Ketika komponen mahal, persediaan suku cadang harus dikelola dengan baik. Membawa inventaris besar menyiratkan terlalu banyak modal yang diikat. Di sisi lain, memiliki inventaris kecil dapat menyebabkan waktu henti yang tinggi. Masalahnya adalah menentukan persediaan suku cadang yang

optimal untuk komponen. Data yang tersedia adalah waktu kegagalan untuk berbagai komponen selama periode waktu tertentu.

### **C. METODE PEMODELAN EMPIRIS**

Pada bagian ini kami memberikan sedikit gambaran masalah dan jenis data yang tersedia untuk membangun model guna mendapatkan solusi dari masalah tersebut.

Proses pemodelan empiris melibatkan lima langkah berikut:

Langkah 1: Mengumpulkan data

Langkah 2: Analisis data

Langkah 3: Pemilihan model

Langkah 4: Estimasi parameter

Langkah 5: Validasi model

Di bagian ini kami membahas secara singkat masing-masing langkah ini.

#### **Langkah 1: Mengumpulkan Data**

Data dapat berupa data laboratorium atau data lapangan. Data laboratorium sering kali diperoleh di bawah lingkungan yang terkendali dan berdasarkan pada eksperimen yang direncanakan dengan baik. Sebaliknya, data lapangan menderita variabilitas dalam lingkungan operasi serta faktor tak terkendali lainnya.

Bentuk datanya bisa bermacam-macam. Dalam kasus data reliabilitas, itu dapat dinilai secara kontinu (misalnya, umur item individu) atau nilai diskrit (misalnya, jumlah item yang gagal dalam interval tertentu). Dalam kasus sebelumnya, ini bisa mewakili waktu kegagalan atau waktu yang disensor (nyawa item yang tidak gagal saat pengumpulan data dihentikan) untuk item.

Akhirnya, ketika data yang diperlukan untuk pemodelan tidak tersedia, seseorang perlu mengumpulkan data berdasarkan eksperimen yang tepat pada penilaian ahli dalam beberapa kasus. Percobaan, secara umum, bersifat spesifik disiplin. Kami akan membahas masalah ini dalam konteks keandalan produk nanti di buku ini.

## Langkah 2: Analisis Data Awal

Mengingat kumpulan data, seseorang memulai dengan analisis data awal. Misalkan kumpulan data yang tersedia diberikan oleh  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Pada tahap pertama, seseorang menghitung berbagai statistik sampel (seperti maks, min, mean, varians sampel, median, dan kuartil pertama dan ketiga) berdasarkan data. Jika rentang relatif kecil terhadap rata-rata sampel, orang mungkin mengabaikan variabilitas dalam data dan memodelkan data dengan rata-rata sampel. Namun, jika tidak demikian, maka model perlu meniru variabilitas dalam data ini. Dalam kasus data berurutan waktu, analisis pendahuluan digunakan untuk menentukan properti seperti tren (naik atau turun), korelasi dari waktu ke waktu, dan sebagainya.

Tujuan utama dari analisis ini adalah untuk membantu dalam menentukan apakah model tertentu sesuai atau tidak untuk memodelkan kumpulan data tertentu. Banyak plot berbeda telah dikembangkan untuk membantu hal ini. Beberapa dari plot ini (misalnya, histogram) bersifat umum dan lainnya (misalnya, plot kertas probabilitas Weibull) pada awalnya dikembangkan untuk model tertentu tetapi sejak itu telah digunakan untuk kelas model yang lebih luas.

## Langkah 3: Pemilihan Model

Misalkan kumpulan data  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  menunjukkan variabilitas yang signifikan. Dalam hal ini kumpulan data perlu dilihat sebagai nilai pengamatan dari kumpulan variabel acak  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . Jika variabel acak secara statistik independen, maka setiap  $T$  dapat dimodelkan dengan fungsi distribusi probabilitas univariat:

$$F(t; \theta) = P(T \leq t) \quad , -\infty < t < \infty$$

di mana  $\theta$  menunjukkan himpunan parameter untuk distribusi tersebut. Dalam beberapa kasus, kisaran  $t$  dibatasi. Misalnya, jika  $T$  merepresentasikan masa pakai suatu item, maka dibatasi menjadi non-negatif sehingga  $F(t; \theta)$  adalah nol untuk  $t < 0$ .

Pemilihan model melibatkan pemilihan formulasi model yang sesuai (misalnya, fungsi distribusi) untuk memodelkan kumpulan data tertentu. Untuk melaksanakan langkah ini, seseorang perlu memiliki pemahaman yang baik tentang sifat-sifat dari formulasi model yang

berbeda yang cocok untuk pemodelan. Beberapa konsep dasar dibahas dalam Bab 3. Teori probabilitas juga akan berkaitan dengan studi ini dalam konteks kegunaannya untuk formulasi model. Fitur penting dari pemodelan adalah seringkali akan ada lebih dari satu bentuk model yang dapat memodelkan kumpulan data tertentu. Dengan kata lain, seseorang dapat memiliki beberapa model untuk kumpulan data tertentu.

Sumber data sering kali memberikan petunjuk untuk pemilihan model yang sesuai. Dalam kasus data kerusakan, misalnya, distribusi lognormal atau Weibull telah digunakan untuk memodelkan kerusakan karena kelelahan dan distribusi eksponensial untuk kegagalan komponen elektronik. Untuk dapat memanfaatkan pengetahuan ini, pembuat model harus terbiasa dengan model sebelumnya untuk kegagalan item yang berbeda.

Jika datanya tidak independen, kita perlu menggunakan model yang melibatkan fungsi distribusi multivariat. Jika waktu merupakan faktor yang perlu dimasukkan dalam model secara eksplisit, maka model menjadi lebih kompleks. Pembangunan model seperti itu membutuhkan konsep proses stokastik.

#### **Langkah 4: Estimasi Parameter**

Setelah model dipilih, kita perlu memperkirakan parameter model. Estimasi diperoleh dengan menggunakan data yang tersedia. Beragam teknik telah dikembangkan, dan ini secara luas dapat dibagi menjadi dua kategori — grafis dan analitis. Keakuratan perkiraan bergantung pada ukuran data dan metode yang digunakan. Metode grafis menghasilkan perkiraan kasar sedangkan metode analisis menghasilkan perkiraan yang lebih baik dan batas kepercayaan untuk perkiraan tersebut. Konsep dasar dibahas di Bab 4 dan di bab selanjutnya dalam konteks model tertentu.

#### **Langkah 5: Validasi Model**

Model selalu dapat disesuaikan dengan kumpulan data tertentu. Namun, modelnya mungkin tidak sesuai atau memadai. Model yang tidak tepat, secara umum, tidak akan menghasilkan solusi yang diinginkan untuk masalah tersebut. Oleh karena itu, perlu dilakukan pengecekan keabsahan model yang dipilih.

## Catatan

1. Langkah 2, 4, dan 5 berhubungan dengan inferensi statistik. Dalam teori probabilitas, seseorang memodelkan ketidakpastian (keacakan) melalui fungsi distribusi, dan kemudian membuat pernyataan, berdasarkan model, tentang sifat (misalnya, variabilitas) data yang mungkin dihasilkan jika modelnya benar. Tujuan utama dari inferensi statistik adalah menggunakan data untuk membuat pernyataan tentang model, baik dalam hal distribusi probabilitas itu sendiri atau dalam parameternya atau beberapa karakteristik lainnya. Dengan demikian, teori probabilitas dan inferensi statistik dapat dianggap sebagai kebalikan satu sama lain seperti yang ditunjukkan:

Teori probabilitas:      Model  $\rightarrow$  Data  
Statistik Data:          Data  $\rightarrow$  Model

2. Inferensi statistik membutuhkan konsep, alat, dan teknik dari teori statistik. Memahami model membutuhkan mempelajari sifat-sifat model. Untuk itu diperlukan konsep, alat, dan teknik dari teori probabilitas dan teori proses stokastik.
3. Dalam buku ini kita membahas properti model dan inferensi statistik untuk model Weibull.

## D. MODEL WEIBULL

### 1. Perspektif Historis

Distribusi Weibull 3 parameter dirupakan dalam suatu fungsi distribusi

$$F(t; \theta) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t-\gamma}{\alpha} \right)^\beta \right] , \quad t \geq \gamma \quad (1.1)$$

Parameter distribusi diberikan oleh himpunan  $\theta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  dengan  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , dan  $\gamma \geq 0$ . Parameter  $\alpha, \beta, \gamma$  masing-masing adalah parameter skala, parameter bentuk, dan parameter lokasi distribusi. Distribusi ini dinamai Waloddi Weibull yang merupakan orang pertama yang mempromosikan kegunaan ini untuk memodelkan kumpulan data dengan karakter yang sangat berbeda.

Studi awal oleh Weibull (Weibull, 1939) muncul di jurnal Skandinavia dan membahas kekuatan material. Sebuah studi berikutnya dalam bahasa Inggris (Weibull, 1951) adalah sebuah karya penting di mana ia memodelkan kumpulan data dari berbagai disiplin ilmu dan mempromosikan keserbagunaan model dalam hal penerapannya dalam berbagai disiplin ilmu.

Model serupa telah diusulkan sebelumnya oleh Rosen dan Rammler (1933) dalam konteks pemodelan variabilitas dalam diameter partikel bubuk yang lebih besar dari ukuran tertentu. Publikasi paling awal yang diketahui berkaitan dengan distribusi Weibull adalah karya Fisher dan Tippet (1928) di mana distribusi ini diperoleh sebagai distribusi pembatas dari ekstrem terkecil dalam sampel. Gumbel (1958) menyebut distribusi Weibull sebagai distribusi asimtotik ketiga dari ekstrem terkecil.

Meskipun Weibull bukan orang pertama yang mengusulkan distribusi tersebut, dia berperan penting dalam promosinya sebagai model yang berguna dan serbaguna dengan penerapan yang luas. Sebuah laporan oleh Weibull (Weibull, 1977) mendaftar lebih dari 1000 referensi ke aplikasi model Weibull dasar, dan pencarian terbaru dari berbagai basis data menunjukkan bahwa ini telah meningkat dengan faktor 3 sampai 4 selama 30 tahun terakhir.

## 2. Taksonomi

Distribusi Weibull dua parameter adalah kasus khusus (1.1) dengan  $\gamma = 0$  sehingga

$$F(t; \theta) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

Kami akan merujuk ini sebagai model Weibull standar dengan  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  masing-masing menjadi parameter skala dan bentuk. Model dapat ditulis dalam bentuk parametrik alternatif seperti yang ditunjukkan di bawah ini:

$$F(t; \theta) = 1 - \exp \left[ - (\lambda t)^\beta \right] \quad (1.3)$$

dengan  $\lambda = 1/\alpha$ ;

$$F(t; \theta) = 1 - \exp \left[ - \frac{t^\beta}{\alpha'} \right] \quad (1.4)$$

dengan  $\alpha' = \alpha^\beta$ ; dan

$$F(t; \theta) = 1 - \exp[-\lambda' t^\beta] \quad (1.5)$$

dengan  $\lambda' = (1/\alpha)^\beta$ .

Meskipun semuanya setara, tergantung pada konteksnya, representasi parametrik tertentu mungkin lebih tepat. Di sisa buku ini, formula untuk model Weibull standar adalah persamaan (1.1) kecuali disebutkan lain.

Berbagai model telah berkembang dari model standar ini. Kami mengusulkan taksonomi untuk mengklasifikasikan model-model ini, dan melibatkan tujuh kategori utama berlabel Tipe I hingga VII. Pada bagian ini, kami membahas secara singkat dasar taksonomi, dan model yang berbeda di setiap kategori dibahas dalam Bab 2.

Misalkan  $T$  menunjukkan variabel acak dari model Weibull standar. Misalkan fungsi distribusi untuk model turunan menjadi  $G(t; \theta)$ , dan misalkan  $Z$  menunjukkan variabel acak dari distribusi ini. Hubungan antara Weibull standar dan tujuh kategori model Weibull yang berbeda adalah sebagai berikut:

**Model Tipe I** Di sini  $Z$  dan  $T$  terkait dengan transformasi. Transformasinya dapat berupa (i) linier atau (ii) non-linier.

**Model Tipe II** Di sini  $G(t; \theta)$  terkait dengan  $F(t; \theta)$  melalui beberapa hubungan fungsional.

**Model Tipe III** Ini adalah model univariat yang berasal dari dua atau lebih distribusi dengan satu atau lebih sebagai distribusi Weibull standar. Akibatnya,  $G(t; \theta)$  adalah fungsi distribusi univariat yang melibatkan satu atau lebih distribusi Weibull standar.

**Model Tipe IV** Parameter model Weibull standar adalah konstan. Untuk model yang termasuk dalam grup ini, bukan itu masalahnya. Akibatnya, mereka adalah salah satu fungsi dari variabel  $t$  atau beberapa variabel lain (seperti tingkat stres) atau variabel acak.

**Model Tipe V** Dalam model Weibull standar, variabel  $t$  bernilai kontinu dan dapat mengasumsikan nilai apa pun dalam interval  $[0, \infty)$ . Akibatnya,  $T$  adalah variabel acak kontinu. Sebaliknya, untuk model Tipe V,  $Z$  hanya dapat mengasumsikan nilai-nilai yang tidak negatif, dan ini mendefinisikan dukungan untuk  $G(t; \theta)$ .

**Model Tipe VI** Model Weibull standar adalah model univariat. Model tipe VI adalah ekstensi multivariat dari model Weibull standar. Hasilnya,  $G(\cdot)$  adalah fungsi multivariat dengan bentuk  $G(t_1, t_2, \dots, t_n)$  dan terkait dengan standar Weibull dalam beberapa hal.

**Model Tipe VII** Ini adalah model proses titik stokastik dengan tautan ke model Weibull standar.

## **E. PEMILIHAN MODEL WEIBULL**

Pemilihan model cenderung menjadi proses coba-coba. Untuk model Tipe I hingga III, plot kertas probabilitas Weibull menyediakan prosedur sistematis untuk menentukan apakah salah satu dari model ini cocok untuk pemodelan kumpulan data tertentu atau tidak. Ini didasarkan pada transformasi Weibull

$$y = \ln\{-\ln[1 - F(t)]\} \text{ dan } x = \ln(t)$$

Plot  $y$  versus  $x$  disebut plot probabilitas Weibull. Pada awal 1970-an, studi khusus dikembangkan untuk memplot data di bawah transformasi ini dan disebut sebagai kertas probabilitas Weibull (WPP) dan plot itu disebut plot WPP. Saat ini, sebagian besar paket perangkat lunak yang dapat diandalkan berisi program untuk menghasilkan plot ini secara otomatis dengan kumpulan data. Kami menggunakan istilah plot WPP untuk menunjukkan plot menggunakan paket komputer.

## **F. APLIKASI DARI MODEL WEIBULL**

Model Weibull telah digunakan dalam banyak aplikasi berbeda dan untuk memecahkan berbagai masalah dari berbagai disiplin ilmu. Tabel 1.1 memberikan contoh kecil penerapan model Weibull bersama dengan referensi di mana pembaca yang tertarik dapat menemukan detail lebih lanjut.

### **1. Aplikasi Keandalan**

Semua sistem buatan manusia (mulai dari produk sederhana hingga sistem kompleks) tidak dapat diandalkan dalam arti bahwa sistem tersebut menurun seiring waktu dan / atau penggunaan dan akhirnya gagal. Bahan berikut ini dari Blischke dan Murthy (2000).

Keandalan suatu produk (sistem) adalah probabilitas bahwa produk (sistem) akan menjalankan fungsi yang dimaksudkan untuk jangka waktu tertentu ketika beroperasi dalam kondisi lingkungan normal (atau yang dinyatakan).

## 2. Siklus Hidup dan Keandalan Produk

Siklus hidup produk (untuk konsumen tahan lama atau produk industri), dari sudut pandang pabrikan, adalah waktu dari konsep awal produk hingga penarikannya dari pasar. Ini melibatkan beberapa tahapan.

Prosesnya dimulai dengan ide untuk membangun sebuah produk untuk memenuhi beberapa persyaratan pelanggan mengenai target kinerja (termasuk keandalan). Ini biasanya didasarkan pada studi pasar dan permintaan potensial untuk produk yang direncanakan. Langkah selanjutnya adalah melakukan studi kelayakan. Ini melibatkan evaluasi apakah mungkin untuk mencapai target dalam batas biaya yang ditentukan. Jika analisis ini menunjukkan bahwa proyek tersebut layak, desain produk awal dilakukan. Sebuah prototipe kemudian dikembangkan dan diuji. Bukan hal yang aneh pada tahap ini untuk menemukan bahwa tingkat kinerja yang dicapai dari produk prototipe berada di bawah nilai target. Dalam hal ini dilakukan pengembangan produk lebih lanjut untuk mengatasi masalah tersebut. Setelah ini tercapai, langkah selanjutnya adalah melakukan uji coba untuk menentukan kinerja produk di lapangan dan memulai proses praproduksi. Ini diperlukan karena proses manufaktur harus disetel dengan baik dan prosedur kendali mutu ditetapkan untuk memastikan bahwa barang yang diproduksi memiliki karakteristik kinerja yang sama dengan prototipe akhir. Setelah ini, upaya produksi dan pemasaran dimulai. Barang diproduksi dan dijual. Produksi berlanjut sampai produk tersebut dikeluarkan dari pasar karena keusangan dan / atau peluncuran produk baru.

Kami memfokuskan perhatian kami pada keandalan produk selama siklus hidupnya. Studi kelayakan dilakukan dengan menggunakan nilai target yang ditentukan untuk keandalan produk. Selama tahap desain, keandalan produk dinilai dari segi keandalan bagian dan komponen. Keandalan produk meningkat seiring dengan peningkatan desain. Namun, peningkatan ini memiliki batas atas. Jika nilai target di bawah batas ini, maka desain yang menggunakan suku cadang dan komponen yang tersedia mencapai nilai target yang diinginkan. Jika tidak, maka program pengembangan untuk meningkatkan keandalan melalui siklus uji-perbaikan-uji diperlukan. Di sini prototipe diuji sampai terjadi kegagalan dan dianalisis

penyebab kegagalannya. Berdasarkan ini, desain dan / atau perubahan manufaktur diperkenalkan untuk mengatasi penyebab kegagalan yang teridentifikasi. Proses ini dilanjutkan hingga target reliabilitas tercapai.

Keandalan item yang diproduksi selama proses pra produksi biasanya di bawah keandalan prototipe akhir. Hal ini disebabkan oleh variasi yang dihasilkan dari proses pembuatannya. Melalui proses dan kontrol kualitas yang tepat, variasi ini diidentifikasi dan dikurangi atau dihilangkan, dan keandalan item yang diproduksi ditingkatkan hingga mencapai nilai target. Setelah ini tercapai, produksi skala penuh dimulai dan item dilepaskan untuk dijual.

Keandalan item yang digunakan memburuk seiring bertambahnya usia. Kerusakan ini dipengaruhi oleh beberapa faktor, termasuk lingkungan, kondisi pengoperasian, dan pemeliharaan. Laju kerusakan dapat dikontrol melalui pemeliharaan preventif.

Perlu dicatat bahwa jika nilai target keandalan terlalu tinggi, mereka mungkin tidak dapat dicapai dengan pengembangan. Dalam hal ini, pabrikan perlu merevisi nilai target dan memulai dengan studi kelayakan baru sebelum melangkah lebih jauh.

Model Weibull telah digunakan tidak hanya untuk memodelkan keandalan produk tetapi juga untuk mempelajari masalah lain dalam berbagai tahapan siklus hidup produk. Kami dapat mengelompokkan tahapan yang berbeda menjadi dua kelompok: (i) premanufaktur dan (ii) pascaproduksi. Yang pertama berurusan dengan masalah seperti penilaian keandalan, pengujian yang dipercepat, dan pertumbuhan keandalan, dan yang terakhir dengan masalah seperti pemeliharaan dan jaminan.



## **BAB II**

### **TAKSONOMI MODEL WEIBULL**

#### **A. PENDAHULUAN**

Dalam Bab 1 kami memaparkan taksonomi untuk mengkategorikan model Weibull ke dalam kategori yang berbeda. Dalam bab ini kami memberikan detail yang tepat dari formulasi model dan gambaran singkat tentang hubungan antar model. Rincian spesifik model dibahas di bab selanjutnya. Kami telah mempertahankan terminologi asli sejauh mungkin sementara notasi telah dimodifikasi untuk memastikan konsistensi dalam presentasi.

Garis besar bab tersebut adalah sebagai berikut. Dalam Bagian B kami menunjukkan dasar taksonomi. Taksonomi melibatkan tujuh kategori (berlabel Tipe I hingga VII). Bagian C hingga I membahas model yang berbeda untuk masing-masing dari tujuh kategori. Untuk beberapa model, penulis/perangkai model telah mengusulkan sebuah nama. Karena kurangnya terminologi yang konsisten, dalam beberapa kasus nama yang sama telah digunakan untuk dua model yang berbeda dan dalam beberapa kasus lain model yang sama telah dipanggil dengan lebih dari satu nama.

#### **B. TAKSONOMI UNTUK MODEL WEIBULL**

Taksonomi model Weibull meliputi tujuh kategori dan setiap kategori dapat terbagi menjadi beberapa sub-kategori. Pada bagian ini, kita mendiskusikan dasar dari pengelompokan ini, dan mencoba memberikan struktur pada model-model yang berbeda pada setiap sub-kategori.

Titik awalnya adalah model Weibull standar yang diberikan oleh persamaan (1.2). Misalkan  $G(t; \theta)$  menotasikan turunan model Weibull;  $T$  adalah variabel acak dari  $F(t; \theta)$  dan  $Z$  adalah variabel acak dari  $G(t; \theta)$

### 1. Model Tipe I: Transformasi dari Variabel Weibull

Untuk model ini,  $Z$  dan  $T$  dihubungkan dengan transformasi. Transformasinya dapat berupa (a) linier atau (b) nonlinier. Berdasarkan ini kami memiliki dua sub-kelompok berikut.

**Tipe I (a):** Transformasi Linear Ini menghasilkan empat model: Model I (a) -1 hingga Model I (a) -4.

**Tipe I (b):** Transformasi Nonlinier Ini menghasilkan tiga model: Model I (b) -1 hingga Model I (b) -3.

### 2. Model Tipe II: Modifikasi / Generalisasi Distribusi Weibull

Untuk model ini  $G(t; \theta)$  terkait dengan  $F(t; \theta)$  melalui beberapa hubungan. Seseorang dapat membaginya menjadi dua sub-kelompok.

**Tipe II (a)** Ini tidak melibatkan parameter tambahan dan karenanya dapat dipandang sebagai model yang dimodifikasi. Ada dua model: Model II (a) -1 dan II (a) -2.

**Tipe II (b)** Ini melibatkan satu atau lebih parameter tambahan dan karenanya dapat dilihat sebagai model umum karena model Weibull standar diperoleh sebagai kasus khusus dari model ini. Ada 13 model: Model II (b) -1 hingga II (b) -13.

### 3. Model Tipe III: Model yang Melibatkan Dua atau Lebih Distribusi

Model ini adalah model univariat yang berasal dari dua atau lebih distribusi dengan setidaknya satu adalah model Weibull standar atau distribusi yang diturunkan darinya. Seseorang dapat membaginya menjadi empat subkelompok seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

**Tipe III (a)** Model campuran

**Tipe III (b)** Model *Competing Risk*

**Tipe III (c)** Model perkalian.

**Tipe III (d)** Model *Sectional*

Masing-masing berisi beberapa model tergantung pada jumlah distribusi yang terlibat, apakah satu atau lebih dari distribusi tersebut non-Weibull dan bentuk dari distribusi non-Weibull.

#### **4. Model Tipe IV: Model Weibull dengan Parameter yang Bervariasi**

Parameter model Weibull standar adalah konstan. Untuk model yang termasuk dalam grup ini, hal itu sudah tidak lagi berlaku. Akibatnya, model ini akan berupa fungsi dari variabel bebas  $t$  atau beberapa variabel lain (seperti tingkat stres), atau variabel acak. Ini mengarah ke tiga sub-kelompok berikut.

**Tipe IV (a)** Parameter adalah fungsi dari variabel  $t$  (parameter yang berubah-ubah menurut waktu jika  $t$  mewakili waktu).

**Tipe IV (b – d)** Parameter adalah fungsi dari beberapa variabel lain (regresi model, model bahaya proporsional, dll.).

**Tipe IV (e)** Parameter adalah variabel acak (model Bayesian).

#### **5. Model Tipe V: Model Weibull Diskrit**

Dalam model Weibull standar, variabel  $t$  kontinu dan dapat mengasumsikan nilai apa pun dalam interval  $[0, \infty)$ . Akibatnya,  $T$  adalah variabel acak kontinu. Sebaliknya, untuk model Tipe V,  $T$  hanya dapat mengasumsikan nilai integer nonnegatif, dan ini mendefinisikan dukungan untuk  $G(t, \theta)$ .

#### **6. Model Tipe V: Model Weibull Diskrit**

Model Weibull standar adalah model univariat. Model tipe VI adalah ekstensi multivariat dari model Weibull standar. Hasilnya,  $G(\cdot)$  adalah fungsi multivariat dari bentuk  $G(t_1, t_2, \dots, t_n)$  dan terkait dengan Weibull dasar dalam beberapa hal. Ini dapat dibagi menjadi dua kategori:

**Tipe VI (a)** model Weibull Bivariat.

**Tipe VI (b)** Model Weibull Multivariat.

Sekali lagi, ada beberapa model di bawah setiap subkategori.

## 7. Model Tipe VII: Model Proses Titik Stokastik

Ini adalah model proses titik stokastik dengan tautan ke model Weibull standar. Tiga subkelompok yang mendapat perhatian adalah sebagai berikut:

**Tipe VII (a)** Model fungsi intensitas Weibull

**Tipe VII (b)** Model proses pembaruan Weibull.

**Tipe VII (c)** *Power law* – Model pembaruan Weibull.

## 8. Notasi

Seringkali kita akan ‘menyembunyikan’ parameter untuk kenyamanan dalam menulis  $F(t)$  daripada  $F(t; \theta)$  dan serupa untuk  $F(t; \theta)$ . Untuk fungsi distribusi  $F(t)$  kami memiliki yang berikut:

- Fungsi densitas:  $f(t) = dF(t)/dt$ , jika turunannya ada.
- Fungsi *Survival*:  $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$
- Fungsi kegagalan (tingkat kegagalan):  $h(t) = f(t)/\bar{F}(t)$
- Fungsi kegagalan kumulatif:  $H(t) = \int_0^t h(x)dx$
- Kuantil:  $Q(u): F(Q(u)) = u, u \in [0,1]$

## C. MODEL TIPE 1: TRANSFORMASI DARI VARIABEL WEIBULL

### 1. Transformasi Linear

Misalkan diberikan transformasi linear berikut

$$Z = aT + b \quad (2.1)$$

### Model I(a)-1: Weibull 1 parameter

Misal dinotasikan  $a = 1/\alpha$  dan  $b = 0$  pada persamaan 2.1, sehingga menghasilkan

$$G(t) = 1 - \exp(-t^\beta), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

bentuk ini merupakan model Weibull satu parameter. Karakteristik untuk  $G(t)$  sama dengan  $F(t)$ . Perhatikan bahwa bentuk ini merupakan kasus khusus dari model Weibull standar dengan  $\alpha = 1$ .

### Model I(a)-2

Jika kita mengubah nilai parameter pada persamaan (2.1) menjadi  $a = 1$  dan  $b = \tau$ , maka dihasilkan

$$G(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq \tau \quad (2.3)$$

ini merupakan distribusi Weibull 3 parameter. Model ini dikarakteristikan dengan 3 parameter dan karakter  $G(t)$  berbeda dengan karakter  $F(t)$ .

Beberapa kasus khusus dan model ini adalah sebagai berikut:

$\beta = 1$ : distribusi eksponensial dua parameter

$\beta = 2$  dan  $\tau = 0$ : distribusi Rayleigh

### Model I(a)-3

Suku  $a = -1$  dan  $b = \tau$  pada persamaan (2.1) menghasilkan

$$G(t) = \exp\left[-\left(\frac{\tau-t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad -\infty < t < \tau \quad (2.4)$$

*Supports* untuk  $G(t)$  dan  $F(t)$  saling lepas. Model ini juga dapat dipandang sebagai refleksi dari model Weibull 3 parameter yang diberikan pada persamaan (1.1) dengan  $1 - G(t)$  merupakan citra cerminan dari  $F(t)$ . Model ini diajukan oleh Cohen (1973) dan disebut dengan distribusi Weibull terefleksi.

### Model I(a)-4

Model ini merupakan kombinasi dari model Weibull satu parameter seperti pada persamaan (2.2) dan refleksinya terhadap sumbu vertikal. Akibatnya, model ini memenuhi fungsi densitas seperti berikut

$$g(t) = \beta(1/2)|t|^{(\beta-1)}\exp(-|t|^\beta), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.5)$$

Perhatikan bahwa *support* untuk  $G(t)$  lebih besar dari model dasarnya. Model ini dibahas oleh Balakrishnan dan Kocherlakota (1985) dan disebut sebagai distribusi Weibull ganda.

## 2. Transformasi Non-Linear

### Model I(b)-1

Model ini diperoleh dengan menggunakan transformasi

$$\frac{z-\tau}{\eta} = \left(\frac{T}{\alpha}\right)^\beta \quad (2.6)$$

dan persamaannya diberikan oleh

$$G(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)^\beta\right], \quad t \geq \tau \quad (2.7)$$

sebagai hasilnya, *supports* dari  $G(t)$  akan lebih kecil dari rentang  $F(t)$ . Perhatikan bahwa ini merupakan distribusi eksponensial dua parameter. Model ini juga dapat digolongkan sebagai kasus khusus dari distribusi Weibull 3 parameter dengan parameter bentuk  $\beta = 1$ .

Jika  $\tau = 0$  pada persamaan (2.6), maka persamaan (2.7) akan menjadi distribusi eksponensial standar. Model ini juga dapat digolongkan sebagai kasus khusus dari model Weibull standar dengan parameter bentuk  $\beta = 1$ .

Transformasi pada persamaan (2.6) seringkali disebut sebagai transformasi *power law* yang menghubungkan antara distribusi Weibull dan distribusi eksponensial. Transformasi ini membentuk dasar dari beberapa model Weibull multivariat yang akan dipaparkan kemudian.

### Model I(b)-2

Model ini didapatkan dengan menggunakan transformasi berikut

$$\frac{z-\tau}{\eta} = \beta \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \quad (2.8)$$

dan diberikan oleh persamaan

$$G(t) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)\right], \quad -\infty < t < \infty \quad (2.9)$$

*Supports* untuk  $G(t)$  lebih dari *supports* untuk  $F(t)$ ;  $G(t)$  merupakan distribusi nilai ekstrim tipe I, sedangkan distribusi Weibull dasar itu sendiri terkait dengan distribusi Gumbel tipe II (Gumbel, 1958). Model ini juga secara umum disebut sebagai model Log Weibull.

Seperti pada model sebelumnya, nilai  $\tau = 0$  dan atau  $\eta = 1$  akan mengakibatkan munculnya bentuk-bentuk khusus lainnya.

### Model I(b)-3

Model berikut mengikuti transformasi berikut

$$Z = \alpha^2/T \tag{2.10}$$

dan diberikan oleh

$$G(t) = \exp[-(t/\alpha)^{-\beta}], \quad t \geq 0 \tag{2.11}$$

Ini mereferensi pada model Weibull invers. Model ini juga merupakan distribusi terbatas dari order statistik terbesar (tipe II distribusi asimptotik dari ekstrem terbesar). Drapella (1993) menyebutnya sebagai distribusi Weibull komplemen. Mudholkar dan Kollia (1994) menyebutnya sebagai distribusi Weibull resiprok.

## D. MODEL-MODEL TIPE II: MODIFIKASI/ GENERALISASI DARI DISTRIBUSI WEIBULL

Beberapa model pada kelompok ini, akan lebih baik mendeskripsikan model Weibull dalam bentuk fungsi kuantil. Untuk model Weibull standar, seperti pada persamaan (1.4), fungsi kuantilnya diberikan oleh persamaan

$$Q(u) = \alpha[-\ln(1 - u)]^{1/\beta} \tag{2.12}$$

### 1. Modifikasi dari Distribusi Weibull

#### Model II(a)-1

Fungsi densitas diberikan oleh persamaan

$$g(t) = \frac{t}{\mu} f(t), \quad t \geq 0 \tag{2.13}$$

dimana  $\mu$  merupakan mean dari variabel acak untuk model Weibull standar. Akibatnya,

$$g(t) = \frac{\beta t^\beta}{\alpha^{\beta+1} \Gamma(1+1/\beta)} \exp[-(t/\alpha)^\beta], \quad t \geq 0 \quad (2.14)$$

Catat bahwa  $G(t)$  tidak mungkin dapat diekspresikan secara analitik. Model ini diajukan oleh Voda (1989) dan disebut dengan distribusi pseudo-Weibull.

### Model II(a)-2

Fungsi distribusi model ini diberikan oleh

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta}, & \beta > 0 \\ e^{-(t/\alpha)^\beta}, & \beta < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan  $\beta$  dapat bernilai positif ataupun negatif. Ketika  $\beta > 0$ , model ini akan menjadi model Weibull standar, seperti pada persamaan (), dan ketika  $\beta < 0$ , model akan tereduksi menjadi model Weibull invers, seperti pada persamaan (1.4). Model ini merujuk pada Fisher dan Tippet (1928) dan Gumbel (1958). Model ini juga dibahas secara lebih eksplisit oleh Stacy dan Mihran (1965) dan disebut dengan distribusi Weibull generalized.

## 2. Modifikasi dari Distribusi Weibull

### Model II(b)-1

Model ini melibatkan satu parameter tambahan  $v > 0$ . Fungsi survival  $\bar{G}(t)$  diberikan oleh

$$\bar{G}(t) = \frac{v\bar{F}(t)}{F(t)+v\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0 \quad (2.16)$$

dengan  $F(t)$  diberikan oleh persamaan (1.5). Akibatnya

$$G(t) = 1 - \frac{ve^{-(\lambda t)^\beta}}{1-(1-v)e^{-(\lambda t)^\beta}} \quad (2.17)$$

Model ini diperkenalkan oleh Marshall dan Olkin (1997) dan disebut dengan distribusi Weibull *extended*. Perhatikan bahwa model akan tereduksi menjadi model Weibull standar ketika  $v = 1$ .

### Model II(b)-2

Model ini melibatkan satu parameter tambahan  $v \geq 0$  dan memenuhi persamaan berikut:

$$G(t) = 1 - \exp(-\lambda t^\beta e^{vt}), \quad t \geq 0 \quad (2.18)$$

dengan  $\lambda = (1/\alpha)^\beta$ . Model ini diperkenalkan oleh Lai, dkk. (2003) dan disebut sebagai distribusi Weibull modifikasi.

### Model II(b)-3

Model ini dideskripsikan dalam bentuk fungsi kuantil, diberikan oleh persamaan

$$Q(u) = \alpha [-\ln(1 - u)^{1/v}]^{1/\beta} \quad (2.19)$$

dan melibatkan satu parameter tambahan  $v > 0$ . Sebagai akibatnya, model ini memenuhi persamaan berikut

$$G(t) = [F(t)]^v = \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \right\}^v, \quad t \geq 0 \quad (2.20)$$

Ketika  $v = 1$ , model ini tereduksi menjadi distribusi Weibull standar sebagaimana persamaan (1.4). Model ini diajukan oleh Muldhokar dan Srivasatava (1993) dan disebut sebagai distribusi Weibull *exponentiated*.

### Model II(b)-4

Fungsi kuantil dari model adalah

$$Q(u) = \alpha \left[ \frac{1 - (1 - u)^v}{v} \right]^{1/\beta} \quad (2.21)$$

dengan  $v$  tidak berkonstrain sehingga  $-\infty < v < \infty$ . Ini mengakibatkan

$$G(t) = 1 - \left[ 1 - v \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right]^{1/v}, \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

Fitur menarik dari model adalah *supports* dari  $G(t)$  adalah  $(0, \infty)$  untuk  $v \leq 0$  dan  $(0, \alpha/v^{1/\beta})$  untuk  $v > 0$ . Model ini diajukan oleh Mudholkar, dkk. (1996) dan disebut dengan Model Weibull generalized. Catat bahwa model ini akan tereduksi menjadi model Weibull standar dua parameter ketika  $v \rightarrow 0$ .

### Model II(b)-5

Versi lain dari persamaan (2.21) adalah

$$Q(u) = \beta \left[ \frac{1-(1-u)v}{v} \right]^{1/\beta} - \beta \quad (2.23)$$

dengan  $v$  tidak berkonstrain sehingga  $-\infty < v < \infty$ . Dalam hal ini, parameter  $\beta$  dapat bernilai negatif sehingga model Weibull *inverse* merupakan kasus khusus dari distribusi ini. Hal ini mengakibatkan

$$G(t) = 1 - \left[ 1 - v \left( \frac{\beta+t}{\beta} \right)^\beta \right]^{1/v} \quad (2.24)$$

Rentang nilai  $G(t)$  bergantung pada parameter. Untuk  $\beta < 0$ , jika  $v < 0$ ,  $(-\infty, -\beta)$ ; dan jika  $v > 0$ ,  $(-\infty, (\beta/v^{1/\beta} - \beta))$ ; sedangkan untuk  $\beta > 0$ , jika  $v < 0$ ,  $(-\beta, \infty)$ ; dan jika  $v > 0$ ,  $(-\beta, \beta/v^{1/\beta} - \beta)$ . Model ini diajukan oleh Mudholkar dan Kolia (1994) dan disebut dengan model Weibull '*more generalized*'.

### Model II(b)-6

Model ini didefinisikan dalam bentuk fungsi kuantil, seperti pada persamaan berikut

$$Q(u) = \begin{cases} [(-\ln(1-u))^\beta - 1]/\beta, & \text{untuk } \beta \neq 0 \\ \ln(-\ln(1-u)), & \text{untuk } \beta = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

sebagai hasilnya,

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1 + \beta t)^{1/\beta}], & \text{untuk } \beta \neq 0 \\ 1 - \exp[-\exp(t)], & \text{untuk } \beta = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

rentang untuk  $G(t)$  bergantung pada parameternya, yaitu  $(-\infty, -1/\beta)$  untuk  $\beta < 0$ ,  $(-1/\beta, \infty)$  untuk  $\beta > 0$ , dan  $(-\infty, \infty)$  untuk  $\beta = 0$ . Model ini diperkenalkan oleh Freimer, dkk (1989) dan disebut sebagai distribusi Weibull extended.

### Model II(b)-7

Model ini dikemukakan oleh Stacy (1962). Model ini memiliki fungsi kepadatan sebagai berikut

$$g(t; \theta) = \frac{\alpha^{-\beta k} \beta t^{\beta k - 1}}{\Gamma(k)} \exp \left[ - \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right], t \geq 0 \quad (2.27)$$

dengan  $k > 0$ .  $\Gamma(\cdot)$  adalah fungsi Gamma [lihat Abramowitz and Stegun (1964)]. Ini disebut juga sebagai model gamma tergeneralisasi. Perhatikan jika  $k = 1$ , bentuk ini akan menjadi model Weibull standar dan jika  $\beta = 1$ , akan berubah menjadi distribusi gamma.

Model tambahan/ekstensi yang melibatkan parameter lokasi diajukan oleh Harter (1967) dan memiliki fungsi densitas sebagai berikut

$$g(t; \theta) = \frac{\alpha^{-\beta k} \beta (t - \tau)^{\beta k - 1}}{\Gamma(k)} \exp \left[ - \left( \frac{t - \tau}{\alpha} \right)^\beta \right], t \geq \tau \quad (2.28)$$

### Model II(b)-8

Ghitany (1998) mengajukan penambahan atau modifikasi pada persamaan (2.28) dan model tersebut memiliki fungsi densitas sebagai berikut:

$$g(t; \theta) = \frac{\alpha^{(m-1)/\beta + 1 - \lambda} \beta t^{m - \beta - 2} (n + t^\beta)^{-\lambda}}{\Gamma_\lambda[(m-1)/\beta, \alpha n]} \exp \left[ - \left( \frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad (2.29)$$

dengan parameter  $\theta = \{\alpha, \beta, \lambda, m, n\}$  dan  $\Gamma_\lambda(\cdot)$  merupakan fungsi Gamma incomplete [Lihat Abramowitz dan stegun (1964)].

Bentuk ini dapat dipandang sebagai perumuman model Gamma yang diperluas atau extended generalized gamma model.

Agarwal dan Al-Saleh (2001) kemudian mengajukan model berikut:

$$g(t; \theta) = \frac{\beta \lambda^\beta t^{\beta-1}}{\Gamma_\lambda(1, n) [(\lambda t)^\beta + n]^\delta} \exp[-(\lambda t)^\beta], \quad t \geq 0 \quad (2.30)$$

dengan  $\beta, n$ , dan  $\lambda > 0$  serta  $\delta \in [-1, 0]$ . Model ini disebut distribusi bertipe Weibull. Perhatikan bahwa bentuk ini akan menjadi distribusi Weibull dua parameter seperti pada persamaan (1.4) saat  $\delta = 0$ .

### Model II(b)-9

Model ini diajukan oleh Kies (1958) dan dituliskan sebagai berikut:

$$G(t) = 1 - \exp \left[ -\lambda \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^\beta \right], \quad 0 \leq a \leq t \leq b < \infty \quad (2.31)$$

dengan  $\lambda > 0$  dan  $\beta > 0$ . Model ini disebut sebagai distribusi Weibull empat parameter. Smith dan Hoeppner (1990) juga menggunakan model ini.

### Model II(b)-10

Phani (1987) mengembangkan model yang diajukan oleh Kies. Model tersebut dinyatakan sebagai berikut:

$$G(t) = 1 - \exp \left[ -\lambda \frac{(t-a)^{\beta_1}}{(b-t)^{\beta_2}} \right], \quad 0 \leq a \leq t \leq b < \infty \quad (2.32)$$

dengan  $\lambda > 0, \beta_1 > 0$ , dan  $\beta_2 > 0$ . Model ini disebut juga sebagai distribusi Weibull yang dimodifikasi atau distribusi Weibull lima parameter.

### Model II(b)-11

Model ini didapatkan dengan melakukan *truncation* pada model Weibull standar. Bentuknya ditampilkan sebagai berikut:

$$G(t) = \frac{F(t)-F(a)}{F(b)-F(a)}, \quad 0 < a \leq t \leq b < \infty \quad (2.33)$$

dengan  $F(t)$  diberikan oleh persamaan (1.4). Model ini mengacu pada model distribusi Weibull *doubly truncated*. Dua macam kasus khusus diberikan sebagai berikut:

1.  $a = 0$  dan  $b < \infty$ : *Right truncated Weibull distribution*
2.  $a > 0$  dan  $b \rightarrow \infty$ : *Left truncated Weibull distribution*

### Model II(b)-12

Slymen–Lachenbruce (1984) telah memodifikasi model Weibull yang disajikan dalam fungsi berikut:

□ □

$$G(t) = 1 - \exp \left[ -\exp \left( \alpha + \frac{\beta(t^k - t^{-k})}{2k} \right) \right] \quad (2.34)$$

Model ini tidak berkaitan dengan model Weibull standar tetapi berhubungan erat dengan transformasi Weibull.

### Model II(b)-13

Xie, dkk (2002b) memodifikasi model yang pertama kali diajukan oleh Chen (2000), model tersebut dinyatakan sebagai berikut:

$$G(t) = 1 - \exp \left[ \lambda \alpha \left( 1 - e^{(t/\alpha)^\beta} \right) \right], \quad t \geq 0 \quad (2.35)$$

dengan  $\lambda, \alpha, \beta > 0$ . Model ini disebut juga dengan Weibull *extension*. Ketika  $\alpha$  bernilai besar, kita dapat menuliskan  $e^{(t/\alpha)} \approx 1 + e^{(t/\alpha)}$  dan pada kasus ini, persamaan (2.35) akan menjadi distribusi Weibull dua parameter seperti pada persamaan (1.3).

## E. MODEL TIPE III: MODEL YANG MELIBATKAN DUA ATAU LEBIH DISTRIBUSI

Model ini melibatkan dua atau lebih distribusi dengan salah satu atau semuanya merupakan distribusi Weibull. Distribusi-distribusi yang terlibat disebut sebagai sub populasi.

## 1. Modifikasi dari Distribusi Weibull

Suatu model campuran  $n$ -fold yang melibatkan  $n$  subpopulasi diberikan oleh

$$G(t) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(t), \quad p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (2.36)$$

### Model III(a)-1

Pada kasus ini,  $F_i(t), i = 1, 2, \dots$  merupakan fungsi berdistribusi Weibull dengan dua atau tiga parameter. Model ini disebut Model Weibull berhingga campuran (*finite Weibull mixture model*). Dalam literatur, model ini disebut juga sebagai distribusi Weibull *aditive-mixed*, *bimodal-mixed Weibull*, distribusi Weibull *mixed-mode*, distribusi Weibull multimodal, dan lain sebagainya.

### Model III(a)-2

Ini sama dengan model III(a)-1 kecuali bahwa  $F_i(t)$  nya, dengan  $i = 1, 2, \dots$  adalah invers dari distribusi Weibull seperti diberikan di persamaan (2.11).

### Model III(a)-3

Ini sama dengan model III(a)-2 kecuali bahwa beberapa sub populasinya adalah distribusi Weibull, sedangkan sisanya adalah distribusi non-Weibull.

## 2. Model *Competing Risk*

Suatu model *competing risk*  $n$ -fold yang melibatkan  $n$  subpopulasi diberikan oleh

$$G(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(t)] \quad (2.37)$$

dalam beberapa literatur teori keandalan, model ini juga disebut sebagai model *compound*, model *series system*, model multi resiko, dan model poli Weibull (jika sub-populasinya berdistribusi Weibull).

### Model III(b)-1

Pada kasus ini  $F_i(t), i = 1, 2, \dots$  merupakan fungsi berdistribusi Weibull dengan dua parameter. Ketika  $\beta_i = \beta_j, i \neq j$  maka dua subpopulasi tersebut dapat disatukan ke dalam satu subpopulasi

dengan parameter  $\beta_i$ , sebagai akibatnya, model  $n$ -fold tereduksi menjadi model  $(n - 1)$ -fold. Karena itu, kita asumsikan tanpa mengurangi keumuman,  $\beta_i < \beta_j, i < j$ .

### Model III(b)-2

Ini sama dengan model III(b)-1 kecuali bahwa  $F_i(t)$  nya, dengan  $i = 1, 2, \dots$  adalah invers dari distribusi Weibull.

### Model III(b)-3

Ini sama dengan model III(b)-2 kecuali bahwa beberapa sub populasinya adalah distribusi Weibull, sedangkan sisanya adalah distribusi non-Weibull.

#### Catatan

- a. Shooman (1968) mengajukan model dengan fungsi *hazard* diberikan oleh persamaan

$$h(t) = \sum_{i=0}^n k_i t^i, \quad t \geq 0 \quad (2.38)$$

ketika  $k_i > 0$ , model ini adalah kasus khusus dari persamaan (2.37) dengan parameter bentuk berupa himpunan bilangan asli dari 1 hingga  $n + 1$

- b. Model Weibull penjumlahan diajukan oleh Xie dan Lai (1996) juga merupakan kasus khusus dari model *competing risk*.

### 3. Model Perkalian

Suatu model perkalian  $n$ -fold diberikan oleh

$$G(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t) \quad (2.39)$$

model umum ini memang masih mendapatkan sedikit perhatian. Basu dan Klein (1982) mengerjakan model *competing risk*. Model tersebut teridentifikasi identik dengan model perkalian pada persamaan (2.38).

### Model III(c)-1

Pada kasus ini  $F_i(t), i = 1, 2, \dots$  merupakan fungsi berdistribusi Weibull dengan dua atau tiga parameter. Ketika  $F_i(t)$  sama untuk setiap  $i$ , model akan menjadi sama dengan model weibull eksponen.

Ketika semua sub populasi merupakan distribusi Weibull dua parameter, maka kita dapat mengasumsikan, tanpa mengurangi keumuman,  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$  dan saat  $\beta_i = \beta_j$ ,  $i < j$ , diasumsikan  $\alpha_i \geq \alpha_j$ .

### Model III(c)-2

Ini sama dengan model III(c)-1 kecuali bahwa  $F_i(t)$  nya, dengan  $i = 1, 2, \dots$  adalah invers dari distribusi Weibull.

### Model III(c)-3

Ini sama dengan model III(c)-2 kecuali bahwa beberapa sub populasinya adalah distribusi Weibull, sedangkan sisanya adalah distribusi non-Weibull.

## 4. Model *Sectional*

Suatu model umum *n-fold sectional* diberikan oleh

$$G(t) = \begin{cases} k_1 F_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 - k_2 \bar{F}_2(t), & t_1 < t \leq t_2 \\ \dots \\ 1 - k_n \bar{F}_n(t), & t > t_{n-1} \end{cases} \quad (2.40)$$

dimana sub populasi  $F_i(t)$  merupakan distribusi Weibull dua atau tiga parameter dan  $t_i$  (titik partisi) adalah barisan naik. Fungsi distribusi, fungsi kepadatan, dan fungsi *hazard* dapat bersifat kontinu atau diskontinu di titik-titik partisi. Pada kasus sebelumnya,  $k_i$  adalah konstrain.

Model *sectional* ini juga dikenal sebagai model *composite*, model *piecewise*, dan model fungsi tangga.

## F. MODEL TIPE IV: MODEL WEIBULL DENGAN VARIASI PARAMETER

Parameter-parameter pada model yang dibahas sebelumnya merupakan konstanta. Pada bagian ini, kita akan mempelajari model yang parameternya berupa (i) fungsi dari variabel  $t$ , (ii) fungsi dari variabel supplementary, dinotasikan dengan  $S$ , dan (iii) variabel acak.

Kategori pertama dapat dibagi menjadi dua subgrup, dan akibatnya, kita akan memiliki empat tipe model.

### 1. Variasi Parameter Waktu

Kelompok ini memiliki ciri yaitu parameternya,  $\alpha$  dan atau  $\beta$  dari model standar pada persamaan (1.4) merupakan fungsi dari variabel  $t$ .

#### Model IV(a)-1

Pada tipe ini, parameter  $\alpha$  merupakan fungsi dari variabel bebas  $t$ . Shrivastava (1974) mengandaikan  $\alpha(t)$  adalah fungsi bernilai biner dan berubah secara periodik. Zack (1984) mengerjakan model dengan parameter bentuk  $\beta = 1$  untuk  $t < t_0$  dan berubah menjadi  $\beta > 1$  untuk  $t > t_0$ .

#### Model IV(a)-2

Pada tipe ini baik  $\alpha$  maupun  $\beta$  merupakan fungsi dari  $t$ . Zuo, dkk. (1999) mengajukan model tersebut sebagaimana persamaan berikut

$$\beta(t) = a(1 + 1/t)^b e^{c/t}, \alpha(t) = a't^{b'} e^{c'/t} \quad (2.41)$$

#### Model IV(a)-3

Model ini diberikan oleh persamaan berikut

$$G(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)} \quad (2.42)$$

dimana  $\Lambda(t)$  adalah fungsi tidak turun dengan  $\Lambda(0) = 0$  dan  $\Lambda(\infty) = \infty$ . Srivastava (1989) menyebut model ini sebagai distribusi Weibull *generalized* dan mengajukan model yang memenuhi persamaan berikut

$$\Lambda(t) = \sum_{c=1}^m \lambda_i \phi_i(t), \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.43)$$

Bentuk khusus

$$\Lambda(t) = (t/\alpha)^\beta \quad (2.44)$$

berkorespondensi dengan model Weibull standar dua parameter seperti pada persamaan (1.4).

## 2. Model Weibull *Accelerated Life*

Pada kelompok ini, parameter skala adalah fungsi dari variabel tambahan di  $S$ . Pada aplikasi di bidang keandalan (reliability),  $S$  merepresentasikan tekanan pada suatu item dan masa hidup item tersebut (peubah acak dengan distribusi  $G(\cdot)$  yang merupakan fungsi dari  $S$ . Parameter bentuk tidak terpengaruh dengan  $S$ .

### Model IV(b)-1

Suku  $\alpha(s)$  mengikuti bentuk persamaan berikut

$$\alpha(s) = \exp(\gamma_0 + \gamma_1 S) \quad (2.45)$$

sehingga  $\ln[\alpha(s)]$  bersifat linear di  $S$ . Model ini disebut sebagai model Weibull Arrhenius. Untuk model Weibull logaritma, ini mengakibatkan parameter skala linear di  $S$ .

### Model IV(b)-2

Suku  $\alpha(s)$  mengikuti bentuk persamaan berikut

$$\alpha(s) = \frac{e^{\gamma_0}}{s^{\gamma_1}} \quad (2.46)$$

model ini disebut sebagai model Weibull berpangkat

**Catatan:** Tipe model ini digunakan secara ekstensif pada *accelerated life testing* (Nelson, 1990) pada teori reliabilitas. Sebagai dampaknya, model ini juga sering disebut sebagai model *accelerated failure*. Formulasi yang lebih umum adalah ketika parameter skalanya berbentuk seperti persamaan berikut:

$$\alpha(S) = \exp(b_0 + \sum_{i=1}^k b_i s_i) \quad (2.47)$$

## 3. Model Weibull *Proportional Hazard*

Pada tipe IV(b), parameter skala merupakan fungsi tambahan (*supplementary*) dari variabel  $S$ . Cara lain dalam memodelkan efek dari variabel tambahan pada fungsi distribusi  $F(t)$  adalah melalui fungsi *hazard*  $h(t)$ , seperti persamaan berikut

$$h(t) = \psi(S)h_0(t) \quad (2.48)$$

$$\psi(S) = \exp(b_0 + \sum_{i=1}^k b_i s_i) \quad (2.49)$$

model ini juga disebut sebagai model proporsional *hazard* (Nelson, 1990).

#### 4. Model dengan Perubahan Parameter dan Waktu

Model ini merupakan kombinasi dari model tipe IV(a) dan IV(b).

#### 5. Parameter Acak

Pada kasus ini, parameter skala  $\alpha$  pada model Weibull standar dipandang sebagai suatu variabel acak dengan fungsi distribusi  $F_\alpha(\cdot)$ . Misalkan  $Y$  merupakan variabel acak dari distribusi seperti pada persamaan (1.4), bersyarat di  $\alpha = u$ . Maka distribusi tak bersyarat dari  $Y$  adalah

$$G(t) = \int F(t|\alpha = u) dF_\alpha(u) \quad (2.50)$$

Perhatikan bahwa ini merupakan model continuous mixture dan disebut juga sebagai model Weibull compound oleh Dubey (1968). Ragam bentuk berbeda dari  $F_\alpha(\cdot)$  akan menghasilkan bentuk  $G(t)$  yang berbeda.

### G. MODEL TIPE V: MODEL WEIBULL DISKRIT

Ini merupakan versi/bentuk diskrit dari model Weibull standar. Model-model dalam kelompok ini tentu akan melibatkan distribusi diskrit. Tiga model yang dimaksud disajikan sebagai berikut:

#### Model V-1

Fungsi distribusi untuk model ini memenuhi persamaan berikut:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - q^{t^\beta}, & t = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Model ini diperkenalkan oleh Nakagawa dan Osaki (1975)

### Model V-2

Fungsi kumulatif *hazard* pada model ini diberikan oleh persamaan

$$H(t) = \begin{cases} ct^{\beta-1}, & t = 1, 2, 3, \dots, m \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

dengan  $m$  memenuhi persamaan

$$m = \begin{cases} \text{int}\{c^{-[1/(\beta-1)]}\}, & \text{jika } \beta > 1 \\ \infty, & \text{jika } \beta \leq 1 \end{cases} \quad (2.53)$$

dan  $\text{int}\{\cdot\}$  merepresentasikan bagian integer/bilangan bulat dari kuantitas yang ada di dalam tanda kurung. Model ini digagas oleh Stein dan Dattero (1984).

### Model V-3

Fungsi distribusi model ini diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^t r(i)\right] \\ &= 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^t ci^{\beta-1}\right], \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.54)$$

Model ini diajukan oleh Padgett dan Spurrier (1985)

## H. MODEL TIPE VI: MODEL WEIBULL MULTIVARIAT

Kelompok model multivariat ini merupakan bentuk ekstensi dari kasus univariat. Fungsi distribusinya merupakan fungsi distribusi berdimensi  $n$  yaitu  $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Model-model ini dapat digolongkan ke dalam dua kelompok berdasarkan cara pembentukannya

**Tipe VI(a)** Model ini merupakan transformasi dari distribusi multivariat eksponensial dengan kaidah perpangkatan.

**Tipe VI(b)** Ini merupakan distribusi multivariat yang memiliki distribusi marginal berdistribusi Weibull (univariat)

Pertama akan dibahas model bivariat ( $n = 2$ ) dan selanjutnya akan dibahas pula model multivariat,  $n > 2$ . Untuk model selanjutnya berikut, ranges dari variabel-variabel independennya adalah  $[0, \infty)$ .

## 1. Model Bivariat

### Model VI(a)-1

Model ini diperoleh dari transformasi pangkat distribusi bivariat eksponensial yang diajukan oleh Marshall dan Olkin (1967) dengan fungsi survival seperti berikut

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \exp \left\{ - \left[ \lambda_1 t_1^{\beta_1} + \lambda_2 t_2^{\beta_2} + \lambda_{12} \max(t_1^{\beta_1}, t_2^{\beta_2}) \right] \right\},$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \tag{2.55}$$

bentuk ini akan berubah menjadi distribusi bivariat eksponensial ketika  $\beta_1 = \beta_2 = 1$

### Model VI(a)-2

Model yang digagas oleh Lee (1979) ini melibatkan transformasi  $Z_i = T_i/c_i$  dan  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Model yang dimaksud memenuhi persamaan berikut

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \exp \left\{ - \left[ \lambda_1 c_1^\beta t_1^\beta + \lambda_2 c_2^\beta t_2^\beta + \lambda_{12} \max(c_1^\beta t_1^\beta, c_2^\beta t_2^\beta) \right] \right\}$$

$$\tag{2.56}$$

### Model VI(a)-3

Model lain yang diajukan oleh Lu dan Bhattacharyya (1989) memiliki fungsi *survival* seperti berikut

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \exp \left\{ - \left[ \lambda_1 t_1^{\beta_1} + \lambda_2 t_2^{\beta_2} + \lambda_0 \max(t_1, t_2)^{\beta_0} \right] \right\} \tag{2.57}$$

Model ini dapat dikatakan sebagai modifikasi atau perumuman dari model bivariat eksponensial yang digagas Marshall dan Olkin karena adanya bentuk eksponen pada suku ketiga memiliki parameter baru.

#### Model VI(a)-4

Suatu model umum diajukan oleh Lu dan Bhattacharyya (1990) memenuhi persamaan berikut

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \exp\{-(t_1/\alpha_1)^{\beta_1} - (t_2/\alpha_2)^{\beta_2} - \delta\psi(t_1, t_2)\} \quad (2.58)$$

Bentuk lain untuk fungsi  $\psi(t_1, t_2)$  menghasilkan beberapa ragam dari model (). Salah satu bentuk  $\psi(t_1, t_2)$  adalah sebagai berikut:

$$\psi(t_1, t_2) = [(t_1/\alpha_1)^{\beta_1/m} + (t_2/\alpha_2)^{\beta_2/m}]^m \quad (2.59)$$

Ini menghasilkan fungsi *survival* seperti pada persamaan berikut

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, t_2) = \exp\{ & -(t_1/\alpha_1)^{\beta_1} - (t_2/\alpha_2)^{\beta_2} \\ & - \delta[(t_1/\alpha_1)^{\beta_1/m} + (t_2/\alpha_2)^{\beta_2/m}]^m\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

#### Model VI(a)-5

Ini merupakan kasus/model lain dari persamaan (2.58)

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, t_2) = \exp\{ & -(t_1/\alpha_1)^{\beta_1} - (t_2/\alpha_2)^{\beta_2} - \delta\{1 - \exp[-(t_1/\alpha_1)^{\beta_1}]\} \\ & \times \{1 - \exp[-(t_2/\alpha_2)^{\beta_2}]\}\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

#### Model VI(a)-6

Distribusi sistem yang diajukan oleh Morgenstern-Gumbel-Farlie (Johnson dan Kotz, 1970b) memenuhi persamaan

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2)\{1 + \gamma[1 - \bar{F}_1(t_1)][1 - \bar{F}_2(t_2)]\} \quad (2.62)$$

dengan  $\bar{F}_i(t_i) = \exp\{-t_i^{c_i}\}$ , model ini merupakan bentuk khusus dari model pada persamaan (2.58)

### Model VI(a)-7

Sarkar (1987) mengajukan model distribusi eksponensial bivariat dan menyebutkan bahwa dengan transformasi pangkat sederhana, distribusi Weibull bivariat dapat diperoleh. Fungsi survivalnya diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, t_2) &= \begin{cases} \exp [-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1^{\beta_1}] \left\{ 1 - [A(\lambda_2 t_1^{\beta_1})]^{-\gamma} [A(\lambda_2 t_2^{\beta_2})]^{1+\gamma} \right\}, & t_1 \geq t_2 \geq 0 \\ \exp [-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2^{\beta_2}] \left\{ 1 - [A(\lambda_1 t_2^{\beta_2})]^{-\gamma} [A(\lambda_1 t_1^{\beta_1})]^{1+\gamma} \right\}, & t_2 \geq t_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.63)$$

dimana  $\gamma = \lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_2)$  dan  $A(z) = 1 - e^{-z}, z > 0$ .

### Model VI(b)-1

Tipe lain dari model distribusi Weibull bivariat berdasarkan Lu dan Bhattacharyya (1990) diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, t_2) = \left[ 1 + \left( \{ \exp[(t_1/\alpha_1)^{\beta_1}] - 1 \}^{1/\gamma} \right. \right. \\ \left. \left. + \{ \exp[(t_2/\alpha_2)^{\beta_2}] - 1 \}^{1/\gamma} \right)^\gamma \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.64)$$

### Model VI(b)-2

Lee (1979) mengajukan model distribusi Weibull bivariat seperti persamaan berikut:

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \exp \left[ - \left( \lambda_1 t_1^{\beta_1} + \lambda_2 t_2^{\beta_2} \right)^\gamma \right] \quad (2.65)$$

dengan  $\beta_i > 0, 0 < \gamma \leq 1, \lambda_i > 0, t_i \geq 0, i = 1, 2$ .

## 2. Model Multivariat

Pada bagian ini, digunakan notasi  $\mathbf{t}$  sebagai vektor berdimensi  $n$  dengan komponen-komponennya adalah  $t_i, 1 \leq i \leq n$ .

### Model VI(a)-8

Model ini merupakan model multivariat dari tipe VI(a)-1, dengan fungsi *survival* diberikan oleh

$$\bar{G}(t) = \exp \left[ - \sum_S \lambda_s \max_{i \in S} (t_i^{\alpha}) \right], \quad t > \mathbf{0} \quad (2.66)$$

dimana  $S$  menotasikan himpunan vektor  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  yang setiap elemennya bernilai 0 atau 1, tetapi tidak semua bernilai 0.

### Model VI(b)-3

Roy dan Mukherjee (1998) mengajukan model distribusi multivariat dengan fungsi marginal Weibull dan fungsi *survival*nya diberikan oleh persamaan berikut

$$\bar{G}(t) = \exp \left\{ - \left[ \sum_S \lambda_i^v t_i^{\alpha v} \right]^{1/v} \right\}, \quad t > \mathbf{0} \quad (2.67)$$

### Model VI(b)-4

Model berikut diajukan oleh Patra dan Dey (1999). Model ini didasarkan pada studi mengenai suatu sistem dengan  $r$  komponen yang masa hidup setiap komponennya diasumsikan berdistribusi Weibull. Fungsi *survival*-nya disajikan sebagai berikut

$$\bar{G}(t) = \prod_{i=1}^r \sum_{j=1}^k a_{ij} \exp \left[ - \left( \theta_{ij} t_i^{\alpha_{ij}} + \frac{\theta_0 t_0}{r} \right) \right], \quad t > \mathbf{0} \quad (2.68)$$

dengan  $t_0 = \max(t_1, \dots, t_r)$ .

## I. MODEL TIPE VII: MODEL STOKASTIK (*POINT PROCESS*)

Model-model ini merupakan model *point process* dengan beberapa kaitan/hubungan dengan model Weibull standar

### 1. Model Fungsi Intensitas Weibull

#### Model VII(a)-1: *Power Law Process*

Ini merupakan model *point process* dengan fungsi intensitas sebagai berikut:

$$\lambda(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha \beta} \quad (2.69)$$

Ini identik dengan fungsi *hazard* untuk model Weibull standar. Model ini juga disebut sebagai: *power law process* (Bassin, 1973; Rigdon and Basu, 1989; Klefsjo dan Kumar, 1992); *Rasch-Weibull process* (Moller, 1976); *Weibull intensity function* (Crow, 1974); *Weibull-Poisson Process* (Bain dan Englehardt, 1980); serta *Weibull process* (Bain, 1978).

**Model VII(a)-2: *Modulated Power Law Process***

Fungsi kepadatan bersama untuk waktu instan ( $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ) dari  $n$  kejadian pertama untuk proses modulated power law diberikan oleh persamaan

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) [\Lambda(t_i) - \Lambda(t_{i-1})]^{k-1} \right\} \frac{\exp[-\Lambda(t_n)]}{[\Gamma(k)]^n}$$

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$$
(2.70)

dengan  $\lambda(t)$  diberikan oleh persamaan (2.69) dan

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$$
(2.71)

Model ini diajukan oleh Lakey dan Rigdon (1993) dan merupakan kasus khusus dari proses modulated gamma yang diajukan oleh Berman (1981).

**Model VII(a)-3: *Model Intensitas Proporsional***

Fungsi intensitasnya memenuhi persamaan:

$$\lambda(t; S) = \lambda_0(t)\psi(S), \quad t \geq 0$$
(2.72)

dengan  $\lambda_0(t)$  memenuhi persamaan (2.69) dan  $\psi(S)$  merupakan fungsi eksplanatori variabel  $S$ . Satu-satunya keterbatasan pada fungsi  $\psi(S)$  adalah  $\psi(S) > 0$ . Berbagai bentuk  $\psi(S)$  telah banyak dipelajari, contohnya pada Cox dan Oaks (1984) dan Prentice et al. (1981).

## 2. Model Weibull Proses Pembaruan (*Renewal Process*)

Ragam dari model ini adalah sebagai berikut:

### Model VII(b)-1: Proses Pembaruan Biasa

Tipe ini merupakan *point process* yang mengikuti proses *renewal* dengan waktu antar kejadian yang independen dan berdistribusi identik (*iid*). Fungsi distribusinya memenuhi persamaan (2.1)

### Model VII(b)-2: Proses Pembaruan Modifikasi

Pada tipe ini, fungsi distribusi untuk waktu kejadian pertama,  $F_0(t)$ , berbeda dengan waktu antar kejadian berikutnya, yang *iid* dengan fungsi distribusi  $F(\cdot)$ . Perhatikan bahwa baik  $F_0(t)$  dan/atau  $F(t)$  terdistribusi Weibull standar. Ketika  $F_0(t) = F(t)$ , maka model akan memenuhi model Weibull *renewal* biasa

### Model VII(b)-3: Proses Pembaruan *Alternating*

Pada tipe ini, waktu antar kejadian dengan urutan ganjil diasumsikan *iid* (independen dan berdistribusi identik) dengan fungsi distribusi  $F_1(t)$ . Sedangkan waktu antar kejadian dengan urutan genap juga diasumsikan *iid* dengan fungsi distribusi  $F_2(t)$ . Baik  $F_1(t)$  maupun  $F_2(t)$  merupakan distribusi Weibull standar.

### Model VII(c): Model Umum (Generalized)

Model ini mengombinasikan model '*Power Law Intensity*' dan model Weibull *Renewal*. Misalkan  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  adalah waktu instan untuk  $n$  kejadian. Untuk  $t_i \leq t < t_{i+1}$  didefinisikan  $u(t) = t - t_i$ . Pada model ini, kemunculan kejadian diberikan oleh fungsi intensitas berikut:

$$\lambda(t) = \frac{\beta + \delta - 1}{\alpha^{\beta + \delta - 1}} t^{\beta - 1} [u(t)]^{\delta - 1}, \quad t \geq 0 \quad (2.73)$$

dengan  $\alpha > 0$  dan  $\beta + \delta > 1$ . Perhatikan bahwa ketika  $\delta = 1$ , model ini berubah menjadi model intensitas Weibull yang lebih sederhana [Model VII(a)-1] dan pada saat  $\beta = 1$ , model ini kemudian berubah menjadi model Weibull *renewal* biasa [Model VII(b)-1]. Model ini merupakan kasus khusus dari tipe yang lebih umum yang telah diperkenalkan oleh Lawless dan Thiagarajah (1996).



## BAB III

### DISTRIBUSI WEIBULL STANDAR & APLIKASINYA

#### A. PENDAHULUAN

Pemodelan berbagai permasalahan mekanis, masa hidup, dan karakterisasi kerusakan sistem pada suatu unit produksi berdasarkan distribusi Weibull terus berkembang dari masa ke masa. Bulmer dan Eccleston (2003) telah mengembangkan model keandalan mesin fotokopi menggunakan distribusi Weibull univariat. Stone dan Heeswijk (1977) dan Bhattacharya dan Bhattacharjee (2010) telah mempelajari estimasi parameter distribusi Weibull univariat masing-masing diterapkan pada masa hidup peralatan elektronik dan model kecepatan angin.

Selain itu, model distribusi Weibull bivariat telah dikonstruksi secara terperinci salah satunya oleh Lu dan Bhattacharyya (1990) berdasarkan konsep *random hazard*. Model distribusi ini berawal dari ide bahwa lingkungan sistem yang sama, dapat saja mempengaruhi dependensi dua macam komponen didalamnya. Artinya, dengan kata lain, laju kerusakan dari satu komponen akan berubah oleh kerusakan komponen lainnya. Konsep distribusi Weibull bivariat dapat diinterpretasikan ke dalam beberapa konteks permasalahan, contohnya waktu kerusakan pertama dan kedua suatu produk yang dapat diperbaiki, waktu kerusakan dua mesin pembangkit pada suatu sistem pembangkit listrik, dan masa berfungsinya sistem tubuh yang melibatkan dua organ, seperti paru-paru atau ginjal. Namun, konsep Weibull bivariat berdasarkan *random hazard* juga dapat diadaptasi pada kasus lainnya. Misalkan pada fenomena kerusakan suatu komponen yang dapat disebabkan oleh faktor usia dan atau intensitas pemakaian. Interpretasi semacam inilah yang telah digunakan oleh Baik, dkk.

(2004) untuk memodelkan distribusi kerusakan suatu objek dalam hubungannya dengan penentuan biaya garansi dua dimensi.

Studi mengenai distribusi Weibull multivariat salah satunya dilakukan oleh Lee dan Wen (2009). Konstruksi model didasarkan pada Lu dan Bhattacharyya (1990), kemudian diperluas menjadi model distribusi Weibull berdimensi  $n$ . Melalui fungsi keandalan, diperoleh fungsi kepadatan peluang, fungsi distribusi kumulatif, determinan matriks Jacobian, dan *general moment*. Melalui *general moment*, diperoleh varian dan kovarian, serta koefisien korelasi. Pada kasus yang lebih umum, yaitu konstruksi distribusi multivariat salah satunya telah dikerjakan oleh Al-Hussaini dan Ateya (2005). Kelas distribusi multivariat yang dikonstruksi, dikatakan dapat berlaku untuk beberapa distribusi penting diantaranya yaitu Weibull, eksponensial, Rayleigh, *compound* Weibull, *compound* eksponensial, *compound* Rayleigh, Pareto, power function, Beta, Gompertz, dan *compound* Gompertz.

Bagian ini membahas konstruksi dasar distribusi Weibull univariat, bivariat, dan multivariat, beserta setiap *general moment*-nya. Beberapa detail penjelasan ditambahkan penulis, untuk memperjelas alur pembahasan.

## B. DISTRIBUSI WEIBULL UNIVARIAT

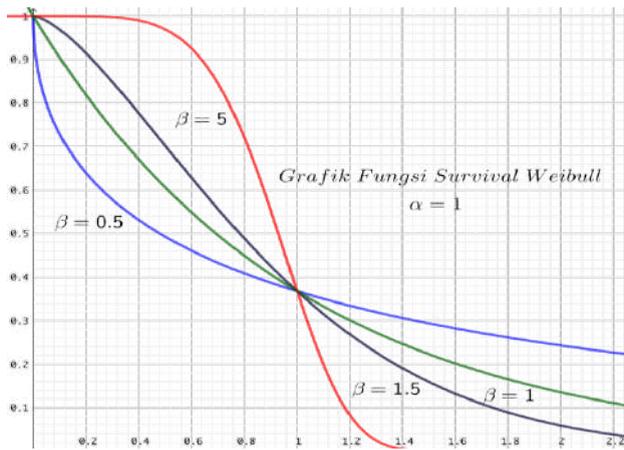
Suatu variabel acak kontinu *non-negatif*  $X$ , dikatakan memiliki distribusi Weibull dua parameter ditulis sebagai  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$  dengan  $\alpha > 0$  dan  $\beta > 0$ , apabila memiliki fungsi keandalan (*FK*) yang memenuhi persamaan berikut :

$$\bar{F}(x) = P\{X > x\} = e^{-\frac{1}{\alpha\beta}x^\beta} \quad (3.1)$$

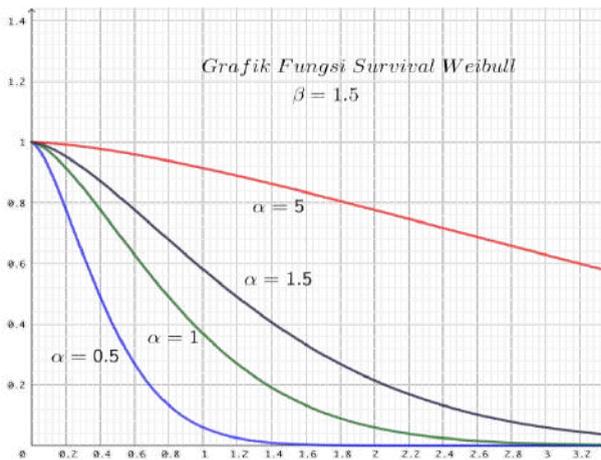
Misalkan  $X$  dipandang sebagai peubah acak yang merepresentasikan masa hidup suatu objek. *FK* diartikan sebagai peluang masa hidup objek setelah selang waktu  $[0, x]$ . Sedangkan berkebalikan dengan persamaan (3.1), fungsi distribusi (*FD*)  $X$  diartikan sebagai peluang objek tersebut masih berfungsi pada selang waktu  $[0, x]$  dan memenuhi persamaan

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - \bar{F}(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha\beta}x^\beta} \quad (3.2)$$

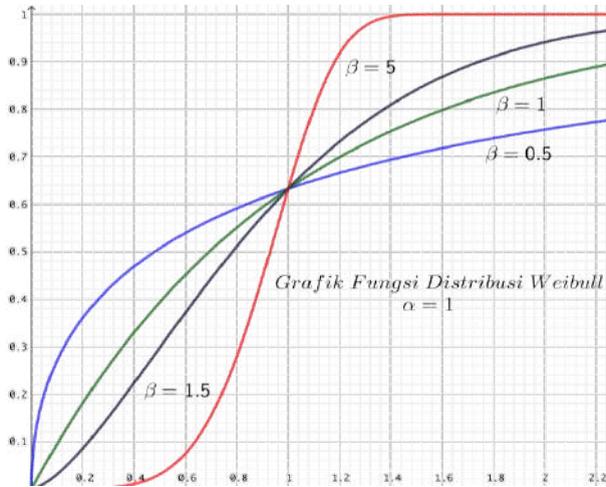
Melalui keduanya, fungsi-fungsi lain seperti laju *hazard*, fungsi kumulatif *hazard*, dan fungsi padat peluang dapat diperoleh. Untuk memberikan pemahaman lengkap mengenai kelima macam fungsi tersebut, disajikan grafik Weibull yang digambarkan dengan nilai parameter yang berbeda.



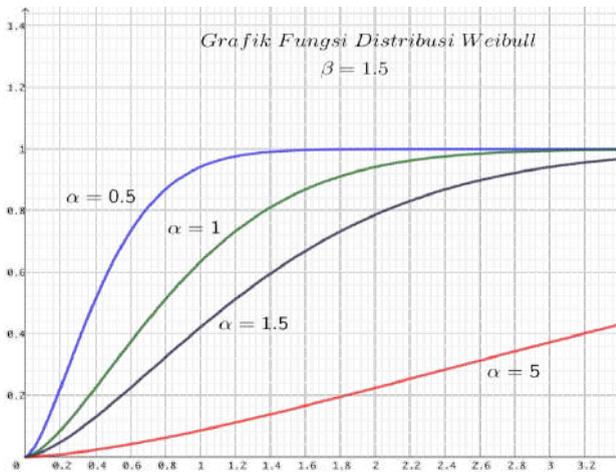
**Gambar 3.1.** Grafik fungsi keandalan/*survival* distribusi Weibull dengan nilai  $\alpha = 1$  dan nilai  $\beta = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .



**Gambar 3.2.** Grafik fungsi *survival* distribusi Weibull dengan nilai  $\beta = 1.5$  dan nilai  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .



**Gambar 3.3.** Grafik fungsi distribusi distribusi Weibull dengan nilai  $\alpha = 1$  dan nilai  $\beta = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .



**Gambar 3.4.** Grafik fungsi distribusi Weibull dengan nilai  $\beta = 1.5$  dan nilai  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

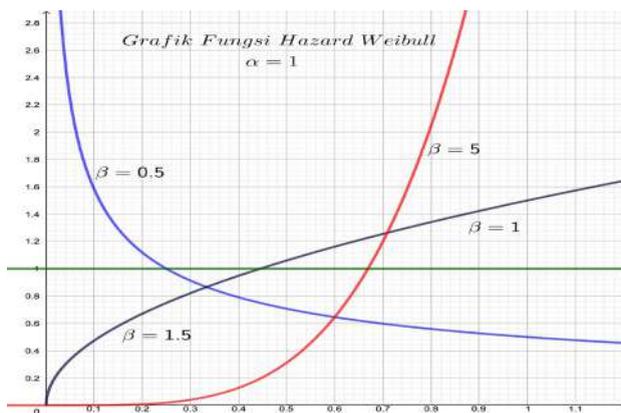
Gambar 3.1. hingga gambar 3.11, kecuali gambar 3.7, merupakan contoh grafik fungsi keandalan, fungsi distribusi kumulatif, fungsi hazard, fungsi kumulatif hazard, dan fungsi densitas/kepadatan peluang Weibull dengan nilai parameter skala  $\alpha = 1$  dan nilai parameter bentuk yang berubah-ubah yaitu  $\beta = 0,5; 1; 1,5;$  dan  $5$ , serta nilai  $\beta = 1,5$  dan nilai  $\alpha = 0,5; 1; 1,5$ .

Perhatikan pada gambar (3.3) bahwa semua grafik berpotongan pada nilai  $FD = 0.63$  yang berkorespondensi dengan nilai  $x = \alpha = 1$ . Oleh karena itu, nilai parameter  $\alpha$  dinamakan sebagai nilai karakteristik hidup dari distribusi Weibull, dimana  $FD$  selalu mencapai nilai  $1 - e^{-1}$  (Han, 2006). Artinya, sebanyak 63.212% kerusakan telah terjadi ketika  $x = \alpha$ . Demikian pula pada gambar (3.1), karena keduanya saling berkebalikan, maka pada saat  $x = \alpha = 1$ , nilai fungsi keandalan mencapai titik  $FK = 1 - 0.63 = 0.37$ . Artinya sebanyak 36.788% kerusakan tidak terjadi ketika  $x = \alpha$ .

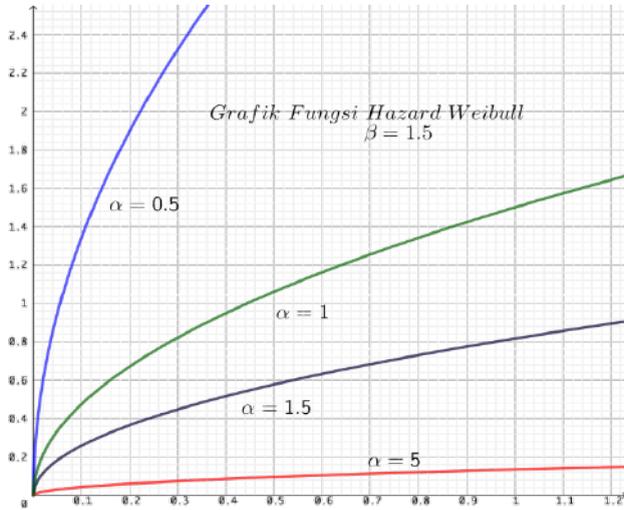
Fungsi laju kerusakan *hazard* ( $FLH$ ) dapat diperoleh melalui fungsi keandalan yang dinyatakan melalui persamaan

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + dx | X \geq x)}{dx} \\
 &= -\frac{1}{\bar{F}(x)} \frac{d\bar{F}(x)}{dx} \\
 &= \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta}\right) x^{\beta-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$FLH$  merupakan laju yang menyatakan rata-rata perubahan peluang suatu produk yang tidak rusak di waktu  $x$ , akan mengalami kerusakan di waktu  $x + dx$ .

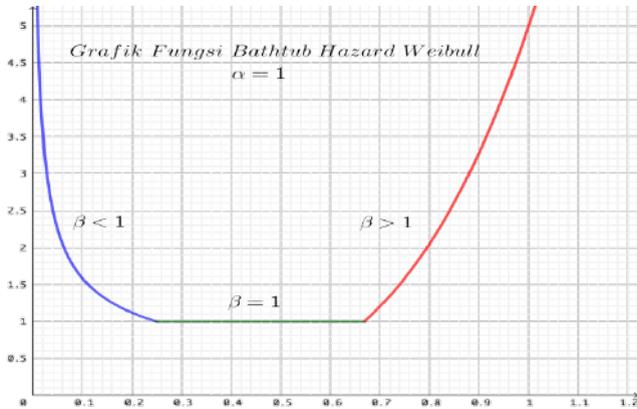


**Gambar 3.5.** Grafik fungsi *hazard* distribusi Weibull dengan nilai  $\alpha = 1$  dan nilai  $\beta = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .



**Gambar 3.6.** Grafik fungsi *hazard* distribusi Weibull dengan nilai  $\beta = 1.5$  dan nilai  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

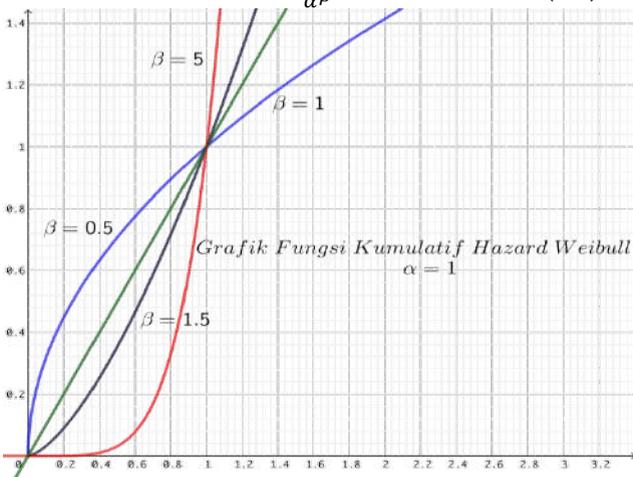
Perhatikan gambar 3.7, suatu peubah acak berdistribusi Weibull memiliki laju kerusakan (*hazard*) yang turun pada selang  $0 < \beta < 1$ , konstan pada nilai  $\beta = 1$ , dan naik pada selang  $1 < \beta < \infty$ . Grafik *FLH* seperti ini biasa disebut sebagai kurva *bath-tub* (Murthy, dkk., 2004). Kurva *bath-tub* adalah refleksi dari versatilitas distribusi Weibull. Dalam hal mesin fotokopi, tingginya laju kerusakan di awal periode adalah representasi dari kemungkinan mesin akan mengalami cacat produksi, hingga kemudian lajunya berangsur menurun seiring dengan bertambahnya usia mesin. Laju kerusakan konstan (*random failure period*) mewakili kondisi mesin pada usia muda, yang tetap dapat mengalami kerusakan akibat penggunaan, meskipun dengan laju kerusakan yang stabil. Sedangkan ketika mesin fotokopi telah mulai menua (*wear out*), hampir dapat dipastikan ia akan mengalami kenaikan laju kerusakan, hingga pada akhirnya mesin tersebut sudah tidak dapat berfungsi lagi (Nakagawa, 2011).



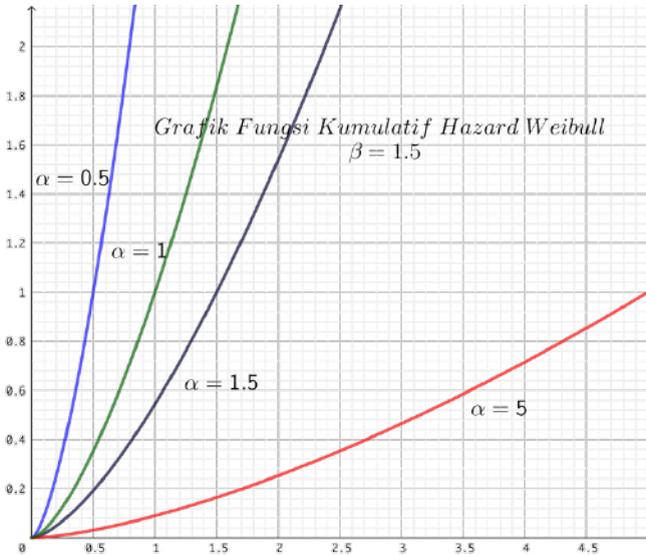
**Gambar 3.7** Kurva *Bath-tub*. Berdasarkan *FLH*-nya, distribusi Weibull memiliki laju kerusakan yang turun untuk nilai  $\beta < 1$ , konstan untuk nilai,  $\beta = 1$  dan naik untuk nilai  $\beta > 1$  .

Selanjutnya, apabila  $h(x)$  diintegrasikan sepanjang selang  $[0, x]$ , diperoleh fungsi kumulatif *hazard* (*FKH*) yaitu

$$\begin{aligned}
 H(x) &= \int_0^x h(u)du \\
 &= -\ln \bar{F}(x) \\
 &= \frac{1}{\alpha^\beta} x^\beta
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$



**Gambar 3.8.** Grafik fungsi distribusi kumulatif *hazard* Weibull dengan nilai  $\alpha = 1$  dan nilai  $\beta = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

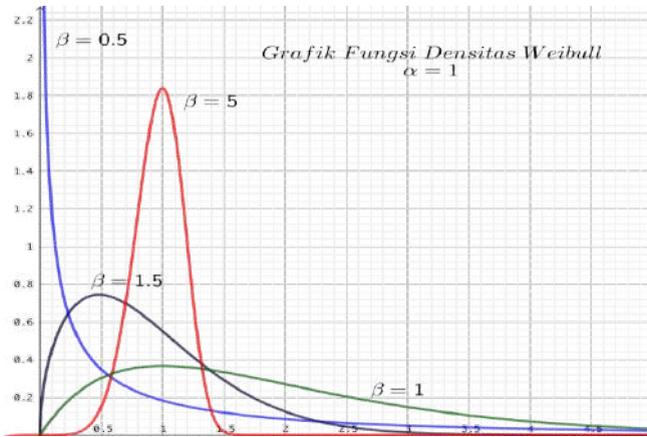


**Gambar 3.9.** Grafik fungsi distribusi kumulatif *hazard* Weibull dengan nilai  $\beta = 1.5$  dan nilai  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

Pada praktiknya, fungsi distribusi kumulatif *hazard* dapat diinterpretasikan sebagai ekspektasi banyaknya kerusakan dalam selang waktu tertentu. Berdasarkan gambar 3.8 dan 3.9 FKH merupakan fungsi monoton naik. Hal ini wajar, karena kerusakan pada suatu objek tidaklah mungkin mengalami penurunan nilai. Kerusakan pasti terus bertambah atau mungkin konstan seiring bertambahnya usia objek tersebut.

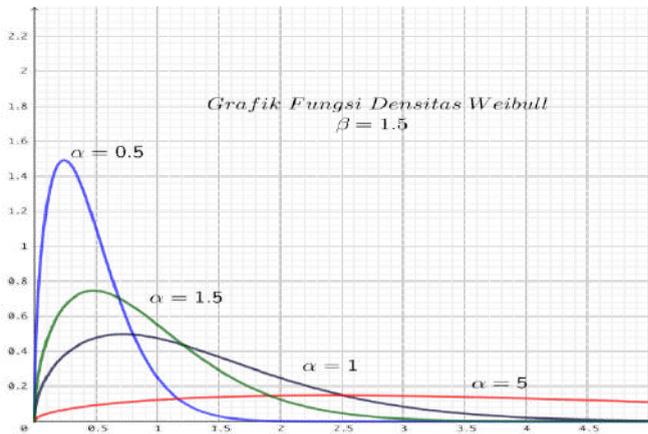
Sedangkan, fungsi kepadatan peluang (*FPP*) distribusi Weibull univariat dapat diturunkan melalui fungsi distribusi kumulatif pada persamaan (3.2) Sehingga dapat dituliskan persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\
 &= \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} \cdot e^{-(1/\alpha^\beta)x^\beta}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$



**Gambar 3.10.** Grafik fungsi distribusi distribusi Weibull dengan nilai  $\alpha = 1$  dan nilai  $\beta = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

Perhatikan apabila  $\beta = 1$ , persamaan (3.5) akan menjadi fungsi kepadatan peluang untuk distribusi eksponensial. Ilustrasinya dapat dilihat lebih jelas pada gambar (3.10), grafik berwarna hijau. Selain itu, peran nilai parameter  $\beta$  juga dapat teramati dengan baik pada grafik *FPP*. Untuk nilai  $\alpha$  yang sama, semakin besar nilai  $\beta$ , grafik semakin meruncing, begitu juga sebaliknya. Efek inilah yang menyebabkan  $\beta$  disebut sebagai ukuran penyebaran data kerusakan. Sedangkan efek perubahan parameter skala  $\alpha$  terhadap pola grafik, disajikan pada gambar 3.11.



**Gambar 3.11.** Grafik fungsi distribusi distribusi Weibull dengan nilai  $\beta = 1.5$  dan nilai  $\alpha = 0.5, 1, 1.5, \text{ dan } 5$ .

Ekspektasi dan variansi suatu variabel acak kontinu *non-negatif*  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$  dapat dinyatakan dalam fungsi gamma dan memenuhi persamaan berikut :

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_X \\ &= \alpha \Gamma(1/\beta + 1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sigma_X^2 \\ &= \alpha^2 \Gamma(2/\beta + 1) - (\Gamma(1/\beta + 1))^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dengan fungsi gamma  $\Gamma(1 + 1/\beta) = \int_0^\infty u^{1/\beta} e^{-u} du$  dan  $u = (x/\alpha)^\beta$ . Adapun pembuktian persamaan (3.6) dan (3.7) selengkapnya telah dicantumkan pada lampiran.

### C. DISTRIBUSI MASA HIDUP BIVARIAT

Distribusi Weibull bivariat dapat dikonstruksi berdasarkan *random hazard* (Lu dan Bhattacharyya, 1990). Konstruksi ini pada umumnya berlaku untuk distribusi masa hidup, seperti distribusi eksponensial, gamma, dan juga Weibull. Oleh karena itu, sebelum membahas mengenai distribusi Weibull bivariat, terlebih dahulu akan diberikan uraian singkat mengenai konstruksi umum distribusi masa hidup bivariat berdasarkan *random hazard* yang telah diperkenalkan oleh Hougaard (1986).

Han (2006), berdasarkan Hougaard (1986), telah menguraikan metode umum untuk mengonstruksi distribusi waktu kerusakan dua komponen dalam suatu sistem yang dipengaruhi oleh *random hazard*.

Konstruksi didasarkan pada Lu dan Bhattacharyya (1990), serta Han (2006), dan Hougaard (1986). Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah masa hidup dua komponen dalam suatu sistem. Asosiasi antara keduanya muncul dari efek *stress* lingkungan. Misalkan  $h(x)$  dan  $h(y)$  merupakan fungsi laju kerusakan pada interval  $[0, \infty)$ , dan  $H(x)$  dan  $H(y)$  adalah fungsi kumulatif laju kerusakan. Asumsi, diberikan suatu

stress  $W = w > 0$ , sehingga masing-masing laju kerusakan menjadi  $h(x)w$  dan  $h(y)w$ . Sedangkan fungsi keandalannya menjadi  $\exp[-H(x)w]$  dan  $\exp[-H(y)w]$ . Selanjutnya, lebih jauh fungsi keandalan bersama bersyarat dari kedua komponen, dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y|w) &= P(X > x, Y > y|W = w) \\ &= \exp\{-[H(x) + H(y)]^\gamma w\}\end{aligned}$$

Dimana  $\gamma$  merupakan parameter asosiasi, yang menunjukkan asosiasi kondisional antara  $X$  dan  $Y$ , yang diasumsikan sebagai suatu konstanta bebas dari  $w$ . Secara khusus, ketika  $\gamma = 1$ , maka  $X$  dan  $Y$  independen.

***Teorema.***

Misalkan  $\bar{F}(x, y|s) = \exp\{-(H(x) + H(y))^\gamma w\}$  merepresentasikan fungsi keandalan bersyarat dari  $(X, Y)$  diberikan  $W = w > 0$ , dan asumsikan bahwa transformasi Laplace  $\psi(t)$  dari  $W$  ada di  $[0, \infty)$  merupakan fungsi naik tegas,  $\psi(t) \rightarrow 0$  ketika  $t \rightarrow 0$ , dan  $\psi^{-1}(u)$  kontinu absolut di  $(0, 1]$ . Misalkan

$$\begin{aligned}H^*(x) &= \left(\psi^{-1}(\bar{F}(x))\right)^{1/\gamma}, \\ H^*(x) &= \left(\psi^{-1}(\bar{F}(x))\right)^{1/\gamma}, \\ q(x, y) &= (H^*(x) + H^*(y))^\gamma, \\ \bar{F}(x, y) &= \psi(q(x, y))\end{aligned}$$

Maka  $\bar{F}(x, y)$  adalah fungsi keandalan bivariat dengan marginal  $\bar{F}(x)$  dan  $\bar{F}(y)$  (Lu dan Bhattacharyya, 1990).

***Bukti.*** Setiap fungsi tak naik dan kontinu absolut  $H(x)$  di interval  $[0, \infty)$  sedemikian hingga  $H(0) = 0$  dan  $H(x) \rightarrow \infty$  untuk  $x \rightarrow \infty$  adalah fungsi kumulatif yang valid untuk suatu distribusi hidup univariat. Perhatikan fungsi keandalan bersama, misalkan  $y = 0$  dan diambil ekspektasi terhadap  $W$ , diperoleh hubungan berikut

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= \bar{F}(x, 0) \\ &= \int_0^\infty \exp(-H^\gamma(x)w)\phi(w)dw\end{aligned}$$

$$= \psi(H^\gamma(x))$$

Artinya, dapat dituliskan bahwa  $H^*(x) = (\psi^{-1}(\bar{F}(x)))^{1/\gamma}$ , yang mana ini merupakan fungsi kumulatif yang valid di interval  $[0, \infty)$  dengan  $H$  digantikan oleh  $H^*$ . Maka distribusi bersama  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= E \left[ \exp\left(-\left(H^*(x) + H^*(y)\right)^\gamma W\right) \right] \\ &= \psi(q(x, y))\end{aligned}$$

Sedangkan marginal  $X$  dari fungsi keandalan bersama ini adalah  $\bar{F}(x) = \psi\left(\left(H^*(x)\right)^\gamma\right)$  dan marginal  $Y$  -nya adalah  $\bar{F}(y) = \psi\left(\left(H^*(y)\right)^\gamma\right)$ .

Konsep di atas dapat digunakan untuk mengkonstruksi distribusi Weibull bivariat dengan fungsi keandalan marginal Weibull berparameter  $\alpha_{x,y}$  dan  $\beta_{x,y}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= \exp\left(-\left(x/\alpha_x\right)^{\beta_x}\right) \\ \bar{F}(y) &= \exp\left(-\left(y/\alpha_y\right)^{\beta_y}\right)\end{aligned}$$

dengan  $0 < x, y < \infty$  dan misalkan transformasi Laplace dari suatu distribusi positif stabil (Hougaard, 1986) adalah  $\psi(t) = \exp(-t^\theta)$ , dengan  $0 < \theta \leq 1$  dan memenuhi kondisi teorema diatas. Karena  $\psi^{-1}(u) = (-\ln u)^{1/\theta}$ , maka fungsi kumulatif *hazard* marginal dipenuhi oleh :

$$\begin{aligned}H^*(x) &= \left(-\ln \exp\left(-\left(x/\alpha_x\right)^{\beta_x}\right)\right)^{1/\theta\gamma} \\ &= \left(x/\alpha_x\right)^{\beta_x/\theta\gamma} \\ H^*(y) &= \left(-\ln \exp\left(-\left(y/\alpha_y\right)^{\beta_y}\right)\right)^{1/\theta\gamma} \\ &= \left(y/\alpha_y\right)^{\beta_y/\theta\gamma}\end{aligned}$$

sedangkan telah dirumuskan bahwa

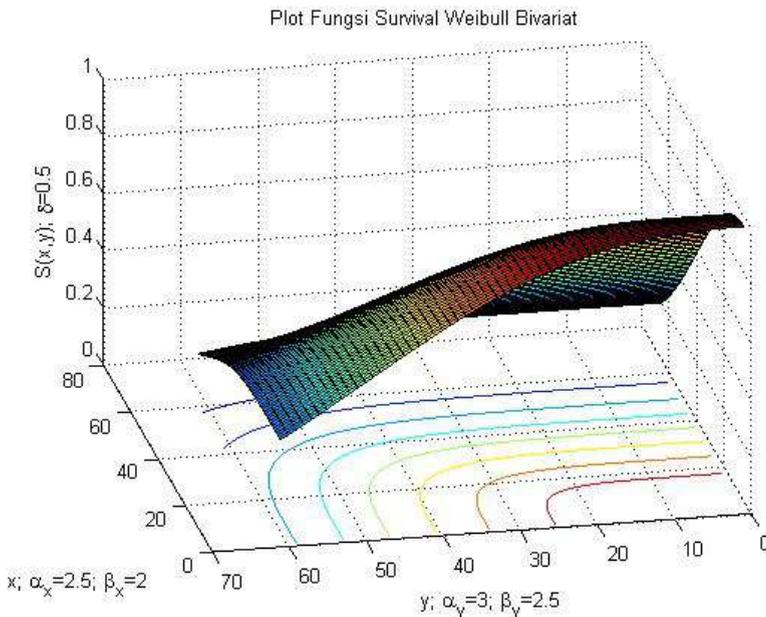
$$\begin{aligned}q(x, y) &= \left(H^*(x) + H^*(y)\right)^\gamma \\ &= \left(\left(x/\alpha_x\right)^{\beta_x/\theta\gamma} + \left(y/\alpha_y\right)^{\beta_y/\theta\gamma}\right)^\gamma\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh fungsi keandalan bivariat Weibull dengan  $0 < \theta \leq 1$  dan  $0 < \gamma \leq 1$  adalah

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= \psi(q(x, y)) \\ &= \exp\left(-\left((x/\alpha_x)^{\beta_x/\theta\gamma} + (y/\alpha_y)^{\beta_y/\theta\gamma}\right)^{\theta\gamma}\right)\end{aligned}$$

Kita dapat memisalkan parameter  $\theta\gamma$  menjadi parameter tunggal yaitu  $\delta = \theta\gamma$ , dengan  $0 < \delta \leq 1$ . Selain itu, dimisalkan pula  $a = x/\alpha_x$  dan  $b = y/\alpha_y$ . Sehingga  $FS$  bivariat Weibull dapat dituliskan sebagai

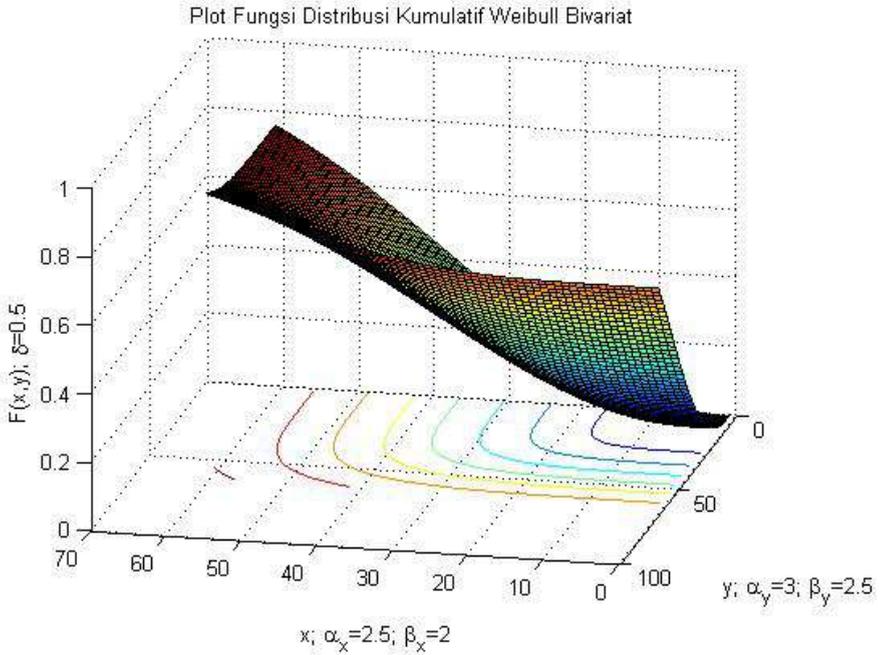
$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y) &= P\{X > x, Y > y\} \\ &= \exp\left(-\left(a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta}\right)^\delta\right)\end{aligned}\tag{3.8}$$



**Gambar 3.12.** Grafik fungsi *survival* Weibull Bivariat

Tentunya, melalui persamaan (3.8),  $FD$  bivariat Weibull akan memenuhi persamaan

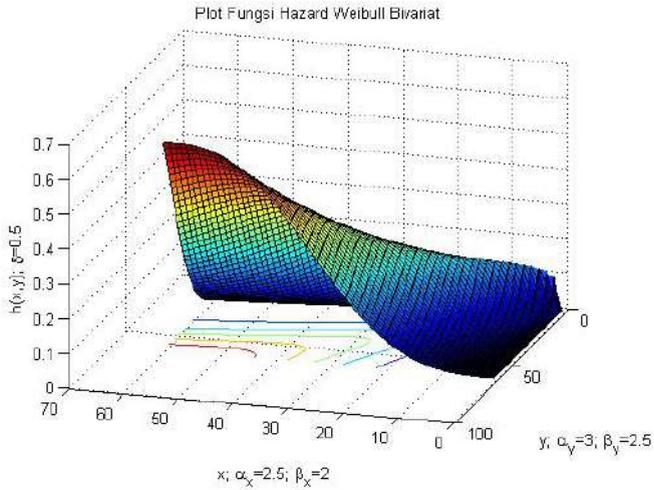
$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= 1 - \bar{F}(x, y) \\
 &= 1 - \exp\left(-\left(a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta}\right)^\delta\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$



**Gambar 3.13.** Grafik fungsi distribusi Kumulatif Weibull Bivariat

Selanjutnya fungsi laju kerusakan (*hazard*) didapatkan melalui persamaan (3.8) sehingga memenuhi persamaan berikut :

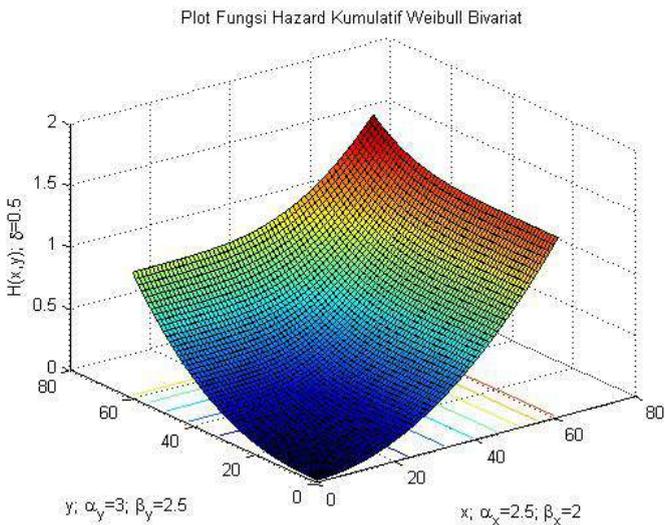
$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= -\frac{1}{\bar{F}(x, y)} \frac{\partial^n \bar{F}(x, y)}{\partial x \partial y} \\
 &= \frac{\beta_x \beta_y}{\left(\alpha_x^{\beta_x/\delta} \alpha_y^{\beta_y/\delta}\right)} x^{\beta_x/\delta - 1} y^{\beta_y/\delta - 1} \left(a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta}\right)^{\delta - 2} \left(a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta}\right)^\delta + \frac{1}{\delta} - 1
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$



**Gambar 3.14.** Grafik fungsi *hazard* Weibull Bivariat

Sedangkan fungsi kumulatif laju kerusakan (*hazard*) tidak lain merupakan bentuk logaritma natural dari persamaan (3.8), sehingga dituliskan persamaan berikut

$$H(x,y) = \ln \bar{F}(x,y) = (a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta})^\delta \quad (3.11)$$

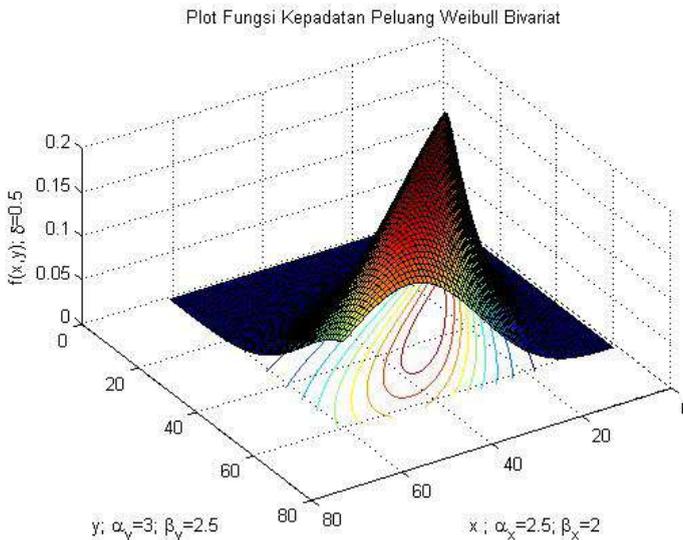


**Gambar 3.15.** Grafik fungsi *hazard* Kumulatif Weibull Bivariat

Sebagaimana distribusi Weibull univariat, kami juga menyajikan grafik fungsi Weibull bivariat. Gambar 3.12 hingga gambar 3.15 merupakan grafik Weibull bivariat dengan nilai parameter skala  $\alpha_x = \alpha_y = 1$ , parameter bentuk  $\beta_x = 5$  dan  $\beta_y = 1,5$  serta parameter asosiasi bersyarat  $\delta = 0,7$ .

Adapun fungsi padat peluang untuk distribusi Weibull bivariat diperoleh melalui derivasi parsial dari persamaan (3.9), sehingga dapat ditulis sebagai persamaan berikut

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \\
 &= \frac{\beta_x \beta_y}{(\alpha_x^{\beta_x/\delta} \alpha_y^{\beta_y/\delta})} x^{\beta_x/\delta - 1} y^{\beta_y/\delta - 1} (a^{\beta_x/\delta} \\
 &\quad + b^{\beta_y/\delta})^{\delta - 2} \left( (a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta})^\delta + \frac{1}{\delta} - 1 \right) \\
 &\quad \times \exp \left( -(a^{\beta_x/\delta} + b^{\beta_y/\delta})^\delta \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$



**Gambar 3.16.** Grafik fungsi kepadatan peluang Weibull Bivariat

Pada artikel Lu dan Bhattacharyya (1990), juga dijelaskan mengenai *general moment* dari  $(X, Y)$ . adalah sebagai berikut

$$E[X^i Y^j] = \frac{\Gamma(i\delta/\beta_x + 1)\Gamma(j\delta/\beta_y + 1)\Gamma(i/\beta_x + j/\beta_y + 1)\alpha_x^i \alpha_y^j}{\Gamma(i/\beta_x + j/\beta_y)\delta + 1} \quad (3.13)$$

dengan  $i$  dan  $j$  merupakan bilangan bulat positif. Apabila diberikan  $i = j = 1$ , maka melalui persamaan (3.13), bentuk  $E[XY]$  dapat dituliskan sebagai berikut

$$E[XY] = \frac{\Gamma(\delta/\beta_x + 1)\Gamma(\delta/\beta_y + 1)\Gamma(1/\beta_x + 1/\beta_y + 1)\alpha_x \alpha_y}{\Gamma(1/\beta_x + 1/\beta_y)\delta + 1} \quad (3.14)$$

Dengan demikian, kovarian  $(X, Y)$  diperoleh dengan menggunakan persamaan (3.13) dan persamaan (3.14), yaitu

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{\Gamma(\delta/\beta_x + 1)\Gamma(\delta/\beta_y + 1)\Gamma(1/\beta_x + 1/\beta_y + 1)\alpha_x \alpha_y}{\Gamma(\delta(1/\beta_x + 1/\beta_y) + 1)} \\ &\quad - (\alpha_x \Gamma(1/\beta_x + 1)\alpha_y \Gamma(1/\beta_y + 1)) \\ &= \alpha_x \alpha_y \left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_x + 1)\Gamma(\delta/\beta_y + 1)\Gamma(1/\beta_x + 1/\beta_y + 1)}{\Gamma(\delta(1/\beta_x + 1/\beta_y) + 1)} \right. \\ &\quad \left. - (\Gamma(1/\beta_x + 1)\Gamma(1/\beta_y + 1)) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Perhatikan pula pada persamaan (3.14) bahwa untuk  $\delta = 1$ , ditemukan hubungan  $E[XY] = E[X]E[Y]$ . Sehingga pada nilai tersebut  $X$  dan  $Y$  independen. Korelasi antara  $X$  dan  $Y$  juga diperoleh melalui persamaan (3.15) dan (3.7), dituliskan sebagai berikut

$$\rho_{XY} = Cov(X, Y) / \sigma_X \sigma_Y$$

$$= \frac{\left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_x+1)\Gamma(\delta/\beta_y+1)\Gamma(1/\beta_x+1/\beta_y+1)}{\Gamma(\delta(1/\beta_x+1/\beta_y)+1)} - \left( \Gamma(1/\beta_x + 1)\Gamma(1/\beta_y + 1) \right) \right)}{\left( \left( \Gamma(2/\beta_x + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_x + 1) \right)^2 \right) \left( \Gamma(2/\beta_y + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_y + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2}} \quad (3.16)$$

Selain itu, Lu dan Bhattacharyya (1990) juga menyampaikan bahwa untuk kasus dimana  $\beta_x = \beta_y = \beta$ , korelasi antara  $X$  dan  $Y$  dapat dituliskan secara lebih sederhana oleh persamaan berikut :

$$\rho_{XY} = \left( \Gamma(2/\beta + 1) - \left( \Gamma(1/\beta + 1) \right)^2 \right)^{-1} \left( \frac{\left( \Gamma(\delta/\beta + 1) \right)^2 \Gamma(2/\beta + 1)}{\Gamma(2\delta/\beta + 1)} - \left( \Gamma(1/\beta + 1) \right)^2 \right) \quad (3.17)$$

Model distribusi Weibull bivariat ini nantinya digunakan dalam merepresentasikan distribusi kehidupan mesin fotokopi berdasarkan usia dan penggunaannya (diwakili dengan banyaknya salinan/*copies*). Karenanya, harus dibuktikan bahwa  $E[Y|X = x]$  merupakan fungsi naik atau dengan kata lain akan dibuktikan bahwa turunan pertama  $E[Y|X = x]$  terhadap  $x$  bernilai positif. Secara sederhana, pembuktian ini dilakukan dengan memastikan bahwa turunan pertama dari unsur-unsur fungsi yang mengandung  $x$  bernilai positif. Perhatikan bahwa ekspektasi  $Y$  bersyarat  $X = x$  memenuhi bentuk persamaan berikut

$$\begin{aligned} E[Y|X = x] &= \int_0^\infty yf(y|x) dy \\ &= \delta\alpha_y(x/\alpha_x)^{\beta_x(1/\delta-1)} \exp((x/\alpha_x)^{\beta_x}) \left( \int_0^\infty y^c (y + t)^{2\delta-2} \exp(-(y+t)^\delta) dz \right) \\ &\quad + (1/\delta - 1) \int_0^\infty y^c (y + t)^{\delta-2} \exp(-(y+t)^\delta) dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dengan  $c = \delta/\beta_y$  dan  $t = (x/\alpha_x)^{\beta_x/\delta}$ . Integrasi  $\int_0^\infty y^c (y+t)^{2\delta-2} \exp(-(y+t)^\delta) dy$  dimana  $c > 0$  dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan numerik. Perhatikan bentuk  $t = (x/\alpha_x)^{\beta_x/\delta}$ , didapatkan turunan pertama terhadap  $x$  adalah

$$dt/dx = \beta_x(x/\alpha_x)^{\beta_x/\delta} / dx > 0 \quad (3.19)$$

Dengan demikian, jelas bahwa  $E[Y|X = x]$  merupakan fungsi naik, sehingga model distribusi Weibull bivariat dapat digunakan untuk merepresentasikan distribusi kehidupan mesin fotokopi.

#### D. DISTRIBUSI WEIBULL MULTIVARIAT BERDASARKAN *RANDOM HAZARD*

Pada bagian C, telah dibicarakan perihal konstruksi fungsi keandalan bersama distribusi Weibull bivariat (Lu dan Bhattacharyya, 1990). Konsep ini dapat digunakan untuk kembali mengkonstruksi model distribusi Weibull multivariat berdasarkan *random hazard* (Lee dan Wen, 2009). Pada distribusi Weibull bivariat, dimisalkan terdapat 2 macam peubah acak yaitu  $X$  dan  $Y$ . Maka, identik dengan pemisalan tersebut, pada distribusi Weibull multivariat, dapat dimisalkan terdapat peubah acak  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Dengan demikian berdasarkan persamaan (2.3.1.a), fungsi keandalan Weibull multivariat dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, \dots, x_n) &= P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_n > x_n\} \\ &= \exp\left(-\left(\left(x_1/\alpha_{x_1}\right)^{\beta_{x_1}/\delta} + \left(x_2/\alpha_{x_2}\right)^{\beta_{x_2}/\delta} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(x_n/\alpha_{x_n}\right)^{\beta_{x_n}/\delta}\right)^\delta\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

dengan  $0 < \delta \leq 1$  adalah parameter asosiasi antar komponen (Lee dan Wen, 2009), dan  $0 < \alpha_{x_i} < \infty$ , dan  $0 < \beta_{x_i} < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , masing-masing merupakan parameter skala dan parameter bentuk. Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (3.20), fungsi distribusi kumulatif Weibull multivariat memenuhi persamaan

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_n) &= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} \\
&= 1 - \bar{F}(x_1, \dots, x_n) \\
&= 1 \\
&\quad - \exp\left(-\left((x_1/\alpha_{x_1})^{\beta_{x_1/\delta}} + (x_2/\alpha_{x_2})^{\beta_{x_2/\delta}} + \dots \right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ (x_n/\alpha_{x_n})^{\beta_{x_n/\delta}}\right)^\delta\right)
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

Sedangkan, fungsi kerusakan (*hazard*) Weibull multivariat juga dikonstruksi dengan mengadaptasi persamaan (3.20), sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
h(x_1, \dots, x_n) &= -\frac{1}{\bar{F}(x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial^n \bar{F}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \\
&= (-1/\delta)^n (B)(C) \sum_{i=1}^{P(n)} \left[ (-1)^{k_i} P_s(n, i) \left( \prod_{j=1}^{k_i} \delta^{n_j} \right) (A)^{k_i \delta - n} \right]
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Sedangkan fungsi kumulatif *hazard* tidak lain merupakan integrasi dari persamaan (3.20) atau lebih mudahnya, adalah fungsi logaritma natural dari persamaan (2.4.1.a)

$$\begin{aligned}
h(x_1, \dots, x_n) &= -\ln \bar{F}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \left( (x_1/\alpha_{x_1})^{\beta_{x_1/\delta}} + (x_2/\alpha_{x_2})^{\beta_{x_2/\delta}} + \dots + (x_n/\alpha_{x_n})^{\beta_{x_n/\delta}} \right)^\delta
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

Fungsi kepadatan peluang Weibull multivariat diperoleh dari menurunkan fungsi distribusi kumulatif pada persamaan (3.21) terhadap masing-masing peubah, sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \\
&= (-1/\delta)^n \exp(-A^\delta) (B)(C) \sum_{i=1}^{P(n)} \left[ (-1)^{k_i} P_s(n, i) \left( \prod_{j=1}^{k_i} \delta^{n_j} \right) (A)^{k_i \delta - n} \right]
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A &= \left( (x_1/\alpha_{x_1})^{\beta_{x_1}/\delta} + (x_2/\alpha_{x_2})^{\beta_{x_2}/\delta} + \dots + (x_n/\alpha_{x_n})^{\beta_{x_n}/\delta} \right); \\
 B &= \left( (\beta_{x_1}/\alpha_{x_1})(\beta_{x_2}/\alpha_{x_2}) \dots (\beta_{x_n}/\alpha_{x_n}) \right) \text{ dan} \\
 C &= (x_1/\alpha_{x_1})^{(\beta_{x_1}/\delta)-1} + (x_2/\alpha_{x_2})^{(\beta_{x_2}/\delta)-1} + \dots + (x_n/\alpha_{x_n})^{(\beta_{x_n}/\delta)-1}.
 \end{aligned}$$

Beberapa notasi baru diperkenalkan pada konstruksi distribusi Weibull multivariat. Berdasarkan Lee dan Wen (2009), notasi  $k_i$  adalah banyak penjumlahan dari partisi ke- $i$  dari  $n$  sedemikian hingga  $n_1 + n_2 + \dots + n_{k_i} = n$ , dimana  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k_i} > 0$  dan  $1 \leq k_i \leq n$ . Sedangkan  $\delta^{n_j}$  dapat juga diuraikan dalam bentuk faktorial  $\delta(\delta - 1) \dots (\delta - n_j + 1)$ .  $P(n)$  ialah total banyaknya partisi dari  $n$ ,  $P_s(n, i)$  merupakan total banyaknya himpunan partisi dari himpunan  $S_n = \{1, \dots, n\}$  yang berkorespondensi dengan partisi ke- $i$  dari  $n$ .

Adapun *general moment* dari model distribusi Weibull multivariat didapat dengan terlebih dahulu melakukan transformasi terhadap distribusi tersebut. Seperti biasanya, proses transformasi akan memerlukan keberadaan formula determinan matriks Jacobian. Determinan dari matriks Jacobian diperoleh dengan menggunakan eliminasi Gaussian untuk mengkonstruksi matriks segitiga atas. Determinan nantinya akan sama dengan produk dari elemen diagonal (Lee dan Wen, 2009). Bentuk determinan Jacobian dapat dituliskan sebagai berikut :

$$|J| = \frac{\delta^{n-1} \alpha_{x_1} \dots \alpha_{x_n} x_1^{\delta/\beta_{x_1}-1} \dots x_{n-1}^{\delta/\beta_{x_{n-1}}-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})^{\delta/\beta_{x_n}-1}}{x_n^{1/\beta_{x_1}+1/\beta_{x_2}+\dots+1/\beta_{x_n}-1} \beta_{x_1} \beta_{x_2} \dots \beta_{x_n}}$$

Sehingga akhirnya, *general moment* dari distribusi Weibull multivariat dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
& E[X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}] \\
&= \frac{\Gamma(i_1\delta/\beta_{x_1} + 1) \dots \Gamma(i_n\delta/\beta_{x_n} + 1) \Gamma((i_1/\beta_{x_1} + \dots + i_n/\beta_{x_n}) + 1) \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n}}{\Gamma((i_1/\beta_{x_1} + \dots + i_n/\beta_{x_n})\delta + 1)}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.25) sebenarnya merupakan perluasan dari persamaan (3.13). *General moment* ini juga dapat digunakan untuk memperoleh kovarian dan korelasi. Misalkan didefinisikan  $\{X_1, X_2, X_3\}$  sebagai peubah acak berdistribusi Weibull multivariat (trivariat). Berdasarkan persamaan (3.25), diperoleh

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E[X_1^1 X_2^1 X_3^0] - E[X_1^1 X_2^0 X_3^0] E[X_1^0 X_2^1 X_3^0] \\
&= E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2] \\
&= \alpha_{x_1} \alpha_{x_2} \left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_{x_1} + 1) \Gamma(\delta/\beta_{x_2} + 1)}{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_2}) + 1)} - \frac{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_2})\delta + 1)}{\Gamma(1/\beta_{x_1} + 1) \Gamma(1/\beta_{x_2} + 1)} \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_3) &= E[X_1^1 X_2^0 X_3^1] - E[X_1^1 X_2^0 X_3^0] E[X_1^0 X_2^0 X_3^1] \\
&= E[X_1 X_3] - E[X_1] E[X_3] \\
&= \alpha_{x_1} \alpha_{x_3} \left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_{x_1} + 1) \Gamma(\delta/\beta_{x_3} + 1)}{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3}) + 1)} - \frac{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3})\delta + 1)}{\Gamma(1/\beta_{x_1} + 1) \Gamma(1/\beta_{x_3} + 1)} \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_2, X_3) &= E[X_1^0 X_2^1 X_3^1] - E[X_1^0 X_2^1 X_3^0] E[X_1^0 X_2^0 X_3^1] \\
&= E[X_2 X_3] - E[X_2] E[X_3]
\end{aligned}$$

$$= \alpha_{x_2} \alpha_{x_3} \left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(\delta/\beta_{x_3} + 1)}{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3}) + 1)} - \frac{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3})\delta + 1)}{\Gamma(1/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(1/\beta_{x_3} + 1)} \right) \quad (3.28)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.26), (3.27), (3.28) dan persamaan (3.7), korelasi setiap pasang peubah acak akan memenuhi persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \rho_{X_1X_2} &= \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \\ &= \frac{\left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(\delta/\beta_{x_2} + 1)}{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_2}) + 1)} - \frac{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_2})\delta + 1)}{\Gamma(1/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(1/\beta_{x_2} + 1)} \right)}{\left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_1} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_1} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2} \left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_2} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_2} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \rho_{X_1X_3} &= \frac{Cov(X_1, X_3)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_3}} \\ &= \frac{\left( \frac{\Gamma(\delta/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(\delta/\beta_{x_3} + 1)}{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3}) + 1)} - \frac{\Gamma((1/\beta_{x_1} + 1/\beta_{x_3})\delta + 1)}{\Gamma(1/\beta_{x_1} + 1)\Gamma(1/\beta_{x_3} + 1)} \right)}{\left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_1} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_1} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2} \left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_3} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_3} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
\rho_{X_2X_3} &= \frac{Cov(X_2, X_3)}{\sigma_{X_2}\sigma_{X_3}} \\
&= \frac{\left( \begin{array}{c} \Gamma(\delta/\beta_{x_2}+1)\Gamma(\delta/\beta_{x_3}+1) \\ \frac{\Gamma((1/\beta_{x_2}+1/\beta_{x_3})+1)}{\Gamma((1/\beta_{x_2}+1/\beta_{x_3})\delta+1)} - \\ \Gamma(1/\beta_{x_2} + 1)\Gamma(1/\beta_{x_3} + 1) \end{array} \right)}{\left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_2} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_2} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2} \left( \left( \Gamma(2/\beta_{x_3} + 1) - \left( \Gamma(1/\beta_{x_3} + 1) \right)^2 \right) \right)^{1/2}} \\
&\quad (3.31)
\end{aligned}$$



## BAB IV

### ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL

#### A. PENDAHULUAN

Praktisi statistika dan matematika telah banyak melakukan penelitian di bidang distribusi Weibull dalam berbagai macam dimensi : univariat, bivariat, dan multivariat. Arah penelitian mengenai distribusi Weibull ini lebih difokuskan pada statistika inferensi, yaitu misalkan mengenai bagaimana mendapatkan estimator parameter yang sesuai untuk distribusi Weibull dengan karakter data tertentu. Metode yang sering digunakan untuk mengestimasi parameter meliputi metode estimasi *maximum likelihood (MLE)*, metode estimasi kuadrat terkecil (*least square*), dan metode estimasi Bayesian.

Pada kasus univariat, Stone dan Heeswijk (1977) menguraikan estimasi parameter Weibull 3 parameter dengan menggunakan metode grafik dan *MLE* untuk data tersensor. Estimasi ini digunakan untuk model distribusi kerusakan alat-alat elektronik. Sedangkan Bhattacharya dan Bhattacharjee (2010), telah mempelajari estimasi parameter Weibull 2 parameter pada model kecepatan angin yang digunakan untuk tenaga pembangkit listrik. Metode yang digunakan adalah *MLE* dan *Least square*.

Pada kasus bivariat, Al-Hussaini dan Ateya (2005) menyajikan estimasi parameter Weibull dengan menggunakan metode *MLE* dan Bayesian. Hasil estimasi kedua metode tersebut dibandingkan berdasarkan nilai *MSE* masing-masing. Selain itu, Dewan dan Nandi (2010) menerapkan algoritma *Expectation – Maximization (EM)* untuk estimasi parameter Weibull bivariat dengan asumsi *random censoring*. Han (2006) juga menguraikan estimasi parameter dengan *MLE* untuk berbagai macam distribusi masa hidup, salah satunya adalah distribusi Weibull bivariat berdasarkan *random hazard*. Terdapat pula uraian mengenai metode pembangkitan data bivariat Weibull, berdasarkan

konstruksi Lu dan Bhattacharyya (1990). Selanjutnya, pada kasus multivariat, Lee dan Wen (2009) mengerjakan estimasi parameter untuk distribusi Weibull dengan 3 peubah acak (trivariat),  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$ . Penelitian ini kembali menggunakan metode *MLE*. Lu (1990) juga menggunakan model Weibull multivariat yang telah lebih dahulu dikonstruksi oleh Hougaard (1986) untuk melakukan estimasi parameter atas produk yang dikenai *Accelerated Life Test (ALT)* pada proses produksinya, berdasarkan metode estimasi kuadrat terkecil (*least square*).

Berikut akan diuraikan estimasi parameter Weibull univariat dan bivariat dengan metode *MLE* yang dievaluasi dengan metode numerik Newton-Raphson dan Algoritma Genetika. Studi simulasi untuk masing-masing kasus juga disertakan untuk dapat memberikan ilustrasi nyata bagi pembaca.

## B. ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL UNIVARIAT

Parameter distribusi Weibull univariat akan ditaksir menggunakan metode *Maximum Likelihood (MLE)*. Penaksiran ini diawali dengan mengkonstruksi fungsi *likelihood* Weibull univariat. Konstruksi fungsi *likelihood* didasarkan pada *pdf* Weibull di persamaan (2.2.3). Misalkan  $(X_1, \dots, X_n)$  merupakan peubah acak yang berdistribusi identik dan independen dengan fungsi kepadatan peluang  $f(x; \alpha, \beta)$ , yaitu distribusi Weibull. Fungsi *likelihood* diberikan oleh

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; x_i) &= \prod_{i=1}^n f(\alpha, \beta; x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \beta/\alpha (x_i/\alpha)^{\beta-1} e^{-(x_i/\alpha)^\beta} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Diperlukan transformasi fungsi *likelihood* pada persamaan (4.1) supaya dapat lebih representatif untuk proses selanjutnya. Perhatikan bahwa persamaan (4.1) merupakan fungsi eksponensial. Sehingga, transformasi yang tepat adalah transformasi logaritma, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}
 l(\alpha, \beta) &= \ln L(\alpha, \beta; x_i) \\
 &= n \ln \beta - n\beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Perhatikan bahwa transformasi fungsi *likelihood* kepada fungsi *log-likelihood* tidak akan mengubah hakikat perhitungan, karena sifat fungsi logaritma yang monoton naik. Sehingga nantinya, maksimasi fungsi *log-likelihood* ekuivalen dengan maksimasi fungsi *likelihood* itu sendiri. Karena parameter yang akan diestimasi adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ , maka fungsi *log-likelihood* harus diturunkan satu kali masing-masing terhadap  $\alpha$  dan  $\beta$  atau dengan kata lain, akan ditentukan nilai kritisnya terhadap masing-masing parameter. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \frac{\ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)}{\alpha^\beta} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -n\beta(\alpha^{\beta+1}) + \alpha\beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \tag{4.4}$$

Untuk memastikan bahwa fungsi *log-likelihood* pada persamaan (4.2) memiliki nilai maksimum, akan dibuktikan bahwa turunan kedua terhadap  $\beta$  akan kurang dari nol. Perhatikan uraian berikut

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)^2 - (\ln \alpha)^2 \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = -n\alpha^\beta(\beta + 1) + \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \tag{4.6}$$

Karena peubah acak  $(X_1, \dots, X_n)$  non negatif, dan nilai parameter  $\alpha, \beta > 0$ , maka jelas, bahwa persamaan (4.5) dan persamaan (4.6) bernilai kurang dari nol. Bukti lengkap dapat dilihat pada lampiran C1. Apabila persamaan (4.6) disamadengankan nol, diperoleh hubungan berikut :

$$\alpha = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right)^{1/\beta} \quad (4.7)$$

Perhatikan apabila persamaan (4.7) disubstitusikan pada persamaan (4.3) diperoleh persamaan berikut :

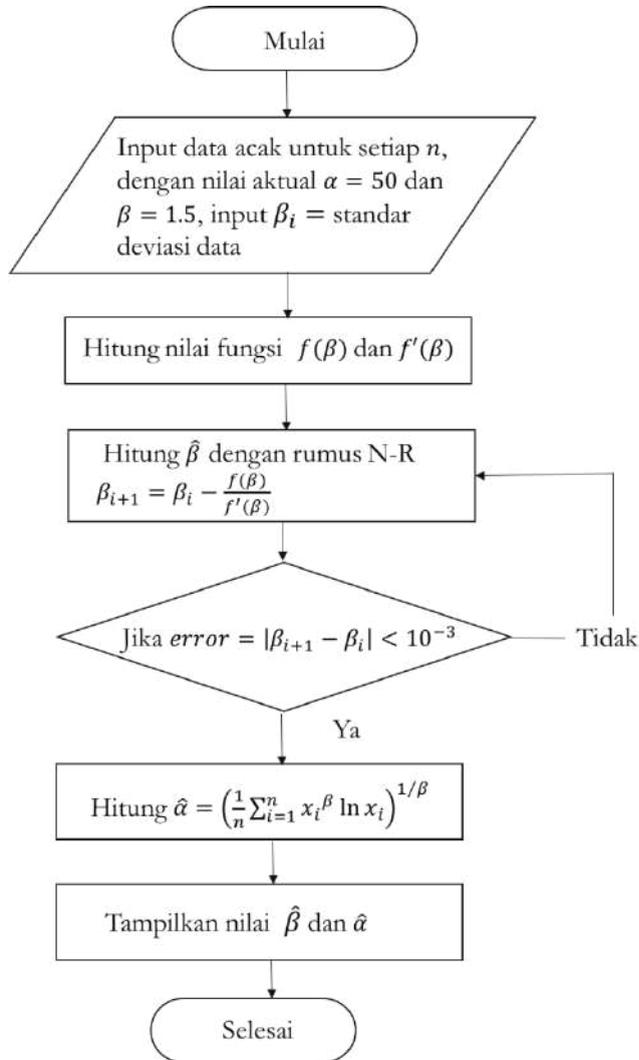
$$f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} = 0 \quad (4.8)$$

Untuk memberikan gambaran umum, berikut disajikan diagram alir dari metode numerik Newton-Raphson. (N-R) dan metode heuristik algoritma genetika (GA) untuk menyelesaikan permasalahan estimasi  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\beta}$ . Metode N-R memanfaatkan persamaan (4.8) untuk terlebih dahulu mendapatkan nilai  $\hat{\beta}$ . Sebelumnya telah dibuktikan ketunggalan  $\hat{\beta}$  pada lampiran. Berdasarkan bentuk umum metode N-R, dapat dituliskan persamaan iteratif sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n - \frac{f(\hat{\beta}_n)}{f'(\hat{\beta}_n)} \quad (4.9)$$

Artinya, dibutuhkan bentuk  $f'(\beta)$  supaya metode numerik ini dapat dilaksanakan. Berikut adalah diferensiasi dari  $f(\beta)$  yang dapat dituliskan sebagai persamaan

$$f'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} + \frac{[\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln(x_i)]^2}{[\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta]^2} \quad (4.10)$$



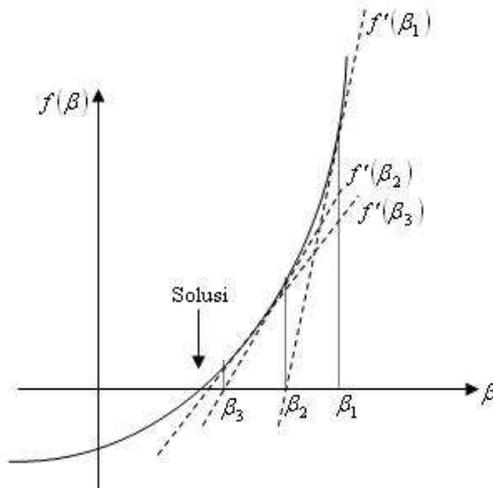
**Gambar 4.1.** Diagram Alir Metode Numerik Newton-Raphson (N-R).

Diagram ini menunjukkan alur kerja N-R untuk estimasi parameter distribusi Weibull univariat. Diperlukan persamaan (4.9) dan (4.7), serta nilai awal untuk  $\hat{\beta}$  yaitu standar deviasi data.

Solusi atau nilai kritis dari persamaan () dan () tidak dapat diperoleh secara analitis atau eksplisit (Bhattacharya dan

Bhattacharjee, 2010). Oleh karena itu, digunakan metode numerik Newton-Raphson.

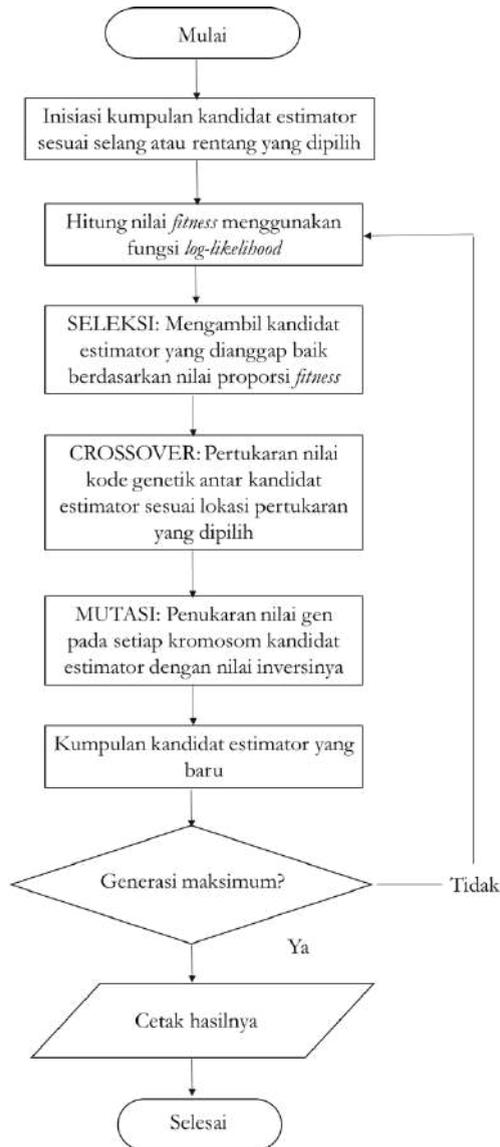
Setelah mendapatkan  $\hat{\beta}$  melalui komputasi numerik Newton-Raphson, taksiran  $\hat{\alpha}$  didapatkan melalui persamaan (4.7). Berikut merupakan ilustrasi metode Newton Raphson (N-R) untuk mendapatkan nilai  $\beta$ .



**Gambar 4.2** Ilustrasi Metode Newton Raphson (N-R) untuk mendapatkan akar dari persamaan (). Misalkan dipilih titik awal  $\beta_1$ . Dibuat garis singgung  $f'(\beta_1)$  sesuai persamaan () yang memotong sumbu  $\beta$  di titik  $\beta_2$ . Dibuat kembali garis singgung  $f'(\beta_2)$  yang memotong sumbu  $\beta$  di titik  $\beta_3$ . Begitu seterusnya hingga diperoleh solusi yang diharapkan.

Metode heuristik *GA* memiliki prinsip kerja yang berbeda dengan metode *N-R*. *GA* adalah algoritma yang mengadaptasi proses seleksi alamiah yang dikenal dengan proses evolusi. Dalam proses evolusi, individu secara terus-menerus mengalami perubahan gen untuk menyesuaikan dengan lingkungan hidupnya. Proses seleksi alamiah ini melibatkan perubahan gen yang terjadi pada individu melalui proses perkembangbiakan. Dalam algoritma genetika, proses perkembangbiakan yang terdiri dari seleksi, persilangan (*cross over*), dan mutasi menjadi proses dasar yang menjadi perhatian utama, dengan dasar berpikir bagaimana mendapatkan keturunan yang lebih

baik (Basuki, 2003). Secara umum, *GA* dapat digambarkan ke dalam bentuk diagram alir berikut :



**Gambar 4.3** Diagram Alir Algoritma Genetika (*GA*). Metode ini digunakan untuk optimasi fungsi *log-likelihood*. Persamaan () digunakan sebagai fungsi *fitness*. Inisiasi kandidat estimator dibangkitkan berdasarkan selang yang dipilih.

Dalam permasalahan estimasi parameter, *GA* berperan sebagai metode untuk mendapatkan nilai  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\beta}$  yang mampu membuat fungsi *likelihood* pada persamaan (3.2) bernilai maksimum. *GA* tidak memerlukan persamaan derivatif untuk memperoleh nilai optimum dari suatu fungsi objektif. Pada algoritma ini, kumpulan kandidat solusi dari permasalahan optimasi, terus dievaluasi ke arah solusi terbaik menggunakan fungsi *fitness* (Bulmer dan Eccleston, 2003). Pada permasalahan ini digunakan fungsi *log-likelihood* seperti pada persamaan (3.2) sebagai fungsi *fitness*. Seharusnya, fungsi *likelihood* pada persamaan (3.2) adalah fungsi objektif yang lebih tepat berperan sebagai fungsi *fitness*. Namun, setelah diujicobakan, ternyata fungsi *likelihood* menghabiskan waktu *elapsed* lebih lama daripada fungsi *log-likelihood*

Selain pendefinisian fungsi *fitness*, *GA* juga mensyaratkan representasi genetik dari kandidat solusi estimator. Maksud dari representasi genetik disini adalah struktur dari kumpulan kandidat solusi estimator yang hendak dievaluasi. Dalam hal ini, digunakan representasi genetik baku berupa larik bit 0 dan 1. Nilai kandidat solusi ini akan selalu berada di dalam selang yang dipilih. Karenanya, diperlukan ketepatan dalam pemilihan selang kandidat solusi estimator.

Misalkan selang untuk  $\hat{\alpha}$  adalah  $[\hat{\alpha}_{min}, \hat{\alpha}_{max}]$  dan selang untuk  $\hat{\beta}$  adalah  $[\hat{\beta}_{min}, \hat{\beta}_{max}]$ , sehingga  $\hat{\alpha}_{min} \leq \hat{\alpha} \leq \hat{\alpha}_{max}$  dan  $\hat{\beta}_{min} \leq \hat{\beta} \leq \hat{\beta}_{max}$ . Batas parameter ini digunakan sebagai pedoman untuk menentukan panjang kromosom  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\beta}$  melalui persamaan

$$k_{\hat{\alpha}} = \lceil {}^2\log((\hat{\alpha}_{max} - \hat{\alpha}_{min})10^s + 1) \rceil$$

$$k_{\hat{\beta}} = \lceil {}^2\log((\hat{\beta}_{max} - \hat{\beta}_{min})10^s + 1) \rceil$$

Dimana  $k_{\hat{\alpha}}$  dan  $k_{\hat{\beta}}$  adalah panjang kromosom masing-masing untuk  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\beta}$ , serta  $s \in Z$  adalah tingkat ketelitian yang diinginkan untuk parameter. Batas parameter ini juga digunakan untuk mengubah bentuk biner pada kromosom menjadi bilangan real kembali dengan menggunakan persamaan

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{min} + polyval(krom\hat{\alpha}) \left( \frac{\hat{\alpha}_{max} - \hat{\alpha}_{min}}{2^{k_{\hat{\alpha}}} - 1} \right)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_{min} + polyval(krom\hat{\beta}) \left( \frac{\hat{\beta}_{max} - \hat{\beta}_{min}}{2^{k_{\hat{\beta}}} - 1} \right)$$

Untuk memberikan pemahaman yang lebih baik perihal ketepatan pilihan selang kandidat solusi, *GA* telah diujicobakan pada estimasi parameter distribusi normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Percobaan dilakukan dengan membangkitkan data  $X \sim N(0,3)$ . Misalkan dipilih selang untuk  $\hat{\mu}$  dan  $\hat{\sigma}$  adalah  $[\hat{\mu}_{min}, \hat{\mu}_{max}] = [\hat{\sigma}_{min}, \hat{\sigma}_{max}] = [-5,5]$ . Didapatkan nilai  $\hat{\mu} = 0,18$  dan  $\hat{\sigma}^2 = 3,4225$ . Terlihat bahwa hasil tersebut cukup mendekati nilai parameter sebenarnya, yaitu  $\mu = 0$  dan  $\sigma^2 = 3$ . Namun, misalkan dipilih selang  $[\hat{\mu}_{min}, \hat{\mu}_{max}] = [1,5]$  dan  $[\hat{\sigma}_{min}, \hat{\sigma}_{max}] = [2,6]$  diperoleh nilai  $\mu = 1,02$  dan  $\sigma^2 = 4,03$ . Hasil tersebut menunjukkan bahwa *GA* hanya akan mendeteksi nilai maksimum fungsi *fitness* pada selang yang ditetapkan.

Setelah penentuan selang kandidat estimator, dilakukan pembangkitan sejumlah kandidat (individu) yang akan dilibatkan dalam proses seleksi, persilangan (*cross over*), dan mutasi. Seleksi adalah mengevaluasi kandidat berdasarkan nilai proporsinya untuk menjadi induk baru pada proses selanjutnya. Nilai proporsi didasarkan pada nilai fungsi *fitness* yaitu *log-likelihood*. Persilangan (*cross over*) adalah membandingkan kromosom kandidat satu dengan lainnya, untuk kemudian melakukan pertukaran kode genetik berdasarkan posisi yang dipilih. Proses ini melibatkan nilai peluang persilangan (*PC*) yang ditetapkan. Sedangkan mutasi adalah proses inversi kode genetik setiap kandidat, 0 menjadi 1, begitu juga sebaliknya. Mutasi juga melibatkan nilai peluang mutasi (*PM*). Setelah melalui proses ini, terbentuklah kelompok induk baru yang terdiri dari sejumlah individu. Induk baru ini akan kembali mengalami proses seleksi, persilangan, dan mutasi terus menerus, sebanyak iterasi yang ditetapkan. Ilustrasi mengenai seleksi, persilangan, dan mutasi, dicantumkan pada lampiran.

Selanjutnya, dilakukan simulasi untuk estimasi parameter distribusi Weibull, menggunakan metode *MLE* yang dievaluasi oleh *N-R*, *GA*, dan *Weibull Fit* yang telah tersedia sebagai *default function* di *MATLAB*. Pada dasarnya, *Weibull Fit* juga menggunakan metode

*MLE* untuk mencari estimator distribusi Weibull. Data simulasi terdiri dari berbagai macam ukuran sampel, dengan nilai parameter  $\alpha = 50$  dan  $\beta = 1,5$ . Simulasi numerik dikerjakan menggunakan perangkat lunak MATLAB R2010a. *N-R* menggunakan nilai awal  $\hat{\beta}_1$  adalah standar deviasi data. *GA* dilakukan dengan ukuran individu (kumpulan kandidat) sebanyak 20, dengan 500 iterasi,  $PM = 0,65$  dan  $PC = 0,25$ . Berikut disajikan tabel hasil simulasi dari ketiga macam metode.

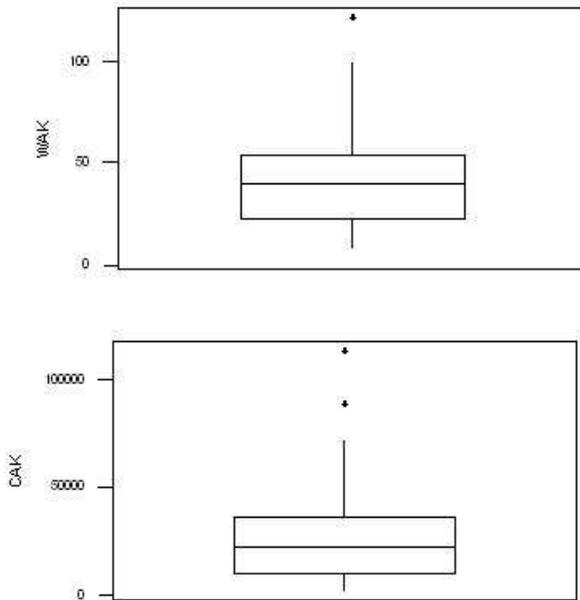
**Tabel 4.1.** Hasil Estimasi Parameter dengan metode Newton-Raphson (*N-R*), Algoritma Genetika (*GA*), dan *Weibull Fit*. Ketiga metode diujicobakan terhadap berbagai macam ukuran data yang berbeda. Waktu *running* di setiap ukuran data tercatat di kolom yang bersebelahan dengan metode estimasi terkait.

$n$	$\hat{\alpha}_{NR}, \hat{\beta}_{NR}$	Waktu elapsed (detik)	$\hat{\alpha}_{GA}, \hat{\beta}_{GA}$	Waktu elapsed (detik)	$\hat{\alpha}_{FIT}, \hat{\beta}_{FIT}$	Waktu elapsed (detik)
5	(50,01 ; 2,36)	0,86	(46,31 ; 1,30)	20,38	(49,96 ; 2,35)	0,39
10	(53,00 ; 1,87)	0,55	(46,83 ; 1,89)	20,63	(52,95 ; 1,86)	0,06
15	(47,69 ; 1,89)	0,53	(47,03 ; 1,62)	21,08	(47,65 ; 1,88)	0,06
20	(50,41 ; 1,49)	0,47	(49,59 ; 1,42)	20,82	(50,37 ; 1,48)	0,05
25	(52,33 ; 1,42)	0,41	(49,51 ; 1,64)	21,54	(52,28 ; 1,43)	0,06
30	(51,61 ; 1,40)	0,55	(50,61 ; 1,37)	21,42	(51,56 ; 1,40)	0,05
35	(50,94 ; 1,67)	0,29	(48,53 ; 1,50)	22,06	(50,89 ; 1,66)	0,05
40	(50,32 ; 1,69)	0,41	(49,42 ; 1,44)	22,54	(50,27 ; 1,68)	0,05
45	(50,10 ; 1,55)	0,43	(48,78 ; 1,49)	23,14	(50,06 ; 1,55)	0,05
50	(50,31 ; 1,69)	0,40	(50,04 ; 1,40)	23,38	(50,26 ; 1,69)	0,05
100	(48,68 ; 1,44)	0,63	(47,85 ; 1,48)	29,80	(50,78 ; 1,54)	0,09
150	(49,68 ; 1,54)	0,95	(47,35 ; 1,45)	32,66	(46,97 ; 1,45)	0,05
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
300	(51,74 ; 1,51)	1,47	(48,31 ; 1,48)	47,10	(46,30 ; 1,50)	0,05
500	(48,61 ; 1,45)	2,12	(50,50 ; 1,53)	66,71	(50,83 ; 1,50)	0,12

Hasil estimasi pada tabel (4.1) menunjukkan bahwa mayoritas estimator *GA* berada di bawah nilai parameter sesungguhnya. Sedangkan estimator *N-R* dan *Weibull Fit* memiliki kecenderungan untuk selalu berada di atas nilai sesungguhnya (*over estimated*). Apabila

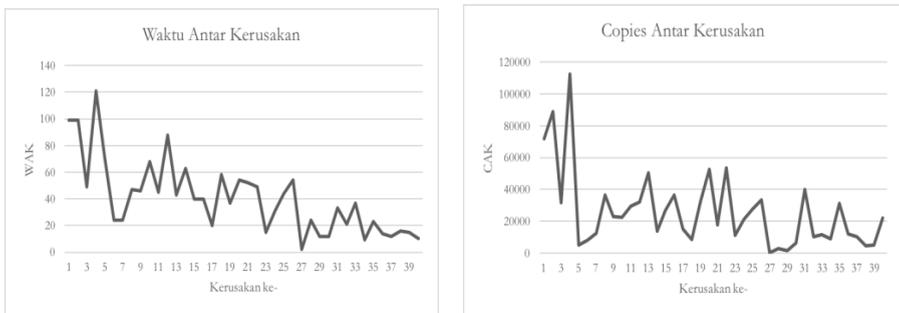
dipandang dari sisi waktu eksekusi (*elapsed time*),  $GA$  tercatat memerlukan waktu lebih lama daripada  $N-R$  dan Weibull  $Fit$ .

Ketiga macam metode ini juga diujicobakan pada data mesin fotokopi (Bulmer dan Eccleston, 2006). Bulmer dan Eccleston (2003) melakukan pemodelan distribusi kerusakan mesin fotokopi berdasarkan data riwayat kerusakan mesin tersebut selama 4,5 tahun (Lampiran). Kerusakan yang tercatat merupakan kerusakan berbagai komponen yang telah diganti sebanyak 2 kali. Kerusakan diamati dari dua macam sudut pandang, yaitu kerusakan sistem dan kerusakan komponen (pengamatan terhadap satu macam komponen saja, yaitu *cleaning web*, *feed rollers*, dan *ozone filter*). Data yang disajikan meliputi data waktu kerusakan dalam satuan hari, dan data banyaknya salinan dokumen (*copies*) dalam satuan lembar yang terbaca pada indikator penghitung (*counter*), pada mesin fotokopi. Diketahui terdapat 39 kerusakan sistem, 15 kerusakan *cleaning web*, 11 kerusakan *feed roller*, dan 8 kerusakan *ozone filter* (Lampiran A2)



**Gambar 4.4** *Box-Plot* Waktu dan *Copies* Antar Kerusakan Mesin Fotokopi. Melalui gambar ini, ukuran statistik data dapat dibaca, yaitu nilai minimum, kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, nilai maksimum dan data pencilan.

Pada studi kasus ini, data yang digunakan adalah data waktu antar kerusakan ( $WAK$ ) dan *copies* antar kerusakan ( $CAK$ ). Sebelum dilakukan estimasi parameter menggunakan metode yang telah dijelaskan di atas, tentu diperlukan pemahaman yang baik mengenai deskripsi dan distribusi kedua data tersebut. Ringkasan ukuran data disajikan secara grafis pada gambar 4.4 sebagai *Box-Plot*. Kotak pada *Box-Plot* merepresentasikan rentang interkuartil data. Garis tepi bawah kotak adalah nilai kuartil 1 ( $Q_1$ ), garis tengah kotak adalah nilai kuartil 2 ( $Q_2$ ) atau median, dan garis tepi atas kotak adalah nilai kuartil 3 ( $Q_3$ ). Sedangkan garis lurus yang menjulur (*tail*) dari tepi bawah dan atas kotak menunjukkan sebaran nilai data secara keseluruhan, dengan ujung bawah dan atas masing-masing merupakan nilai minimum dan maksimum data. Tanda bintang pada *Box-Plot* menunjukkan keberadaan data pencilan (*outlier*). Kemiringan (*skewness*) distribusi data dapat diamati melalui perbandingan panjang *tail Box-Plot*. Apabila *tail* bawah lebih pendek daripada *tail* atas, dapat dikatakan distribusi data miring ke kanan (*skewed to the right*), demikian pula sebaliknya. Diketahui dari gambar 3.2.3., untuk  $WAK$  sistem,  $Q_1 = 23$ ,  $Q_2 = 40$ , dan  $Q_3 = 54$ , masing-masing dalam satuan hari. Sedangkan untuk  $CAK$  sistem,  $Q_1 = 10.353$ ,  $Q_2 = 22.392$ , dan  $Q_3 = 36.380$ , masing-masing dalam satuan lembar. Pada gambar 3.2.5 juga disajikan *Box-Plot* untuk data komponen mesin fotokopi.



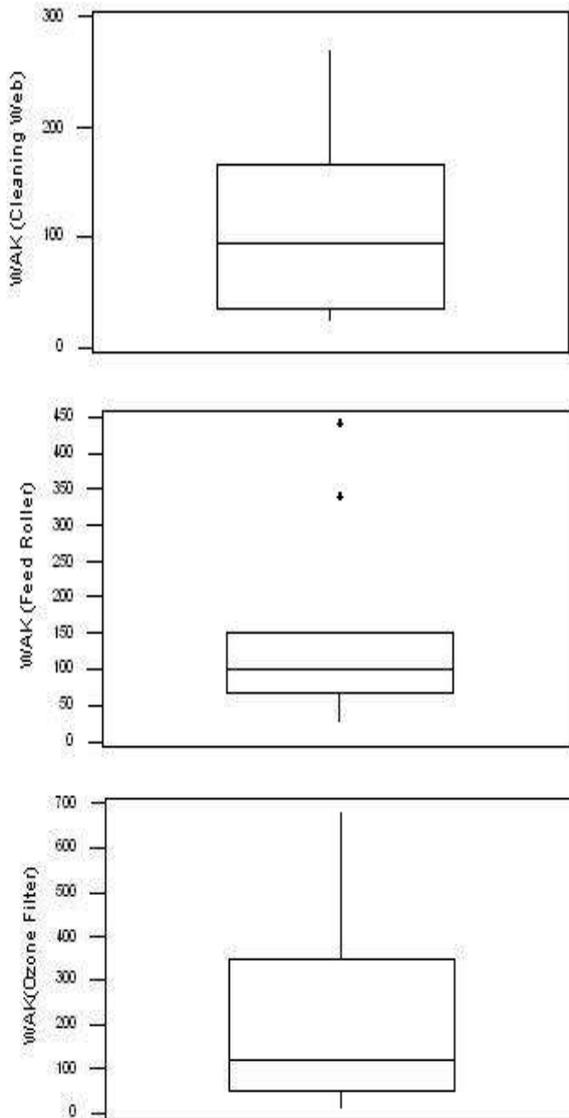
**Gambar 4.5** *Plot Waktu  $WAK$  dan  $CAK$  Sistem Mesin Fotokopi.* Sumbu  $x$  menunjukkan kerusakan ke- $i$ , mesin fotokopi dengan  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Sumbu  $y$  masing-masing menunjukkan waktu dan *copies* antar kerusakan. Terlihat bahwa seiring penuaan mesin, waktu antar kerusakan semakin menyempit, dan *copies* antar kerusakan juga semakin berkurang.

*Mean* dari waktu dan *copies* antar kerusakan sistem masing-masing adalah 42,31 hari dan 28.189 lembar kertas. Plot waktu menunjukkan bahwa *WAK* semakin menyempit atau merapat dari kerusakan satu ke kerusakan lain. Artinya, seiring bertambahnya usia, mesin fotokopi terdeteksi semakin sering mengalami kerusakan sistem. Demikian juga dengan plot waktu *CAK*, menunjukkan penurunan kemampuan mesin fotokopi untuk memproduksi salinan kertas/dokumen. Kedua fenomena ini dapat dilihat pada gambar 4.5 Perhatikan pada kerusakan ke-4 menuju kerusakan ke-5, setelah mengalami rektifikasi (tindakan), mesin fotokopi mengalami masa hidup yang lebih panjang dan produktivitas salinan mengalami kenaikan yang tajam. Namun, pada kerusakan ke-5 menuju kerusakan ke-6, masa hidup mesin fotokopi kembali menurun dan produktivitas salinan terus menurun drastis. Fenomena seperti ini merupakan ciri suatu produk yang mengalami perbaikan minimal (*minimal repair*). Artinya rektifikasi terhadap kerusakan hanya merupakan tindakan perbaikan yang minimal, misalkan dengan mengganti salah satu komponen yang terdeteksi mengalami kerusakan, bukan penggantian keseluruhan mesin fotokopi.

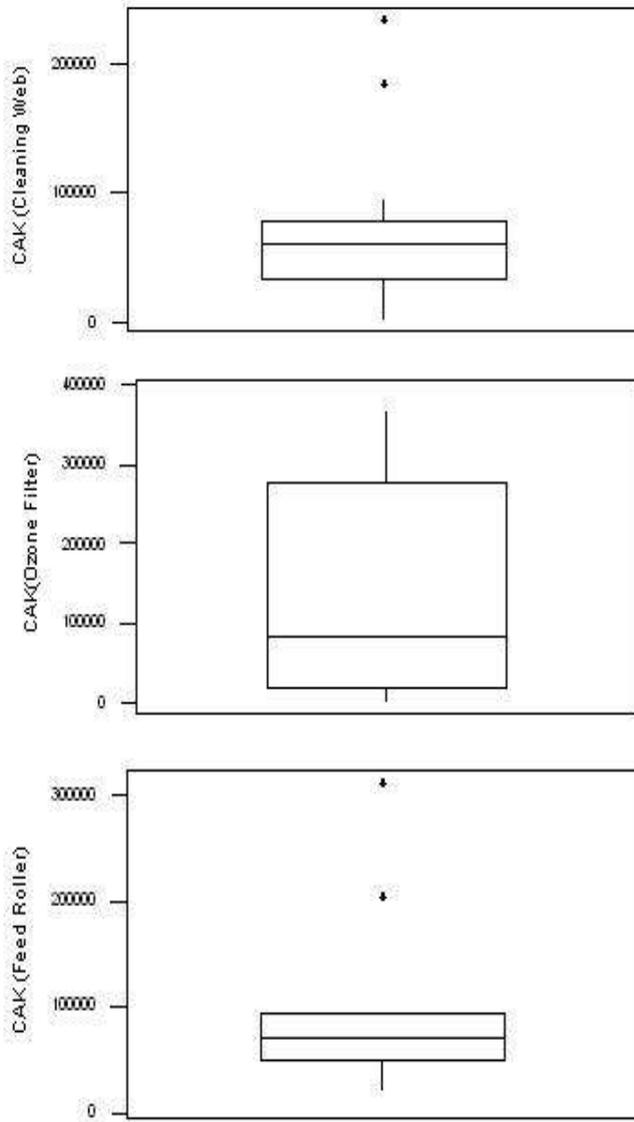
Selanjutnya, berdasarkan data pada lampiran terlihat bahwa tiga macam komponen fotokopi yang paling sering rusak adalah *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Jadi, komponen ini dijadikan contoh untuk model distribusi kerusakan komponen. *Mean* dari *WAK* dan *CAK web cleaning* masing-masing adalah 109,3 hari dan 71.836 lembar kertas. Berdasarkan *Box-Plot* pada gambar 3.2.5., tampak bahwa *WAK cleaning web* cenderung miring ke kanan dengan  $Q_1 = 26$ ,  $Q_2 = 95$ , dan  $Q_3 = 166$ . Sedangkan data *CAK*-nya cenderung miring ke kiri, dengan  $Q_1 = 33.423$ ,  $Q_2 = 60.152$ , dan  $Q_3 = 78.102$ , serta dua nilai data pencilan.

*Mean WAK* dan *CAK feed roller* masing-masing adalah 147,7 hari dan 97.524 lembar kertas. Pada gambar diatas, tampak bahwa *WAK* dan *CAK feed roller* cenderung miring ke kiri dengan  $Q_1 = 67$ ,  $Q_2 = 101$ ,  $Q_3 = 149$ , dan dua nilai pencilan untuk *WAK* serta  $Q_1 = 50.607$ ,  $Q_2 = 71.110$ ,  $Q_3 = 93.543$ , dan dua nilai pencilan untuk *CAK*. Sedangkan *mean WAK* dan *CAK ozone filter* masing-masing adalah 203,1 hari dan 134.095 lembar kertas. Keduanya cenderung miring ke kanan dengan  $Q_1 = 51$ ,  $Q_2 = 119$ , dan  $Q_3 = 345$  untuk *WAK* serta  $Q_1 = 20.539$ ,

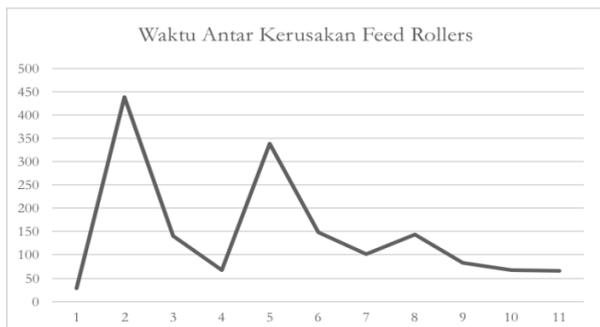
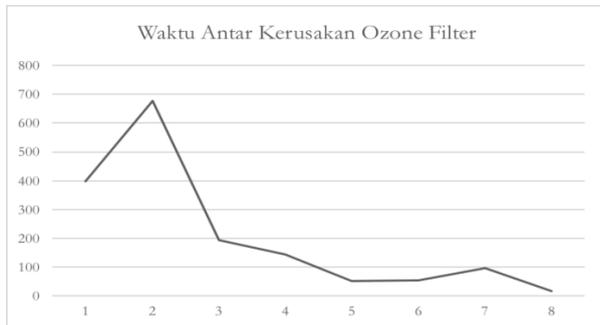
$Q_2 = 83.335$ , dan  $Q_3 = 278.410$  untuk *CAK*. Tidak ada nilai pencilan pada data antar kerusakan *ozone filter*.



**Gambar 4.6** *Box-Plot* data waktu antar kerusakan *Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*. Melalui gambar ini, ukuran statistik data dapat dibaca, yaitu nilai minimum, kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, nilai maksimum dan data pencilan.



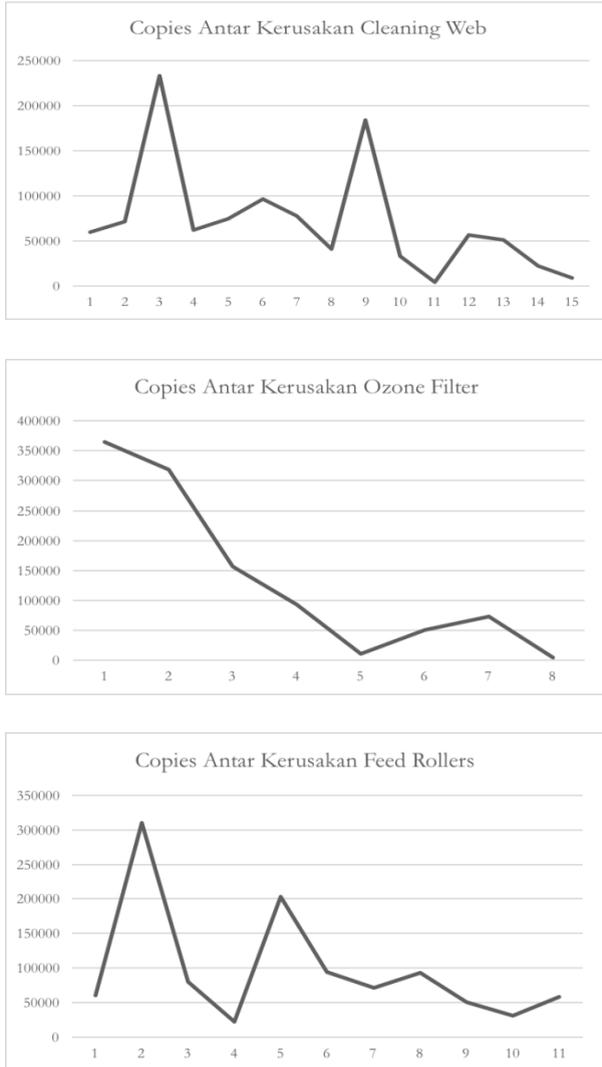
**Gambar 4.7** *Box-Plot* data copies antar kerusakan *Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*. Melalui gambar ini, ukuran statistik data dapat dibaca, yaitu nilai minimum, kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, nilai maksimum dan data pencilan.



**Gambar 4.8** Plot Waktu antar kerusakan komponen mesin fotokopi *Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*.

Selain itu, disajikan pula *plot* waktu dan *copies* antar kerusakan masing-masing untuk *Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*. Pada gambar 4.8, tidak terlalu terlihat kerusakan yang semakin rapat satu sama lain seiring pertambahan usia dan aktivitas mesin fotokopi. Hal ini disebabkan, kerusakan yang terjadi pada masing-masing komponen, akan menyebabkan penggantian dengan komponen yang

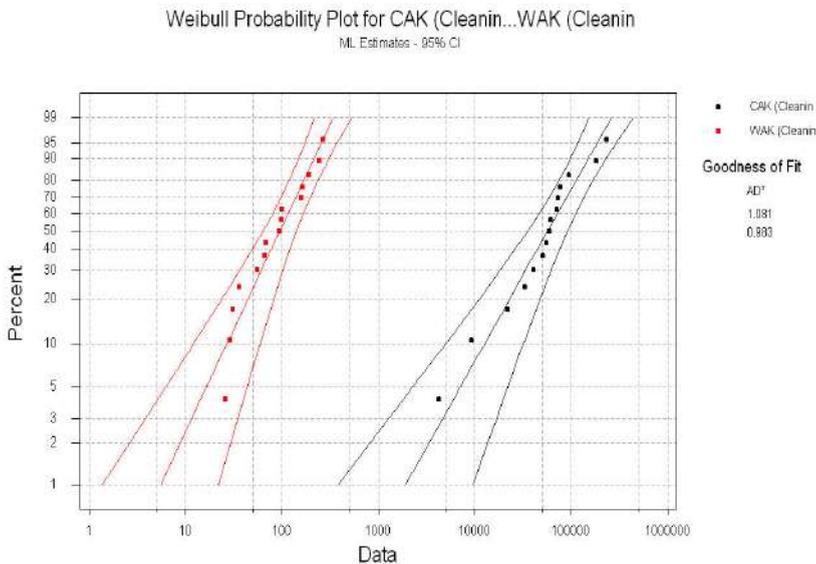
baru. Karenanya, relatif tidak terlihat pula kenaikan dan penurunan yang terlalu tajam pada masa hidup dan produktivitas salinan. Fenomena pada kerusakan level komponen tentu berbeda dengan kerusakan jika ditinjau dari level sistem mesin fotokopi.



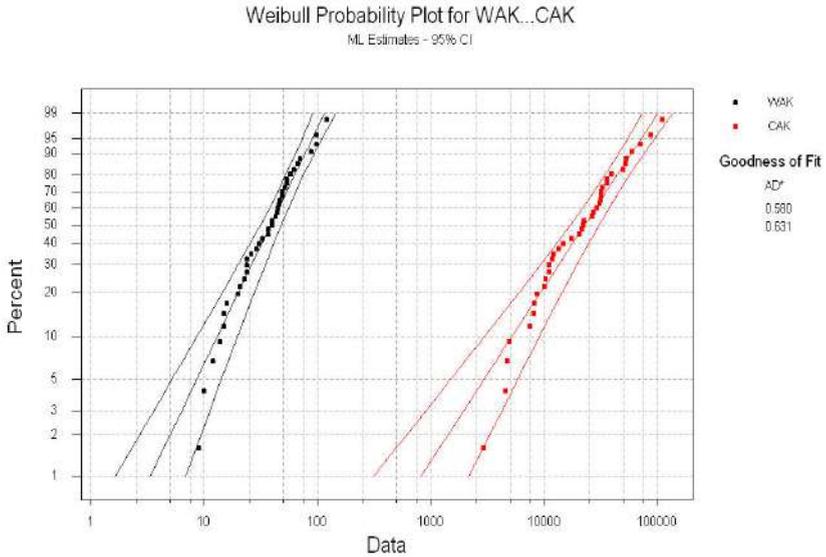
**Gambar 4.9** Plot *copies* antar kerusakan komponen mesin fotokopi *Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*.

Namun, secara umum, *plot WAK* dan *CAK* untuk *cleaning web*, *feed roller*, dan *Ozone filter* juga menunjukkan kecenderungan penurunan seiring makin seringnya intensitas pemakaian mesin fotokopi. Hal ini dapat dilihat pada gambar 4.8 dan gambar 4.9, untuk masing-masing komponen.

Untuk mengetahui distribusi data antar kerusakan level sistem dan komponen mesin fotokopi, dilakukan *Probability plot* terhadap data *WAK* dan *CAK*. Ditetapkan  $H_0$  adalah data berdistribusi Weibull, sedangkan  $H_1$  adalah data tidak cukup memenuhi syarat untuk *fit* dengan distribusi Weibull. *Plot* dilakukan dengan bantuan perangkat lunak MINITAB. Berdasarkan taraf signifikansi 5% dan *p-value*, hasilnya menyatakan bahwa kedua macam data untuk level sistem dan komponen telah *fit* dengan distribusi Weibull. Seperti yang dapat dilihat pada gambar 3.2.7.a,b,c,d.



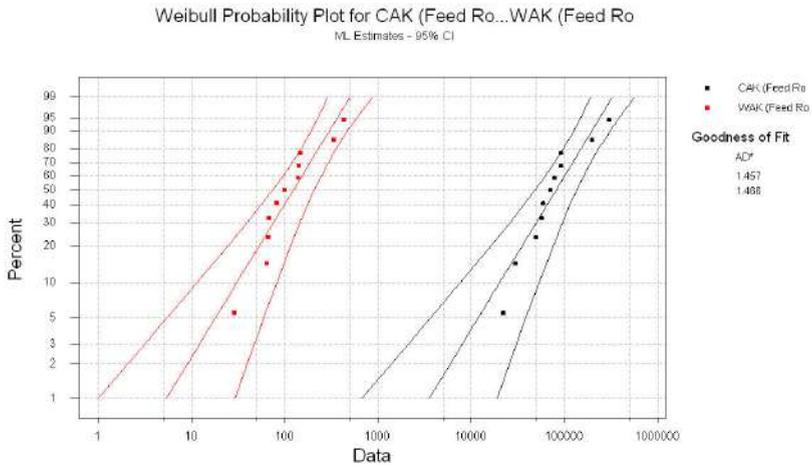
**Gambar 4.10** *Probability plot* data antar kerusakan mesin fotokopi. Grafik di sisi kanan (hitam) menunjukkan *plot* waktu antar kerusakan sistem dengan *p-value* = 0,580 dan taraf signifikansi 5%. Karena *p-value* > 0,05 maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull. Grafik di sisi kiri (merah) menunjukkan *plot* *copies* antar kerusakan sistem dengan *p-value* = 0,631 dan taraf signifikansi 5%. Karena *p-value* > 0,05 maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull.



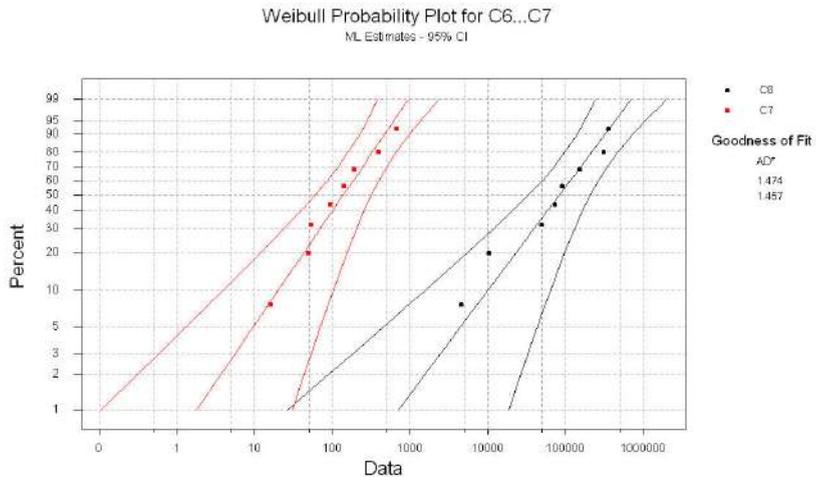
**Gambar 4.11** *Probability plot* data antar kerusakan *Cleaning Web*. Grafik di sisi kanan (hitam) menunjukkan *plot* waktu antar kerusakan dengan  $p\text{-value} = 1,081$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull. Grafik di sisi kiri (merah) menunjukkan *plot* *copies* antar kerusakan sistem dengan  $p\text{-value} = 0,983$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull.

Gambar 4.10 menyertakan  $p\text{-value}$  untuk *WAK* dan *CAK* mesin fotokopi. Karena masing-masing  $p\text{-value}$  bernilai lebih dari taraf signifikansi 5%, dapat disimpulkan bahwa  $H_0$  diterima.

*Cleaning Web* merupakan komponen dengan kerusakan terbanyak, yaitu 15 dari total 41 kali kerusakan mesin fotokopi. *Probability plot* pada gambar 3.2.7.b. menunjukkan bahwa  $p\text{-value}$  untuk *WAK* dan *CAK* bernilai lebih dari taraf signifikansi 5% . Dengan demikian,  $H_0$  diterima atau dengan kata lain data antar kerusakan *cleaning web* berdistribusi Weibull.



**Gambar 4.12** Probability plot data antar kerusakan Feed Roller. Grafik di sisi kanan (hitam) menunjukkan plot waktu antar kerusakan dengan  $p\text{-value} = 1,457$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull. Grafik di sisi kiri (merah) menunjukkan plot copies antar kerusakan sistem dengan  $p\text{-value} = 1,466$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull.



**Gambar 4.13** Probability plot data antar kerusakan Ozon Filter. Grafik di sisi kanan (hitam) menunjukkan plot waktu antar kerusakan dengan  $p\text{-value} = 1,474$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull. Grafik di sisi kiri (merah) menunjukkan plot copies antar kerusakan sistem dengan  $p\text{-value} = 1,457$  dan taraf signifikansi 5%. Karena  $p\text{-value} > 0,05$  maka  $H_0$  diterima, yaitu data berdistribusi Weibull.

Sedangkan, *Feed Roller* dan *Ozone Filter* merupakan komponen dengan kerusakan terbanyak kedua dan ketiga, masing-masing 11 dan 8 kerusakan dari total 41 kerusakan mesin fotokopi. Gambar 4.12 dan 4.13 menyatakan bahwa *p-value* data antar kerusakan kedua komponen tersebut selalu bernilai lebih dari taraf signifikansi 5%. Artinya  $H_0$  dapat diterima, atau dapat diinterpretasikan bahwa kedua data berdistribusi Weibull. Berdasarkan uraian mengenai distribusi data, estimasi parameter distribusi Weibull dengan menggunakan metode yang telah dijelaskan sebelumnya, kini dapat dilakukan. Tabel berikut merupakan hasil estimasi parameter data *WAK* dan *CAK* level sistem dan komponen (*Cleaning Web*, *Feed Roller*, dan *Ozone Filter*). *GA* dilakukan dengan ukuran 20 kandidat/individu, 500 iterasi,  $PC = 0,65$  dan  $PM = 0,25$ . Selang untuk masing-masing kandidat parameter  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\beta}$  adalah  $[\hat{\alpha}_{Min}, \hat{\alpha}_{Max}] = [Max(data), Min(data)]$  dan  $[\hat{\beta}_{Min}, \hat{\beta}_{Max}] = [0, st.dev(data)]$ . Sedangkan *N-R* dilakukan dengan nilai awal  $\beta_1 =$  median data

**Tabel 4.2** Hasil Estimasi Parameter Data *WAK* dan *CAK* Level Sistem. Baris pertama menunjukkan hasil penelitian Bulmer dan Eccleston (2003) dengan menggunakan *GA*. Sedangkan baris-baris berikutnya adalah hasil estimasi parameter menggunakan *N-R*, *GA*, dan Weibull *Fit*. Waktu eksekusi (*elapsed*) masing-masing metode juga disertakan berdampingan.

SISTEM FOTOKOPI	Waktu Antar Kerusakan		Copies Antar Kerusakan	
	$(\hat{\alpha}_{days}, \hat{\beta}_{days})$	<i>Elapsed</i> Time (detik)	$(\hat{\alpha}_{copies}, \hat{\beta}_{copies})$	<i>Elapsed</i> Time (detik)
<i>Bulmer &amp; Eccleston</i> ( <i>GA</i> )	(46,5 ; 1,710)	-	(28.21 ; 1,21)	-
<i>GA</i>	(46,27 ; 1,60)	22,53	(27.500,71 ; 1,10)	23,15
<i>Newton-Raphson</i>	(47,67 ; 1,72)	0,52	(30.587,13 ; 1,27)	0,58
<i>Weibull Fit</i>	(47,69 ; 1,72)	0,06	(30.564,28 ; 1,27)	0,06

Selain menyajikan hasil estimasi dengan *N-R*, *GA*, Weibull *Fit*, dicantumkan hasil estimasi parameter Bulmer dan Eccleston (2003) yang juga menggunakan metode *GA*. Hasil penelitian mereka disertakan disini sebagai pembandingan untuk hasil estimasi *GA*, *N-R*, dan Weibull *Fit* yang digunakan pada penelitian ini. Perhatikan Tabel 4.2 dan 4.3 pada baris pertama dan kedua menunjukkan hasil yang

relatif berdekatan jika dibandingkan dengan hasil estimasi pada baris ketiga dan keempat. Pada kolom waktu eksekusi (*elapsed time*), diketahui metode *GA* memerlukan waktu kurang lebih 40 kali lebih lama daripada metode *N-R* dan sekitar 400 kali lebih lama daripada *Weibull Fit*.

**Tabel 4.3** Hasil Estimasi Parameter Data *WAK* dan *CAK Cleaning Web*. Baris pertama menunjukkan hasil penelitian Bulmer dan Eccleston (2003) dengan menggunakan *GA*. Sedangkan baris-baris berikutnya adalah hasil estimasi parameter menggunakan *N-R*, *GA*, dan *Weibull Fit*. Waktu eksekusi (*elapsed*) masing-masing metode juga disertakan berdampingan.

KOMPONEN FOTOKOPI ( <i>Cleaning Web</i> )	<i>Waktu Antar Kerusakan</i>		<i>Copies Antar Kerusakan</i>	
	$(\hat{\alpha}_{days}, \hat{\beta}_{days})$	<i>Elapsed Time (detik)</i>	$(\hat{\alpha}_{copies}, \hat{\beta}_{copies})$	<i>Elapsed Time (detik)</i>
<i>Bulmer &amp; Eccleston (GA)</i>	(129 ; 1,48)	-	(80.035 ; 1,06)	-
<i>GA</i>	(124,34 ; 1,49)	21,41	(77.000,11 ; 1,27)	22,37
<i>Newton-Raphson</i>	(121,59 ; 1,48)	0,53	(77.259,53 ; 1,24)	0,56
<i>Weibull Fit</i>	(121,62 ; 1,48)	0,07	(77.172,66 ; 1,24)	0,07

Sedangkan, tabel 4.4 dan 4.5 menunjukkan hasil estimasi parameter berdasarkan data antar kerusakan komponen *Feed Roller* dan *Ozone Filter*. Bulmer dan Eccleston (2003) tidak melakukan pengamatan terhadap kedua komponen ini, sehingga tidak ada nilai yang dapat digunakan sebagai pembanding untuk hasil estimator yang dihasilkan oleh ketiga macam metode.

**Tabel 4.4** Hasil Estimasi Parameter Data *WAK* dan *CAK Feed Roller*. Baris pertama tidak terisi nilai karena Bulmer dan Eccleston (2003) tidak mengamati data kerusakan *Feed Roller*. Sedangkan baris-baris berikutnya adalah hasil estimasi parameter menggunakan *N-R*, *GA*, dan *Weibull Fit*. Waktu eksekusi (*elapsed*) masing-masing metode juga disertakan berdampingan.

KOMPONEN FOTOKOPI ( <i>Feed Rollers</i> )	<i>Waktu Antar Kerusakan</i>		<i>Copies Antar Kerusakan</i>	
	$(\hat{\alpha}_{days}, \hat{\beta}_{days})$	<i>Elapsed Time (detik)</i>	$(\hat{\alpha}_{copies}, \hat{\beta}_{copies})$	<i>Elapsed Time (detik)</i>
<i>Bulmer &amp; Eccleston (GA)</i>	-	-	-	-
<i>GA</i>	(161,63 ; 1,36)	20,41	(107.000,76 ; 1,34)	21,54

<i>Newton-Raphson</i>	(162,54 ; 1,34)	0,51	(107.571,82 ; 1,35)	0,50
<i>Weibull Fit</i>	(162,66 ; 1,34)	0,06	(107.530,78 ; 1,35)	0,06

**Tabel 4.5** Hasil Estimasi Parameter Data *WAK* dan *CAK Ozone Filter*. Baris pertama tidak terisi nilai karena Bulmer dan Eccleston (2003) tidak mengamati data kerusakan *Ozone Filter*. Sedangkan baris-baris berikutnya adalah hasil estimasi parameter menggunakan *N-R*, *GA*, dan *Weibull Fit*. Waktu eksekusi (*elapsed*) masing-masing metode juga disertakan berdampingan.

KOMPONEN FOTOKOPI ( <i>Ozone Filter</i> )	<i>Waktu Antar Kerusakan</i>		<i>Copies Antar Kerusakan</i>	
	$(\hat{\alpha}_{days}, \hat{\beta}_{days})$	<i>Elapsed Time</i> (detik)	$(\hat{\alpha}_{copies}, \hat{\beta}_{copies})$	<i>Elapsed Time</i> (detik)
<i>Bulmer &amp; Eccleston</i> ( <i>GA</i> )	-	-	-	-
<i>GA</i>	(161,87 ; 1,36)	20,01	(107.000,43 ; 1,34)	21,12
<i>Newton-Raphson</i>	(200,77 ; 0,97)	0,45	(127.114,85 ; 0,88)	0,40
<i>Weibull Fit</i>	(200,89 ; 0,97)	0,03	(127.059,15 ; 0,88)	0,03

Seperti yang pernah disimpulkan pada simulasi (tabel 4.1), estimasi parameter pada studi kasus ini juga menghasilkan kecenderungan yang serupa. Namun, perlu diperhatikan pada tabel 4.4, terlihat bahwa estimator  $\hat{\beta}_{days}$  dan  $\hat{\beta}_{copies}$  yang dihasilkan oleh *GA* selalu bernilai di atas estimator  $\hat{\beta}_{days}$  dan  $\hat{\beta}_{copies}$  yang dihasilkan oleh dua metode lainnya (*N-R* dan *Weibull Fit*).

Permasalahan estimasi parameter distribusi Weibull univariat juga dapat diselesaikan melalui metode *bisection*. Prinsipnya adalah mendapatkan akar dari persamaan 4.8, namun tanpa bentuk turunan seperti pada *Newton Raphson* (*N-R*). Sebagai wawasan, ilustrasi dan langkah singkat metode *bisection* dapat dilihat pada Lampiran.

### C. ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL BIVARIAT

Bagian ini menguraikan penaksiran parameter distribusi Weibull bivariat dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Fungsi kepadatan peluang bersama kembali digunakan untuk konstruksi fungsi *likelihood*. Misalkan  $X_i$  dan  $Y_i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ , merupakan peubah acak yang masing-masing berdistribusi Weibull

dengan parameter  $(\alpha_x, \beta_x)$ ,  $(\alpha_y, \beta_y)$  dan  $\delta$ . Maka, fungsi *likelihood* distribusi Weibull bivariat dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L(\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \delta; x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n f(\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \delta; x_i, y_i) \quad (4.10)$$

dimana telah diketahui bahwa fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull bivariat sesuai dengan persamaan (3.12). Seperti halnya pada fungsi *likelihood* univariat di persamaan (4.2) yang mengandung fungsi eksponensial, demikian pula persamaan (4.10) juga perlu ditransformasi terlebih dahulu untuk dapat lebih menyederhanakan proses selanjutnya. Dalam hal ini, dipilih transformasi logaritma, sehingga fungsi *log-likelihood* distribusi Weibull bivariat memenuhi persamaan berikut :

$$\begin{aligned} l(\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \delta) = & n \left( \ln \frac{\beta_x}{\alpha_x} + \ln \frac{\beta_y}{\alpha_y} \right) + \left( \frac{\beta_x}{\delta} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\alpha_x} + \left( \frac{\beta_y}{\delta} - 1 \right) \\ & \sum_{i=1}^n \ln \frac{y_i}{\alpha_y} + (\delta - 2) \sum_{i=1}^n \ln \left( \left( \frac{x_i}{\alpha_x} \right)^{\beta_x/\delta} + \left( \frac{y_i}{\alpha_y} \right)^{\beta_y/\delta} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{1}{\delta} - 1 + \left( \left( \frac{x_i}{\alpha_x} \right)^{\beta_x/\delta} + \left( \frac{y_i}{\alpha_y} \right)^{\beta_y/\delta} \right)^\delta \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{x_i}{\alpha_x} \right)^{\beta_x/\delta} + \left( \frac{y_i}{\alpha_y} \right)^{\beta_y/\delta} \right)^\delta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Perhatikan, pada model distribusi Weibull bivariat ada 5 parameter yang harus diestimasi, yaitu  $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x)$ ,  $(\hat{\alpha}_y, \hat{\beta}_y)$  dan  $\hat{\delta}$ . Seperti pada distribusi Weibull univariat, tidak ada solusi analitik untuk persamaan (4.11). Oleh karena itu, *GA* dapat digunakan sebagai salah satu metode alternatif untuk permasalahan ini (Han, 2006). *GA* untuk optimasi fungsi *log-likelihood* Weibull bivariat adalah perluasan dari *GA* univariat. Fungsi *log-likelihood* pada persamaan (4.11) juga digunakan sebagai fungsi *fitness*. Pemilihan selang kandidat solusi untuk masing-masing estimator juga perlu diperhatikan ketepatannya.

Simulasi dilakukan dengan membangkitkan dua set data berdistribusi Weibull misalkan  $(X, Y)$  dalam berbagai macam ukuran data dengan  $(\alpha_x, \beta_x) = (45; 1,5)$ ,  $(\alpha_y, \beta_y) = (150; 1)$  dan  $\delta = 1$ . Ditentukan selang untuk kandidat solusi  $\hat{\alpha}_x$  dan  $\hat{\alpha}_y$  adalah nilai minimum hingga nilai maksimum masing-masing data. Sedangkan selang untuk kandidat solusi  $\hat{\beta}_x$  dan  $\hat{\beta}_y$  adalah 0 hingga standar deviasi masing-masing data. Sedangkan selang untuk  $\hat{\delta}$  adalah  $[\hat{\delta}_{Min}, \hat{\delta}_{Max}] = [0,01; 1]$ .  $GA$  dilakukan dengan 500 iterasi, 20 individu,  $PC = 0,65$ ; dan  $PM = 0,25$ .

**Tabel 4.6** Hasil Simulasi Algoritma Genetika untuk Distribusi Weibull Bivariat. Terjadi peningkatan waktu eksekusi (*elapsed time*) 3 kali lebih lama dibandingkan dengan  $GA$  untuk Weibull univariat. Kolom pertama menunjukkan ukuran data untuk masing-masing peubah. Kolom kedua menampilkan estimator untuk peubah  $X$ , kolom kedua menampilkan estimator untuk peubah  $Y$ , sedangkan kolom ketiga adalah estimator delta yang merupakan parameter asosiasi bersyarat antara keduanya.

$n$	$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x)$	$(\hat{\alpha}_y, \hat{\beta}_y)$	$\hat{\delta}$	<i>Elapsed Time (detik)</i>
5	(47,28 ; 1,84)	(178,14 ; 1,73)	1,000	71,27
10	(40,09 ; 1,64)	(115,93 ; 1,02)	0,975	70,28
15	(48,32 ; 1,48)	(158,10 ; 0,91)	0,993	74,75
20	(47,83 ; 1,94)	(126,98 ; 0,93)	0,88	77,09
25	(42,17 ; 1,34)	(126,55 ; 1,18)	0,97	80,70
30	(48,11 ; 1,65)	(163,33 ; 1,27)	0,98	84,80
35	(51,13 ; 1,85)	(112,47 ; 1,13)	0,94	88,77
40	(41,97 ; 1,55)	(105,98 ; 0,99)	0,95	92,63
45	(50,91 ; 1,52)	(109,66 ; 0,97)	1,00	96,80
50	(42,56 ; 1,79)	(146,99 ; 1,03)	0,96	100,85
100	(47,70 ; 1,57)	(146,89 ; 0,89)	1,00	130,17
150	(41,49 ; 1,49)	(186,15 ; 1,16)	0,97	166,45
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
300	(49,45 ; 1,31)	(164,85 ; 0,91)	0,99	274,27
500	(47,46 ; 1,18)	(167,10 ; 1,00)	0,78	446,42

Hasil simulasi menunjukkan bahwa untuk GA bivariat, mayoritas estimator berada di atas nilai parameter sesungguhnya (*over estimated*). Sedangkan dapat diamati bahwa estimator  $\hat{\delta}$  selalu menunjukkan/mendekati nilai 1. Hal ini wajar, karena data bangkitan bukanlah murni data bivariat Weibull, melainkan dua set data yang berdistribusi Weibull, sehingga dapat dikatakan keduanya tidak memiliki hubungan linear. Ingat sesuai persamaan (2.3.6), ketika  $\delta = 1$ , korelasi akan bernilai 0.

Sedangkan waktu eksekusi (*elapsed*) untuk simulasi GA bivariat ini tercatat bahwa setiap penambahan 5 unit data, ada penambahan selama  $\pm 3$  detik. Kecuali pada ukuran data 5 dan 10, terjadi penurunan waktu 1 detik, kemungkinan disebabkan oleh pengaruh pertama kali eksekusi (*starting program*), yang membutuhkan waktu lebih lama daripada eksekusi kedua dan eksekusi selanjutnya.

Seperti pada kasus univariat, studi kasus estimasi parameter Weibull bivariat menggunakan GA juga dilakukan terhadap data WAK dan CAK mesin fotokopi, *web cleaning*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Pemilihan batas selang masing-masing kandidat solusi masih sama dengan yang telah diatur pada simulasi sebelumnya. Apabila nilai-nilai ini dibandingkan dengan estimator yang diperoleh pada tabel 3.2.2.a,b,c, terlihat estimator bivariat memiliki kecenderungan berada di atas estimator univariat. Waktu eksekusi yang dibutuhkan GA bivariat pada studi kasus ini juga sebanding dengan waktu eksekusi pada simulasi (tabel 4.6).

Selain itu, tabel 4.7 juga menyertakan korelasi untuk WAK dan CAK mesin fotokopi, *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Korelasi dihitung berdasarkan persamaan (3.14) yang menggunakan nilai  $\hat{\beta}_{days}$ ,  $\hat{\beta}_{copies}$ , dan  $\hat{\delta}$  masing-masing data. Menarik untuk diperhatikan bahwa nilai  $\hat{\delta}$  yang semakin kecil selalu menyebabkan korelasi membesar, demikian pula sebaliknya.

**Tabel 4.7** Hasil Estimasi Parameter Data Bivariat Mesin Fotokopi. Terdapat 4 macam hasil estimasi, yaitu berdasarkan kerusakan sistem, *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Dicantumkan pula korelasi untuk masing-masing pasangan data.

<i>GA Weibull</i> Bivariat	<i>Waktu Antar</i> <i>Kerusakan</i>	<i>Copies Antar</i> <i>Kerusakan</i>	$\hat{\delta}$	<i>korelasi</i>	<i>Elapsed</i> <i>Time</i> (detik)
	$\hat{\alpha}_{days}, \hat{\beta}_{days}$	$\hat{\alpha}_{copies}, \hat{\beta}_{copies}$			
<i>Sistem Mesin</i> <i>Fotokopi</i>	(45,43 ; 1,95)	(33.600,11 ; 1,22)	0,53	0,58	92,77
<i>Cleaning Web</i>	(125,64 ; 1,33)	(76.200,65 ; 1,09)	0,36	0,75	76,65
<i>Feed Roller</i>	(171,07 ; 1,33)	(113.000,23 ; 1,49)	0,37	0,76	72,87
<i>Ozone Filter</i>	(205,71 ; 0,93)	(129.000,63 ; 0,83)	0,26	0,82	69,16



## **BAB V**

### **APLIKASI: ESTIMASI BIAYA GARANSI**

#### **A. PENDAHULUAN**

Studi mengenai garansi dan permasalahan perawatan (*maintenance*) telah dilakukan dengan mengasumsikan beberapa macam kemungkinan tipe kebijakan garansi dan rektifikasi produk. Pada taksonomi garansi, terdapat dua kebijakan sederhana yaitu *Free-Replacement Warranty (FRW)* dimana pemanufaktur akan merektifikasi produk yang mengalami kerusakan dalam periode garansi tanpa membebankan biaya pada pembeli. Berikutnya, *Pro-Rata Warranty (PRW)*, dimana pemanufaktur akan memberikan potongan harga pada pembeli atas biaya penggantian produk, selama periode garansi yang besarnya proporsional terhadap sisa masa garansi. Tentunya, kebijakan *FRW* lebih cocok diterapkan pada produk yang dapat diperbaiki (*repairable*) seperti perangkat elektronik dan otomotif, sedangkan *PRW* akan tepat diberlakukan pada produk yang tak dapat diperbaiki (*non-repairable*), seperti lampu dan ban kendaraan bermotor. Terdapat pula kebijakan kombinasi yang merupakan gabungan dua kebijakan sederhana *FRW* dan *PRW* (Rinawati, 2009). Pada produk yang dapat diperbaiki (*repairable*), pemanufaktur memiliki pilihan untuk merektifikasi produk rusak dengan tindakan perbaikan (*repair*) atau penggantian (*replace*). Sementara itu, pemanufaktur hanya dapat melakukan tindakan penggantian (*replace*) terhadap jenis produk yang tak dapat diperbaiki (*non-repairable*) (Prasetyo, 2005).

Selanjutnya, masing-masing kelompok kebijakan garansi dapat digolongkan menjadi dua macam sub kelompok, yaitu garansi satu dimensi (*one dimensional warranty*) dan garansi dua dimensi (*two dimensional warranty*). Dimensi garansi terkait dengan banyaknya peubah yang menjadi pembatas masa garansi. Karakteristik garansi satu dimensi umumnya diwakili oleh suatu interval waktu. Sedangkan wilayah garansi dua dimensi berada di suatu daerah atau bidang, yang dibatasi oleh dua sumbu, yaitu misalkan sumbu usia dan sumbu intensitas pemakaian produk. Produk otomotif, kelompok alat berat, dan perkakas industri merupakan contoh produk yang umumnya dijual dengan garansi dua dimensi.

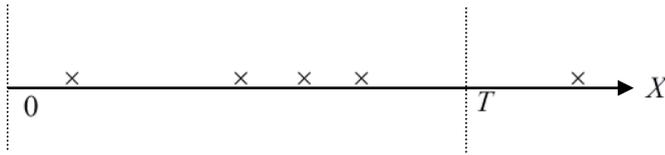
Baik, dkk. (2003), melakukan studi mengenai model kerusakan dua dimensi di bawah strategi FRW, dengan perbaikan minimal dan penggantian, untuk kemudian ditunjukkan perbandingan keefektifan biaya kedua tindakan rektifikasi tersebut. Husniah, dkk. (2009) mempelajari kebijakan gabungan perbaikan minimal dan penggantian untuk produk bergaransi yang dapat diperbaiki. Model kerusakan yang digunakan pada studi tersebut merupakan model kerusakan dua dimensi yang didekati dengan pendekatan satu dimensi, yaitu pemakaian (*usage*) merupakan suatu fungsi dari usia (*age*) produk. Chien dan Chen (2007), mempelajari kebijakan optimal untuk *preventive replacement* di bawah asumsi kebijakan garansi kombinasi FRW dan PRW. Model kerusakan yang digunakan adalah model kerusakan satu dimensi, berdasarkan usia suatu produk bergaransi.

Bagian ini memaparkan model pembiayaan garansi berdasarkan sudut pandang pemanufaktur. Kebijakan garansi yang digunakan adalah *Basic Free Replacement Warranty* (FRW) satu dan dua dimensi, untuk jenis produk yang dapat diperbaiki (*repairable item*) dan produk yang tidak dapat diperbaiki (*unrepairable item*).

## **B. KEBIJAKAN *BASIC FREE-REPLACEMENT WARRANTY* SATU DIMENSI**

Misalkan  $T > 0$  adalah batas periode garansi dalam satuan waktu (hari/bulan/tahun). Kebijakan *Free-Replacement Warranty* (FRW) adalah persetujuan untuk melakukan perbaikan atau penggantian

terhadap produk yang mengalami kerusakan hingga batas waktu  $T$  (Blischke dan Murthy, 1994). Pihak pembeli tidak dikenakan biaya atas kebijakan ini.



**Gambar 5.1** Wilayah  $FRW$  Satu Dimensi. Periode garansi dimulai dari awal pembelian produk, hingga suatu waktu  $T$  yang ditentukan. Pada mesin fotokopi,  $T$  dapat diartikan sebagai batas usia ( $0 < T < 5$  tahun) atau banyaknya salinan ( $0 < T < 1$  juta lembar) yang masih dapat dilayani oleh garansi. Tanda silang menunjukkan waktu terjadinya kerusakan.

Biaya garansi tidak lain merupakan ekspektasi biaya penjualan yang melibatkan biaya pengadaan suku cadang dan biaya tindakan penggantian produk yang rusak. Dalam hal ini ada beberapa asumsi yang ditetapkan. Asumsi tersebut adalah seluruh kerusakan yang terjadi selama waktu  $T$  terdaftar dalam klaim garansi. Selain itu, diasumsikan bahwa rektifikasi produk rusak baik melalui penggantian atau perbaikan adalah *instantaneous*, dan masa hidup atau waktu antar kerusakan  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  suatu produk adalah independen dan berdistribusi identik, dengan fungsi distribusi  $F$ . Misalkan  $N(t)$  adalah banyaknya kerusakan pada selang waktu  $[0, t)$ , menurut Blischke dan Murthy (1994), persamaan biaya  $FRW$  satu dimensi dapat dituliskan sebagai berikut, masing-masing untuk produk yang tidak dapat diperbaiki dan yang dapat diperbaiki.

$$\begin{aligned}
 E[C_s(t)] &= E[c_s + c_s N(t)] \\
 &= c_s + c_s E[N(t)] \\
 &= c_s (1 + E[N(t)])
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 E[C_s(t)] &= E[c_s + c_r N(t)] \\
 &= c_s + c_r E[N(t)]
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

$C_s$  adalah biaya garansi ditinjau dari pihak pemanufaktur,  $c_s$  adalah biaya pengadaan (*supply*) per item, dan  $c_r$  adalah biaya perbaikan (*repair*) per item. Kedua persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi satu macam persamaan. misalkan dengan mengasumsikan  $c_s > c_r$ , sehingga  $c_r = c_s - \varepsilon$  dengan  $0 < \varepsilon < c_s$ , maka persamaan biaya untuk kedua macam produk dapat dituliskan sebagai berikut

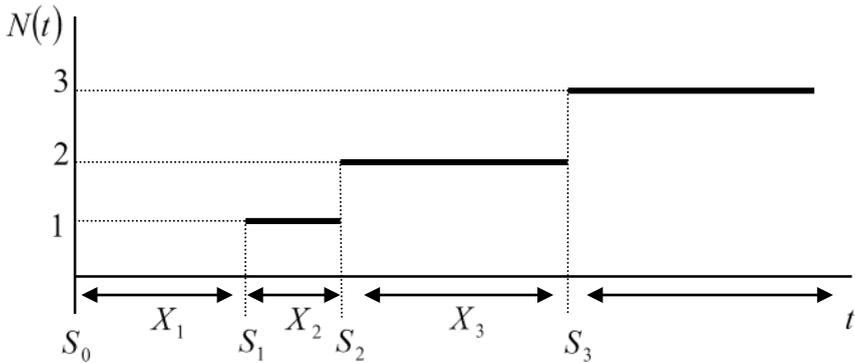
$$\begin{aligned} E[C_s(t)] &= c_s(1 + (1 - \varepsilon/c_s)E[N(t)]) \\ &= c_s(1 + (1 - \lambda)E[N(t)]) \end{aligned} \tag{5.3}$$

dengan  $\lambda = 0$  untuk produk yang tidak dapat diperbaiki dan  $0 < \lambda < 1$  untuk produk yang dapat diperbaiki.

Perhatikan persamaan (5.1) melibatkan  $E[N(t)]$  yang merupakan ekspektasi banyaknya kerusakan dalam selang waktu  $[0, t)$ . Sebelum mendapatkan biaya garansi, karakter kerusakan objek yang akan diamati harus diketahui. Pandang suatu sistem yang ketika mengalami kerusakan akan direktifikasi melalui perbaikan. Misalkan perbaikan dilakukan dengan mengganti salah satu komponen penyebab kerusakan. Rektifikasi jenis ini disebut dengan perbaikan minimal (*minimal repair*). Ketika sistem mengalami perbaikan minimal, kondisinya akan kembali seperti kondisi sistem sebelum terjadi kerusakan, sehingga *FLH* bersyaratnya tidak dipengaruhi oleh setiap kerusakan. Akibatnya, proses menghitung  $\{N(t), t \geq 0\}$  mengikuti proses Poisson non-homogen (*NHPP*).

Namun, apabila saat terjadi kerusakan pada suatu sistem, dilakukan rektifikasi penggantian dengan sistem baru yang identik, maka *FLH* bersyaratnya akan kembali kepada nilai dimana sistem masih baru. Proses seperti ini dikatakan mengikuti proses pembaruan (*renewal*). Pada mesin fotokopi, perbaikan minimal lebih tepat dikenakan pada sistem mesin fotokopi secara keseluruhan. Sedangkan proses pembaruan akan berlaku pada masing-masing komponen mesin fotokopi yang tidak dapat diperbaiki, misalkan *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Pembahasan kali ini akan dikhususkan pada proses menghitung kerusakan yang mengikuti proses pembaruan, artinya  $E[N(t)] = M(t)$ . Tentunya, untuk mendapatkan nilai ekspektasi biaya garansi,  $M(t)$  harus dapat dievaluasi. Oleh karena itu,

terlebih dahulu akan dijelaskan hubungan antara  $X_n$ ,  $N(t)$ , dan  $M(t)$  yang dalam proses stokastik dikenal sebagai proses pembaruan (*renewal*).



**Gambar 5.2** Grafik  $N(t)$ . Gambar ini menunjukkan hubungan antara waktu antar kerusakan, waktu kerusakan serta banyaknya kerusakan.

Didefinisikan banyaknya kerusakan sebagai maksimum dari  $n$ , atau dapat dituliskan sebagai  $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ . Sedangkan  $S_n$  tidak lain adalah waktu kerusakan ke-  $n$ , yang memenuhi persamaan

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (5.4)$$

Oleh karena itu sesuai dengan Ross (1996), distribusi dari  $S_n$  diberikan oleh konvolusi  $n$ -fold dari  $F$ , yaitu

$$P\{S_n \leq t\} = F^{(n)}(t) = F(t) * F(t) * \dots * F(t) \quad (5.5)$$

Sedangkan, diketahui hubungan bahwa  $N(x) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq x$ , sehingga dapat dituliskan persamaan berikut

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n + 1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_n \leq t + 1\} \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Selanjutnya, kembali pada fungsi  $M(t)$  sebagai ekspektasi banyaknya kerusakan. Sesuai persamaan (5.3) dan (5.4),  $M(t)$  dapat dinyatakan dalam persamaan berikut

$$\begin{aligned}
M(t) &= E[N(t)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \left( F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

Selain itu,  $M(t)$  juga dapat diekspresikan sebagai solusi dari persamaan integral *renewal*, yang dipenuhi oleh persamaan

$$\begin{aligned}
M(t) &= F(t) + \int_0^t M(t-x)f(x)dx \\
&= F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x) \\
&= F(t) + \int_0^t F(t-x)dM(x)
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

Fungsi  $M(t)$  dapat dievaluasi dengan menggunakan metode pendekatan numerik. Xie (1989) telah melakukan diskritisasi persamaan (5.8) menggunakan metode titik tengah (*mid point method*), yaitu

$$M(t_i) = F(t_i) + \sum_{m=1}^i F(t_i - t_{m-1/2})(M(t_m) - M(t_{m-1}))
\tag{5.9}$$

dengan  $0 < t_i < T$ , sehingga  $M(t_i)$  dapat dihitung secara rekursif melalui persamaan berikut

$$M(t_i) = \frac{F(t_i) + G_i - F(t_i - t_{i-1/2})M(t_{i-1})}{1 - F(t_i - t_{i-1/2})}$$

dengan

$$G_i = \sum_{m=1}^{i-1} F(t_i - t_{m-1/2})(M(t_m) - M(t_{m-1}))$$

Berikut ini disajikan tabel hasil evaluasi fungsi  $M(t)$  dengan  $F(t)$  mengikuti persamaan (3.2). Metode aproksimasi yang digunakan mengacu pada metode titik tengah yang telah dikerjakan oleh Xie (1989). Simulasi dilakukan dengan membangkitkan data  $X$ , dengan nilai parameter  $\alpha = 1$   $\beta = 0,5$ , dan  $\beta = 0,8$ . Tabel di bawah ini juga menyajikan hasil perhitungan Xie (1989) sebagai nilai pembandingan.

**Tabel 5.1** Evaluasi Fungsi Pembaruan (*Renewal*) dengan data berdistribusi Weibull seperti yang telah dilakukan oleh Xie (1989). Simulasi dilakukan dengan nilai parameter  $\alpha = 1$   $\beta = 0,5$ , dan  $\beta = 0,8$ . Hasil evaluasi ini kemudian dibandingkan dengan hasil evaluasi Xie (1989).

$x$	$\beta = 0,5$	$\beta_{xie} = 0,5$	$\beta = 0,8$	$\beta_{xie} = 0,5$
0.1	0,3390	0,3453	0,1605	0,1611
0.2	0,5021	0,5062	0,2834	0,2839
0.3	0,6328	0,6370	0,3963	0,3967
0.4	0,7472	0,7523	0,5037	0,5041
0.5	0,8516	0,8578	0,6075	0,6079
0.6	0,9489	0,9564	0,7089	0,7092
0.7	1,0410	1,0497	0,8086	0,8085
0.8	1,1290	1,1389	0,9070	0,9063
0.9	1,2139	1,2248	1,0048	1,0029
1.0	1,2961	1,3080	1,1020	1,0985
1.5	1,6958	1,6989	1,5843	1,5662
2.0	2,0513	2,0476	2,0751	2,0236
2.5	2,3928	2,3814	2,5925	2,4753
3.0	2,7281	2,7014	3,1530	2,9237

Tabel 5.2, 5.3., dan 5.4. merupakan hasil evaluasi fungsi pembaruan (*renewal*) dan biaya garansi komponen mesin fotokopi, yaitu *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Karena komponen tersebut dipandang sebagai produk/item yang tidak dapat diperbaiki,

persamaan biaya yang digunakan adalah persamaan (5.1) dengan mengasumsikan  $c_s = 100$  dan  $\lambda = 0$ . Nilai parameter yang digunakan adalah hasil estimasi parameter komponen dengan menggunakan  $GA$ , pada tabel 3.2.2.b,c, dan d.

**Tabel 5.2** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan Waktu Kerusakan *Cleaning Web*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada tahun ke-7 *cleaning web* mengalami 2,4759 penggantian atau dapat dikatakan 2 hingga 3 kali penggantian dengan biaya penggantian sebesar \$347,5870; dan seterusnya.

<i>Tabun</i>	1	2	3	4	5
<i>Penggantian</i>	0,14	0,42	0,77	1,14	1,54
<i>Biaya</i>	114,25	142,79	177,50	214,94	254,58
<i>Tabun</i>	6	7	8	9	
<i>Penggantian</i>	1,97	2,47	3,09	3,90	
<i>Biaya</i>	297,79	347,58	409,00	490,17	

**Tabel 5.3** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan *Copies* Saat Kerusakan *Cleaning Web*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada salinan (*copies*) ke-1 juta *cleaning web* mengalami 1,0885 penggantian atau dapat dikatakan 1 penggantian dengan biaya sebesar \$208,8477; dan seterusnya.

<i>Copies (ribuan)</i>	100	150	300	500	700
<i>Penggantian</i>	0,01	0,02	0,12	0,34	0,62
<i>Biaya</i>	101,23	102,93	112,47	134,18	162,37
<i>Copies (ribuan)</i>	900	1000	1500	2000	
<i>Penggantian</i>	0,93	1,08	1,85	2,95	
<i>Biaya</i>	193,06	208,84	285,76	395,51	

Tabel 5.3 dan 5.2 menyatakan nilai pembaruan (*renewal*) yang dapat diartikan sebagai ekspektasi banyaknya penggantian *cleaning web* berdasarkan waktu dan salinan (*copies*) saat kerusakan serta biaya yang dibutuhkan untuk penggantian tersebut. Misalkan berdasarkan usia, pada tahun ke-8, sudah ada 3,0900 *cleaning web* yang diganti. Artinya, dibutuhkan sebanyak 3 *cleaning web* baru dengan biaya sebesar \$409,0005. Berdasarkan salinan (*copies*), pada salinan ke-2 juta, sudah ada 2,9551 *cleaning web* yang diganti. Artinya, dibutuhkan 2 hingga 3 *cleaning web* dengan biaya sebesar \$395,5115.

**Tabel 5.4** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan Waktu Kerusakan *Feed Roller*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada tahun ke-9 *feed roller* mengalami 3,9892 penggantian atau dapat dikatakan 3 hingga 4 penggantian dengan biaya sebesar \$498,9219; dan seterusnya.

<i>Tabun</i>	1	2	3	4	5
<i>Penggantian</i>	0,12	0,40	0,75	1,13	1,53
<i>Biaya</i>	112,46	140,38	175,52	213,47	253,41
<i>Tabun</i>	6	7	8	9	
<i>Penggantian</i>	1,96	2,47	3,11	3,98	
<i>Biaya</i>	296,95	347,59	411,44	498,92	

**Tabel 5.5** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan *Copies* Saat Kerusakan *Feed Roller*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada salinan (*copies*) ke-1,5 juta *feed roller* mengalami 1,8504 penggantian atau dapat dikatakan 1 hingga 2 penggantian dengan biaya sebesar \$285,0411; dan seterusnya.

<i>Copies (Ribuan)</i>	100	150	300	500	700
<i>Penggantian</i>	0,0091	0,02	0,10	0,32	0,60
<i>Biaya</i>	100,91	102,30	110,91	132,20	160,94
<i>Copies (Ribuan)</i>	900	1000	1500	2000	
<i>Penggantian</i>	0,92	1,08	1,85	2,97	
<i>Biaya</i>	192,25	208,12	285,04	397,59	

Tabel 5.4 dan 5.5 menyatakan nilai pembaruan (*renewal*) yang dapat diartikan sebagai ekspektasi banyaknya penggantian *feed roller* berdasarkan waktu dan salinan (*copies*) saat kerusakan serta biaya yang dibutuhkan untuk merektifikasi kerusakan tersebut. Misalkan berdasarkan usia, pada tahun ke-5, sudah ada 1,5342 *feed roller* yang diganti. Artinya, dibutuhkan sebanyak 1 hingga 2 *feed roller* baru dengan biaya sebesar \$253,4186. Berdasarkan salinan (*copies*) ke-2 juta, sudah ada 2,9760 *feed roller* yang diganti. Artinya, dibutuhkan 2 hingga 3 *feed roller* dengan biaya sebesar \$397,5959.

Tabel 5.6 dan 5.7 menyatakan nilai pembaruan (*renewal*) yang dapat diartikan sebagai ekspektasi penggantian *ozone filter* berdasarkan waktu dan salinan (*copies*) saat kerusakan serta biaya yang dibutuhkan untuk merektifikasi kerusakan tersebut. Misalkan berdasarkan usia, pada tahun ke-8, sudah ada 1,8651 *ozone filter* yang diganti. Artinya, dibutuhkan sebanyak 1 hingga 2 *ozone filter* baru dengan biaya sebesar

\$286,5098. Berdasarkan salinan (*copies*) ke-2 juta, sudah ada 1,8780 *ozone filter* yang diganti. Artinya, dibutuhkan 1 hingga 2 *ozone filter* dengan biaya sebesar \$287,8013.

**Tabel 5.6** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan Waktu Kerusakan *Ozone Filter*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada tahun ke-9 *ozone filter* mengalami 2,2385 penggantian atau dapat dikatakan 2 hingga 3 penggantian dengan biaya sebesar \$323,8459; dan seterusnya.

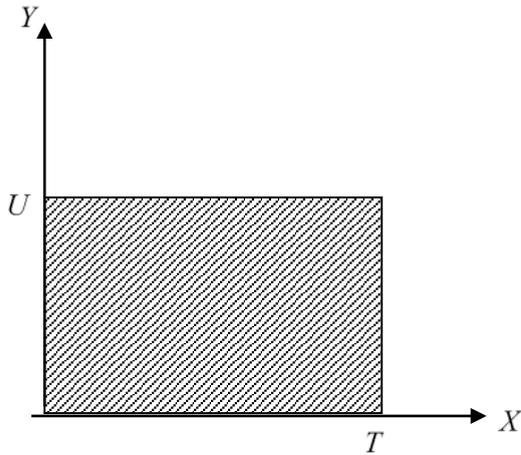
<i>Tabun</i>	1	2	3	4	5
<i>Penggantian</i>	0,0020	0,46	0,26	0,69	1,01
<i>Biaya</i>	100,20	104,68	126,48	169,07	201,39
<i>Tabun</i>	6	7	8	9	
<i>Penggantian</i>	1,20	1,49	1,86	2,23	
<i>Biaya</i>	220,24	249,36	286,50	323,84	

**Tabel 5.7** Evaluasi Fungsi Pembaruan Mesin Fotokopi dan biaya berdasarkan *Copies* Saat Kerusakan *Ozone Filter*. Contoh pembacaan tabel adalah : Pada salinan (*copies*) ke-2 juta *ozone filter* mengalami 1,8780 penggantian atau dapat dikatakan 1 hingga 2 penggantian dengan biaya sebesar \$287,8013; dan seterusnya.

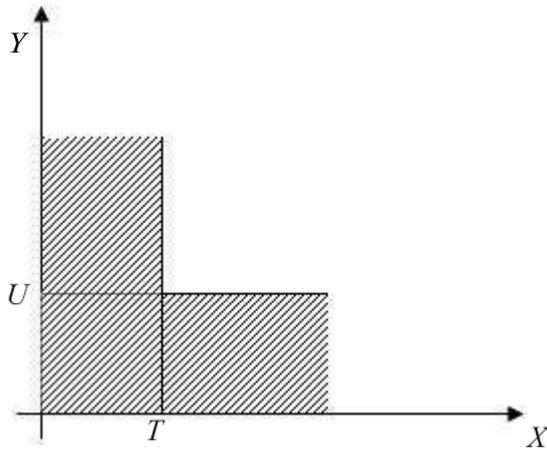
<i>Copies (Ribuan)</i>	100	150	300	500	700
<i>Penggantian</i>	0,0000	0,0001	0,0024	0,03	0,18
<i>Biaya</i>	100,00	100,00	100,23	103,46	118,85
<i>Copies (Ribuan)</i>	900	1000	1500	2000	
<i>Penggantian</i>	0,54	0,75	1,19	1,87	
<i>Biaya</i>	154,74	175,29	219,77	287,80	

### C. KEBIJAKAN *BASIC FREE-REPLACEMENT WARRANTY* DUA DIMENSI

Kebijakan garansi dua dimensi merupakan perluasan dari kebijakan garansi satu dimensi. Misalkan  $T, U > 0$  adalah waktu dan intensitas pemakaian suatu produk yang menjadi pembatas masa garansi. Terdapat beberapa macam daerah garansi dua dimensi berdasarkan kebijakan *free-replacement* yang dapat diilustrasikan sebagai berikut



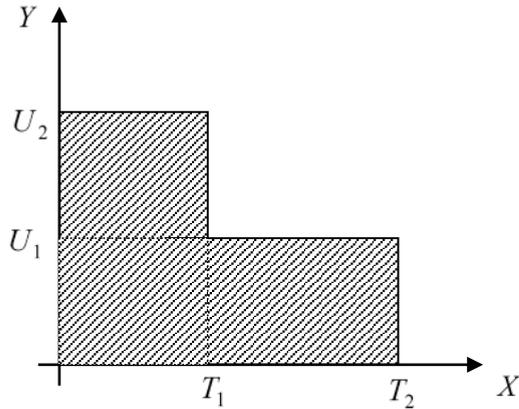
**Gambar 5.3** Kebijakan dua dimensi *FRW 1*. Bidang terarsir adalah daerah garansi. Pemanufaktur menyediakan penggantian atau perbaikan hingga batas waktu  $T$  atau hingga batas penggunaan  $U$ , manapun yang tercapai lebih dulu.



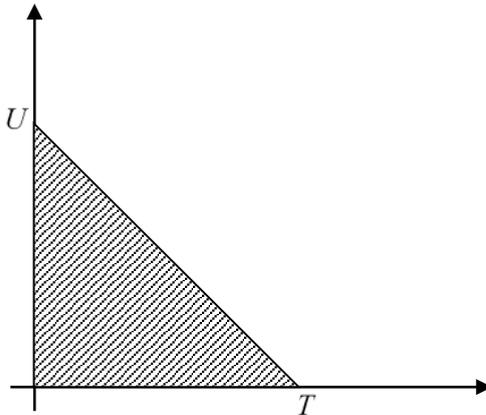
**Gambar 5.4** Kebijakan Dua Dimensi *FRW 2*. Pemanufaktur menyediakan penggantian atau perbaikan hingga waktu minimum  $T$  dan penggunaan minimum  $U$ .

Kebijakan *FRW 1* akan lebih menguntungkan pamanufaktur. Untuk pemakaian yang sudah melebihi  $U$ , meskipun usia masih kurang dari  $T$ , maka masa garansi akan habis, begitu juga sebaliknya. Namun, kebijakan *FRW 2* akan lebih menguntungkan pembeli.

Untuk pemakaian yang telah melebihi batas minimum  $U$ , asalkan usia masih kurang dari batas minimum  $T$ , masa garansi masih tetap berlaku, demikian juga sebaliknya.



**Gambar 5.5** Kebijakan Dua Dimensi *FRW* 3. Pemanufaktur menyediakan penggantian atau perbaikan hingga waktu  $T_1$  dengan penggunaan kurang dari  $U_2$  dan hingga waktu  $T_2$  dengan penggunaan kurang dari  $U_1$ .

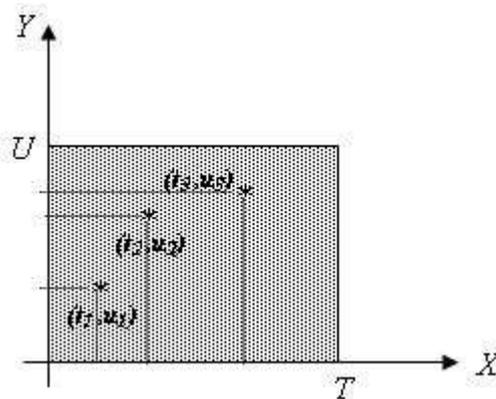


**Gambar 5.6** Kebijakan Dua Dimensi *FRW* 4. Pemanufaktur menyediakan penggantian atau perbaikan hingga waktu maksimum  $T$  dan hingga penggunaan maksimum  $U$ .

Tipe kebijakan garansi *FRW* 3 mungkin diminati oleh pemanufaktur *automobile*, karena mereka dapat memanfaatkan batas  $T_2$

dan  $U_2$  sebagai bagian dari promosi produk. Selanjutnya, pada kebijakan *FRW* 4, dimisalkan  $X$  adalah waktu sejak pembelian pertama dan  $Y$  adalah total penggunaan saat kerusakan. Suatu produk masih berada di dalam masa garansi apabila  $(Y + (U/T)X) < U$ .

Perhatikan bahwa untuk pembahasan estimasi biaya garansi pada tesis ini, difokuskan pada asumsi kebijakan *FRW* 1 dan karakter kerusakan objek yang mengikuti proses pembaruan. Ekspektasi biaya *FRW* dua dimensi juga diadaptasi dari persamaan biaya *FRW* satu dimensi. Dalam hal ini, dibutuhkan model distribusi bivariat yang dapat mewakili karakterisasi kerusakan dua dimensi.



**Gambar 5.7** Karakter Kerusakan Dua Dimensi Pada Daerah Kebijakan *FRW* 1. Tanda bintang menunjukkan kerusakan, yang disertai alamat koordinatnya. Sumbu  $X$  menunjukkan usia objek, sumbu  $Y$  menunjukkan intensitas pemakaian objek.

Gambar 5.7 merupakan ilustrasi karakter kerusakan dua dimensi. Misalkan  $(t_1, u_1)$  merupakan koordinat kerusakan pertama dan  $(t_2, u_2)$  adalah koordinat kerusakan kedua. Secara logis, kerusakan kedua haruslah berposisi setelah kerusakan pertama, artinya  $t_2 > t_1$  dan  $u_2 > u_1$ . Contohnya, apabila kerusakan pertama mesin terjadi pada hari ke-100 dan salinan (*copies*) ke-1000 lembar, maka kerusakan kedua pasti terjadi misalkan pada hari ke-250 dan salinan ke-1500. Kemungkinan lainnya, kerusakan kedua dapat saja terjadi pada hari ke-100 dan salinan ke-1100, begitu juga sebaliknya. Artinya  $t_2 = t_1$  dan  $u_2 > u_1$  atau  $t_2 > t_1$  dan  $u_2 = u_1$ . Karakter inilah

yang harus dipenuhi oleh model distribusi bivariat yang akan digunakan untuk estimasi biaya garansi dua dimensi. Dengan kata lain, ekspektasi  $Y$  bersyarat  $X = x$  harus merupakan fungsi naik. Syarat ini telah selesai dibuktikan pada persamaan 2.3.7. sehingga model distribusi Weibull bivariat dapat digunakan untuk pembahasan selanjutnya. Ekspektasi biaya  $FRW$  dua dimensi memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} E[C_S(t, u)] &= c_s(1 + (1 - \varepsilon/c_s)E[N(t, u)]) \\ &= c_s(1 + (1 - \lambda)E[N(t, u)]) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Perhatikan fungsi  $E[N(t, u)]$  tidak lain merupakan ekspektasi banyaknya kerusakan dalam daerah  $[0, t)$  dan  $[0, u)$ . Sedangkan  $N(t, u)$  dituliskan sebagai  $N(t, u) = \min\{N_t, N_u\}$

Dimana  $N_t = \max\{n : S_n^t \leq t\}$  dengan  $S_n^t = \sum_{i=1}^n X_i$  dan  $N_u = \max\{n : S_n^u \leq u\}$  dengan  $S_n^u = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Sehingga dapat diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} P\{N(t, u) \geq n\} &= P\{N_t \geq n\} \cap P\{N_u \geq n\} \\ &= P\{S_n^t \leq t, S_n^u \leq u\} \\ &= F^{(n)}(t, u) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Terlihat bahwa distribusi kumulatif bersama dari  $\{S_n^t, S_n^u\}$  merupakan konvolusi  $n$ -fold dari  $F(t, u)$ . Selanjutnya dengan mengadaptasi konstruksi pada dimensi satu dan sesuai persamaan (5.12), dapat dituliskan

$$\begin{aligned} P\{N(t, u) = n\} &= P\{N(t, u) \geq n\} - P\{N(t, u) \geq n + 1\} \\ &= F^{(n)}(t, u) - F^{(n+1)}(t, u) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Kembali pada fungsi  $M(t, u)$  sebagai ekspektasi banyaknya kerusakan, berdasarkan persamaan (5.13), dituliskan persamaan berikut

$$\begin{aligned}
M(t, u) &= E[N(t, u)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t, u) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \left( F^{(n)}(t, u) - F^{(n+1)}(t, u) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t, u)
\end{aligned}
\tag{5.14}$$

Selain itu,  $M(t, u)$  juga dapat dinyatakan sebagai solusi dari integral *renewal* lipat dua, yang tak lain merupakan perluasan dari persamaan (5.7), yaitu

$$\begin{aligned}
M(t, u) &= F(t, u) + \int_0^t \int_0^u M(t-x, u-y) f(x, y) dx dy \\
&= F(t, u) + \int_0^t \int_0^u M(t-x, u-y) dF(x, y) \\
&= F(t, u) + \int_0^t \int_0^u F(t-x, u-y) dM(x, y)
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

Adapun evaluasi fungsi  $M(t, u)$  tetap didasarkan pada metode titik tengah (*mid-point*) seperti yang telah dilakukan pada  $M(t)$  di persamaan (5.9). Sehingga diskritisasinya memenuhi persamaan berikut

$$\begin{aligned}
M(t_i, u_j) &= F(t_i, u_j) \\
&\quad + \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j F(t_i - t_{m-1/2}, u_j - u_{n-1/2}) (M(t_m, u_n) \\
&\quad - M(t_{m-1}, u_{n-1}))
\end{aligned}
\tag{5.16}$$

dengan  $0 < t_i < T$  dan  $0 < u_j < U$ . Selanjutnya  $M(t_i, u_j)$  dapat dihitung secara rekursif melalui persamaan

$$M(t_i, u_j) = \frac{F(t_i, u_j) + G_{ij} - F(t_i - t_{i-1/2}, u_j - u_{j-1/2})M(t_{i-1}, u_{j-1})}{1 - F(t_i - t_{i-1/2}, u_j - u_{j-1/2})} \quad (5.17)$$

dengan

$$G_{ij} = \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{n=1}^{j-1} F(t_i - t_{m-1/2}, u_j - u_{n-1/2})(M(t_m, u_n) - M(t_{m-1}, u_{n-1}))$$

Evaluasi fungsi pembaruan dan estimasi biaya garansi dua dimensi juga dilakukan pada data kerusakan komponen, yaitu *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter*. Tentu saja, ketiganya bukanlah *item* yang dapat diperbaiki, sehingga persamaan biaya (5.11) digunakan dengan memilih  $\lambda = 0$ . Nilai parameter yang digunakan sesuai dengan hasil estimasi yang diperoleh dengan menggunakan metode *GA* seperti pada tabel 4.1. Hasil evaluasi fungsi pembaruan dua dimensi untuk komponen *cleaning web*, *feed roller*, dan *ozone filter* masing-masing dapat dilihat pada tabel 5.8, 5.9, dan 5.10. Sedangkan estimasi biaya garansi dua dimensi berdasarkan *FRW* masing-masing dapat dilihat di tabel 5.11., 5.12, dan 5.13.

**Tabel 5.8** Evaluasi Fungsi Pembaruan *Cleaning Web* berdasarkan usia dan salinan (*copies*). Misalkan hingga tahun ke-2 dan salinan ke-1juta lembar, *Cleaning Web* telah mengalami penggantian sebanyak 1,5299 kali atau antara 1 hingga 2 kali penggantian.

Tahun Ke-	Salinan ( <i>Copies</i> ), dalam ribuan							
	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	0,1433	0,1454	0,1518	0,1876	0,3545	0,6793	0,8304	1,0007
2	0,3906	0,4290	0,4664	0,5122	0,6520	1,1024	1,5299	2,4976
3	0,6245	0,7776	0,9276	1,0802	1,3311	2,0794	2,9847	4,8871
4	0,7962	1,1696	1,5272	1,8859	2,3669	3,5315	5,0260	7,9378
5	0,9015	1,6382	2,2985	2,9609	3,7819	5,4835	7,6524	11,6327

Perhatikan bahwa pada tahun ke-5 dan salinan (*copies*) ke-1,5juta lembar, *cleaning web* telah diganti sebanyak 11,6327 kali atau sebanyak 11 hingga 12 kali penggantian. Biaya yang diperlukan untuk penggantian pada masa tersebut adalah \$1.263,3000. Artinya, apabila pemanufaktur hendak mengatur batas periode garansi dua dimensi

*cleaning web* dengan  $T = 5$  tahun dan  $U = 1,5$  juta lembar maka harga jual per unitnya haruslah lebih dari \$1.263,3000, untuk dapat memperoleh keuntungan.

**Tabel 5.9** Ekspektasi Biaya Garansi *Cleaning Web*. Misalkan hingga tahun ke-2 dan salinan (*copies*) ke-1 juta lembar, biaya penggantian yang dibutuhkan adalah \$253,0000; dan seterusnya.

Tabun	Salinan ( <i>Copies</i> ), dalam ribuan							
Ke-	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	114,30	114,50	115,20	118,80	135,50	167,90	183,00	200,10
2	139,10	142,90	146,60	151,20	165,20	210,20	253,00	349,80
3	162,40	177,80	192,80	208,00	233,10	307,90	398,50	588,70
4	179,60	217,00	252,70	288,60	336,70	453,20	602,60	893,80
5	190,20	263,80	329,90	396,10	478,20	648,30	865,20	1.263,30

**Tabel 5.10** Evaluasi Fungsi Pembaruan *Feed Roller* berdasarkan usia dan salinan (*copies*). Misalkan hingga tahun ke-2 dan salinan ke-1 juta, *Feed Roller* telah mengalami penggantian sebanyak 1,4711 kali atau antara 1 hingga 2 kali penggantian.

Tabun	Salinan ( <i>Copies</i> ), dalam ribuan							
Ke-	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	0,1251	0,1267	0,1321	0,1649	0,3337	0,6803	0,8433	1,0003
2	0,3737	0,4045	0,4348	0,4723	0,5994	1,0470	1,4711	2,4058
3	0,6226	0,7568	0,8888	1,0227	1,2456	1,9722	2,8763	4,7316
4	0,8062	1,1498	1,4813	1,8132	2,2562	3,3959	4,9065	7,7657
5	0,9146	1,6097	2,2415	2,8743	3,6518	5,3294	7,5328	11,4427

**Tabel 5.11** Ekspektasi Biaya Garansi *Feed Roller*. Misalkan hingga tahun ke-2 dan salinan (*copies*) ke-1 juta, biaya penggantian yang dibutuhkan adalah \$247,1000; dan seterusnya.

Tabun	Salinan ( <i>Copies</i> ), dalam ribuan							
Ke-	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	112,50	112,70	113,20	116,50	133,40	168,00	184,30	200,30
2	137,40	140,50	143,50	147,20	159,90	204,70	247,10	340,60
3	162,30	175,70	188,90	202,30	224,60	297,20	387,60	573,20
4	180,60	215,00	248,10	281,30	325,60	439,60	590,70	876,60
5	191,50	261,00	324,10	387,40	465,20	632,90	853,30	1.244,30

Perhatikan bahwa pada tahun ke-4 dan salinan (*copies*) ke-1 juta lembar, *feed roller* telah diganti sebanyak 4,9065 kali atau sebanyak 4 hingga 5 kali penggantian. Biaya yang diperlukan untuk penggantian pada masa tersebut adalah \$590,7000. Artinya, apabila pemanufaktur hendak mengatur batas periode garansi dua dimensi *feed roller* dengan

$T = 4$  tahun dan  $U = 1$  juta lembar maka harga jual per unitnya haruslah lebih dari \$590,7000, untuk dapat memperoleh keuntungan.

**Tabel 5.12** Evaluasi Fungsi Pembaruan *Ozone Filter* berdasarkan usia dan salinan (*copies*). Misalkan hingga tahun ke-3 dan salinan ke-1,5 juta, *Ozone Filter* telah mengalami penggantian sebanyak 1,6532 kali atau antara 1 hingga 2 kali penggantian.

<i>Tahun</i> <i>Ke-</i>	<i>Salinan (Copies), dalam ribuan</i>							
	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	0,0020	0,0020	0,0020	0,0032	0,0347	0,3450	0,7477	1,0002
2	0,0468	0,0468	0,0469	0,0470	0,0590	0,3492	0,7591	1,2155
3	0,2640	0,2649	0,2657	0,2665	0,2701	0,4462	0,8963	1,6532
4	0,6814	0,6908	0,7001	0,7094	0,7227	0,9035	1,5568	3,1383
5	0,9583	1,0140	1,0697	1,1253	1,1887	1,5789	2,8931	6,0501

**Tabel 5.13** Ekspektasi Biaya Garansi *Ozone Filter*. Misalkan hingga tahun ke-3 dan salinan (*copies*) ke-1 juta, biaya penggantian yang dibutuhkan adalah \$189,6279; dan seterusnya.

<i>Tahun</i> <i>Ke-</i>	<i>Salinan (Copies), dalam ribuan</i>							
	100	150	200	300	500	800	1000	1500
1	100,20	100,20	100,20	100,31	103,47	134,50	174,76	200,02
2	104,68	104,68	104,68	104,69	105,90	134,92	175,90	221,54
3	126,40	126,48	126,56	126,65	127,01	144,62	189,62	265,31
4	168,14	169,07	170,00	170,94	172,26	190,34	255,67	413,82
5	195,82	201,39	206,96	212,53	218,87	257,88	389,31	705,00

Perhatikan bahwa pada tahun ke-5 dan salinan (*copies*) ke-1 juta lembar, *ozone filter* telah diganti sebanyak 2,8931 kali atau sebanyak 2 hingga 3 kali penggantian. Biaya yang diperlukan untuk penggantian pada masa tersebut adalah \$389,3133. Artinya, apabila pemanufaktur hendak mengatur batas periode garansi dua dimensi *feed roller* dengan  $T = 5$  tahun dan  $U = 1$  juta lembar maka harga jual per unitnya haruslah lebih dari \$389,3133, untuk dapat memperoleh keuntungan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Hussaini, E.K. dan Ateya, S.F. (2005) : Parametric Estimation Under a Class of Multivariate Distributions. *Statistical Papers* **46**, 321-338. Springer-Verlag.
- Aarset, M.V. (1987). How to identify bathtub hazard rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106–108.
- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.
- Agarwal, S.K. and Al-Saleh, J.A. (2001). Generalized Gamma type distribution and its hazard rate function, *Communications in Statistics—Series A: Theory and Methods*, **30**, 309–318.
- Balakrishnan, N. and Basu, A.P. (1996). *The Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications*, Gordon and Breach, Singapore.
- Barlow, R.E. and Campo, R. (1975). Total time on test processes and applications to failure data analysis, in *Reliability and Fault Tree Analysis*, R.E. Barlow, J. Fussell, and N.D. Singpurwalla (eds), SIAM, Philadelphia, pp. 451–491.
- Bjarnason, H. and Hougaard, P. (2000). Fisher information for two gamma frailty bivariate Weibull models, *Lifetime Data Analysis*, **6**, 59–71.
- Black, S.E. and Rigdon, S.E. (1996). Statistical inference for a modulated power law process. *Journal of Quality Technology*, **28**, 81–90.

- Baik, J., Murthy, D.N.P., dan Jack, N. (2004) : Two-Dimensional Failure Modelling with Minimal Repair. *Naval Research Logistics*, **51 (3)**, 345 – 362. John Wiley & Sons.
- Bhattacharya, P. dan Bhattacharjee, R. (2010) : A Study on Weibull Distribution for Estimating the Parameters. *Journal of Applied Quantitative Methods*, **5 (2)**.
- Bulmer, M. dan Eccleston, J. (2003) : Photocopier Reliability Modeling Using Evolutionary Algorithm. *Case Studies in Reliability and Maintenance*, chapter 18, 399-421. . John Wiley & Sons.
- Blischke, W.R. (1974). On nonregular estimation. II. Estimation of the location parameter of the gamma and Weibull distributions, *Communications in Statistics*, **3**, 1109–1129.
- Blischke, W.R. and Murthy, D.N.P. (1994). *Product Warranty Handbook*, Marcel Dekker, New York.
- Blischke, R.W. dan Murthy, D.N.P. (1996) : *Warranty Cost Analysis*. Marcel Dekker Inc.
- Constantine, G. M. dan Savits, T. H. (1996) : A Multivariate Faa Di Bruno Formula With Applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **348 (2)**, 503-520.
- Chapman, T.G. (1997). Stochastic models for daily rainfall in the Western Pacific, *Mathematics and Computers in Simulation*, **43**, 351–358.
- Hogg, R.V., McKean, J.W., dan Craig, A.T. (2005) : *Introduction to Mathematical Statistics*, ed. 6, 115-125. *Pearson Prentice Hall*.
- Hougaard, P. (1986) : A Class of Multivariate Failure Time Distributions, *Biometrika*, **73**, 671-678
- Husniah, H., Pasaribu, U. S., Halim, A. H., dan Iskandar, B. P. (2009) : A Hybrid Minimal Repair and Age Replacement Policy for Warranted Products, 2nd *Pasific Conference on Manufacturing System*.

- Larson, H.J. (1974) : Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, ed. 2, 249-250. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc.
- Lee, C.K. dan Wen, M.J. (2009) : A Multivariate Weibull Distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **5 (22009)**, 55-56.
- Lu, J.C. dan Bhattacharyya, G.K. (1990) : Some New Constructions of Bivariate Weibull Models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **42 (3)**, 543-559.
- Lu, J.-C. (1990) : Least Squares Estimation for the Multivariate Weibull Model of Hougaard Based on Accelerated Life Test of System and Component. *Communication in Statistics*, **19(10)**, 3725-3739.
- Murthy, D. P., Xie, M., & Jiang, R. (2004). *Weibull models* (Vol. 505). John Wiley & Sons.
- Nakagawa, T. (2005) : Maintenance Theory of Reliability. *United States of America*. Springer-Verlag London.
- Ross, S. (1984) : A First Course In Probability, ed. 2. *United States of America*. Macmillan Publishing Company.
- Ross, S. (1996) : Stochastic Processes, ed. 2. *Canada*. John Wiley & Sons, Inc.
- Stone, G.C. dan Van Heeswijk, R.G. (1977) : Parameter Estimation for the Weibull Distribution, *IEEE Transaction on Electrical Insulation*, **EI-12 (4)**, 253-261.
- Stein, W.E. and Dattero, R. (1984). A new discrete Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **33**, 196–197.
- Stone, D.C. and Rosen, G.C. (1984). Some graphical techniques for estimating Weibull confidence intervals, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-33**, 362–369.

- Smith, R.M. and Bain, L.J. (1975). An exponential power life-testing distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 4, 469–481.
- Thiagarajan, T.R. and Harris, C.M. (1979). Statistical tests for exponential service from M/G/1 waiting-time data. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26, 511–520.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., dan Ye, K. (2002) : *Probability and Statistics for Engineers and Scientist*, ed. 7. *United States of America. Prentice-Hall Inc.*
- Weibull, W. (1977). References on Weibull Distribution, FTL A Report, Forsvarets Teletekniska Laboratorium, Stockholm.
- Xie, M. (1989) : On The Solution of Renewal-Type Integral Equation, *Comm. Statistics Simulation Computation* 18, 281-293
- Yang, S.C. and Nachlas, J.A. (2001). Bivariate reliability and availability modeling, *IEEE Transactions on Reliability*, 50, 26–35.
- Zuo, M.J., Liu, B., and Murthy, D.N.P. (2000). Replacement-repair policy for multi-state deteriorating products under warranty. *European Journal of Operational Research*, 123, 519–530.

## SINOPSIS

Buku Referensi yang berjudul *Distribusi Weibull: Konsep Dasar & Aplikasinya* merupakan buku yang disusun untuk membantu para kaum pembelajar sains dan matematika (statistika) menelusuri konsep dasar dan contoh aplikasi dari distribusi Weibull. Buku ini dikemas secara sederhana dengan urutan penyajian yang memungkinkan pembaca untuk memahami alur pemodelan empiris, pengolahan data, pencocokan model, dan taksonomi model Weibull secara terstruktur dan lengkap. Pembahasan mengenai model Weibull standar juga dilengkapi oleh penyajian grafik beserta deskripsi singkatnya. Hal ini diharapkan mampu mendorong intuisi pembaca untuk dapat turut mencermati sifat distribusi ini secara visual. Beberapa simulasi numerik disertakan sebagai upaya penulis menampilkan proses pemodelan yang sederhana namun tetap menyeluruh dan tuntas.

# INDEKS

---

## A

*age* · 110

Algoritma Genetika · vii, ix, 83, 85, 88, 91,  
107

---

## B

biner · 47, 89

*Box-Plot* · 92, 93, 94, 95, 96

---

## C

*Competing Risk* · 32

*cross over* · 90

---

## D

Data · vii, 19, 20, 22, 25, 90, 92, 102, 103,  
104, 108, 128, 136, 138, 145, 146

derivasi parsial · 73

derivatif · 89

Diagram Alir · 86

diskrit · 22

distribusi · xv, 18, 21, 23, 24, 25, 26, 27,  
32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41,  
42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,  
52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62,  
63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 73, 76,  
77, 78, 79, 82, 83, 86, 90, 91, 92, 94,  
99, 102, 104, 105, 111, 113, 121, 122,  
123, 132, 143

distribusi asimtotik · 26

distribusi Weibull · 18, 26, 27, 35, 36, 37,  
38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 52,  
53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65,

66, 67, 69, 73, 76, 78, 79, 82, 83, 86,  
90, 99, 102, 104, 105, 122

---

## E

eliminasi Gaussian · 79

Estimasi Parameter · vi, vii, 24, 91, 102,  
103, 104, 108

extended generalized gamma model · 41

---

## F

*Free-Replacement Warranty* · 109

Fungsi densitas · 34, 37, 41

fungsi distribusi · 23

fungsi *fitness* · 89

fungsi Gamma · 41, 140

Fungsi kepadatan peluang · 78

fungsi kuantil · 39

Fungsi *log-likelihood* · 105, 142

fungsi monoton naik · 65, 143

fungsi monoton turun · 143

fungsi naik · 68, 76, 122

fungsi padat peluang · 59, 73

fungsi tangga · 46

---

## G

garansi · xv, 58, 109, 110, 111, 112, 113,  
116, 119, 120, 121, 122, 125, 126, 127

garansi dua dimensi · 110

garansi satu dimensi · 110

garis singgung · 87

*general moment* · 58, 74, 79

grafik Weibull · 59

---

## H

histogram · 23

---

## I

inferensi statistik · 25

---

## K

Keandalan item · 30

kebijakan garansi · 109

**Ketunggalan Solusi · 143**

Korelasi · 75, 80, 108

kovarian · 75

---

## L

*least square* · 82

Log Weibull · 37

*log-likelihood* · 84

---

## M

masa pakai · 23

matriks Jacobian · 79

*Maximum Likelihood* · 83

mesin fotokopi · xv, 57, 63, 76, 91, 93, 94,  
97, 99, 100, 102, 107, 108, 111, 112,  
116

metode heuristik · 85

metode numerik · 85

metode titik tengah · 114

model analog · 17

model Bayesian · 33

model bergambar · 17

model deskriptif · 17

model fisik · 17

model matematika · 17

model *piecwise* · 46

model probabilistik · 18

model simbolik · 17

Model Weibull · 18, 30

*model white-box* · 17

multivariat · 27

mutasi · 90

---

## N

Newton-Raphson · 85

*n-fold* · 44

*non-repairable* · 109

---

## P

panjang kromosom · 89

parameter · viii, 22, 23, 24, 25, 26, 32, 33,  
34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44,  
45, 46, 47, 48, 49, 51, 57, 58, 59, 60,  
61, 65, 67, 69, 73, 77, 82, 83, 84, 86,  
89, 90, 91, 92, 102, 103, 104, 105,  
107, 115, 116, 125, 129, 142, 143

parameter alpha · 142, 143

parameter bentuk · 25

parameter beta · 142, 143

parameter lokasi · 25

parameter skala · 25

Pemodelan Empiris · 17

periode garansi · 110

peubah · 110

*Power law* · 34

*preventive replacement* · 110

probabilitas · 19

*Pro-Rata Warranty* · 109

*p-value* · 99

---

## R

*random hazard* · 67  
*reliability* · 48  
*repairable* · 109

---

## S

*sampel* · 23  
*Sectional* · 32  
*skenness* · 93  
statistik · 23, 25, 37, 92, 95, 96  
stokastik · 18  
*Supports* · 36

---

## T

taksonomi · 27  
transformasi fungsi · 83  
Transformasi Linear · 32  
Transformasi Nonlinier · 32  
*truncation* · 42

---

## U

*usage* · 110

---

## V

**Validasi Model** · 24  
variabel acak · 27  
variabilitas · 19  
variansi · 66, 140, 141

---

## W

Weibull Bivariat · 33  
*Weibull Fit* · 90  
Weibull generalized · 38  
Weibull invers · 37  
Weibull *renewal* · 56  
Weibull standar · 38

## LAMPIRAN

### DATA RIWAYAT KERUSAKAN MESIN FOTOKOPI (BULMER DAN ECCLESTON, 2003)

Data Riwayat Kerusakan Level Sistem

<b>KERUSAKAN KE-</b>	<b>KOMPONEN</b>	<b>BANYAK KERTAS TERKOPI</b>	<b>HARI KE-</b>
1	<i>Cleaning Web</i>	60.152	29
	<i>Toner Filter</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
2	<i>Cleaning Web</i>	132.079	128
	<i>Drum Cleaning Blade</i>		
	<i>Toner Guide</i>		
3	<i>Toner Filter</i>	220.832	227
	<i>Cleaning Blade</i>		
	<i>Dust Filter</i>		
4	<i>Drum Claws</i>	252.491	276
	<i>Drum Cleaning Blade</i>		
	<i>Cleaning Blade</i>		
5	<i>Drum</i>	365.075	397
	<i>Toner Guide</i>		
	<i>Cleaning Web</i>		
6	<i>Toner Filter</i>	370.070	468
7	<i>Drum Claws</i>	378.223	492
8	<i>Ozone Filter</i>	390.459	516
9	<i>Feed Rollers</i>	427.056	563
	<i>Upper Fuser Roller</i>		
10	<i>Cleaning Web</i>	449.928	609
	<i>Upper Fuser Roller</i>		
	<i>Toner Filter</i>		
11	<i>Feed Rollers</i>	472.320	677
	<i>Upper Roller Claws</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
12	<i>Cleaning Blade</i>	501.550	722
	<i>Upper Roller Claws</i>		
	<i>Cleaning Web</i>		
	<i>Dust Filter</i>		

	<i>Drum</i>		
	<i>Toner Guide</i>		
13	<i>TS Block Front</i>	533.634	810
	<i>Charging Wire</i>		
14	<i>Cleaning Blade</i>	583.981	853
	<i>Cleaning Web</i>		
15	<i>Drum Claws</i>	597.739	916
	<i>Drum</i>		
	<i>Toner Guide</i>		
16	<i>Charging Wire</i>	624.578	956
17	<i>Lower Roller</i>	660.958	996
	<i>Cleaning Web</i>		
18	<i>Feed Rollers</i>	675.841	1016
	<i>Toner Filter</i>		
19	<i>Ozone Filter</i>	684.186	1074
	<i>Cleaning Web</i>		
20	<i>Dust Filter</i>	716.636	1111
	<i>Upper Roller Claws</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
21	<i>Upper Fuser Roller</i>	769.384	1165
	<i>Optics PS Felt</i>		
	<i>Cleaning Blade</i>		
22	<i>Drum Claws</i>	787.106	1217
	<i>Toner Guide</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
23	<i>Ozone Filter</i>	840.494	1266
	<i>Cleaning Blade</i>		
24	<i>Toner Guide</i>	851.657	1281
	<i>Drum Claws</i>		
25	<i>Drum</i>	872.523	1312
	<i>Cleaning Web</i>		
26	<i>Upper Fuser Roller</i>	900.362	1356
	<i>Upper Roller Claws</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
27	<i>Dust Filter</i>	933.637	1410
	<i>Ozone Filter</i>		
28	<i>Cleaning Web</i>	933.785	1412
29	<i>Drive Gear D</i>	936.597	1436
30	<i>Cleaning Web</i>	938.100	1448
	<i>Dust Filter</i>		
31	<i>Ozone Filter</i>	944.235	1460

32	<i>Feed Rollers</i>	984.244	1493
	<i>Charging Wire</i>		
	<i>Cleaning Web</i>		
33	<i>Ozone Filter</i>	994.597	1514
	<i>Optics PS Felt</i>		
	<i>Upper Fuser Roller</i>		
34	<i>Upper Roller Clams</i>	1.005.842	1551
	<i>Lower Roller</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
35	<i>Drive Gear D</i>	1.014.550	1560
	<i>Cleaning Web</i>		
36	<i>Toner Guide</i>	1.045.893	1583
	<i>Cleaning Blade</i>		
37	<i>Drum</i>	1.057.844	1597
	<i>Charging Wire</i>		
	<i>Cleaning Web</i>		
38	<i>Toner Filter</i>	1.068.124	1609
	<i>Ozone Filter</i>		
	<i>Feed Rollers</i>		
39	<i>Dust Filter</i>	1.072.760	1625
	<i>Ozone Filter</i>		
	<i>Cleaning Web</i>		
40	<i>Optics PS Felt</i>	1.077.537	1640
	<i>Charging Wire</i>		
41	<i>TS Block Front</i>	1.099.369	1650
	<i>Charging Wire</i>		

#### Data Riwayat Kerusakan Level Komponen

<b>KERUSAKAN KE-</b>	<b>KOMPONEN</b>	<b>BANYAK KERTAS TERKOPI</b>	<b>HARI KE-</b>
1		60.152	29
2		132.079	128
3		365.075	397
4	<i>Cleaning Web</i>	427.056	563
5		501.550	722
6		597.739	916
7		675.841	1016
8		716.636	1111

9		900.362	1356
10		933.785	1412
11		938.100	1448
12		994.597	1514
13		1.045.893	1583
14		1.068.124	1609
15		1.077.537	1640

<b>KERUSAKAN KE-</b>	<b>KOMPONEN</b>	<b>BANYAK KERTAS TERKOPI</b>	<b>HARI KE-</b>
1		60.152	29
2		370.070	468
3		449.928	609
4		472.320	677
5		675.841	1016
6	<i>Feed Roller</i>	769.384	1165
7		840.494	1266
8		933.637	1410
9		984.244	1493
10		1.014.550	1560
11		1.072.760	1625

<b>KERUSAKAN KE-</b>	<b>KOMPONEN</b>	<b>BANYAK KERTAS TERKOPI</b>	<b>HARI KE-</b>
1		365.075	397
2		684.186	1074
3		840.494	1266
4		933.637	1410
5	<i>Ozone Filter</i>	944.235	1460
6		994.597	1514
7		1.068.124	1609
8		1.072.760	1625

## PEMBUKTIAN EKSPEKTASI DAN VARIANSI DISTRIBUSI WEIBULL UNIVARIAT

Berikut ini akan ditunjukkan langkah matematis untuk mendapatkan ekspektasi dan variansi suatu variabel acak yang berdistribusi Weibull :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
 &= \int_0^{\infty} x(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}e^{-(x/\alpha)^{\beta}} dx \\
 &= \beta/\alpha^{\beta} \int_0^{\infty} x \cdot x^{\beta-1}e^{-(x/\alpha)^{\beta}} dx \\
 &= \beta/\alpha^{\beta} \int_0^{\infty} x^{\beta}e^{-(x/\alpha)^{\beta}} dx
 \end{aligned}
 \tag{L1}$$

Untuk mempermudah pengintegralan, dimisalkan  $u = (x/\alpha)^{\beta}$  sehingga  $x = u^{1/\beta}\alpha$  dan  $du/dx = \beta/\alpha^{\beta} (x/\alpha)^{\beta-1}$  sehingga  $dx = \alpha du/\beta u^{1-1/\beta}$ .

Pemisalan ini akan mengakibatkan persamaan (L1) menjadi :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \beta/\alpha^{\beta} \int_0^{\infty} (\alpha^{\beta}ue^{-u}) \alpha du/\beta u^{1-1/\beta} \\
 &= \alpha \int_0^{\infty} u^{1/\beta}e^{-u} du
 \end{aligned}
 \tag{L2}$$

Persamaan (L2) dapat dinyatakan ke dalam suatu fungsi Gamma. Fungsi Gamma, diketahui memiliki bentuk  $\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta-1}e^{-x} dx$ , sehingga bentuk  $\int_0^{\infty} u^{1/\beta}e^{-u} du$  dapat ditulis menjadi  $\Gamma(1 + 1/\beta)$ . Jadi, ekspektasi suatu variabel acak yang berdistribusi Weibull adalah  $E(X) = \alpha\Gamma(1 + 1/\beta)$ .

Sedangkan, untuk memperoleh nilai variansi  $\sigma^2$ , dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (\beta/\alpha) (x/\alpha)^{\beta-1} e^{-(x/\alpha)^\beta} dx
 \end{aligned}
 \tag{L3}$$

Dengan teknik pemisalan yang sama dengan proses integrasi ekspektasi, didapatkan :

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \beta/\alpha^\beta \int_0^\infty (\alpha u^{1/\beta})^{\beta+1} e^{-u} \alpha du / \beta u^{1-1/\beta} \\
 &= \alpha^2 \int_0^\infty u^{2/\beta} e^{-u} du \\
 &= \alpha^2 \Gamma(1 + 2/\beta)
 \end{aligned}
 \tag{L4}$$

Pada akhirnya, nilai variansi dapat diperoleh dengan mengoperasikan rumus variansi berikut :

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \alpha^2 \Gamma(1 + 2/\beta) - [\alpha \Gamma(1 + 1/\beta)]^2 \\
 &= \alpha^2 [\Gamma(1 + 2/\beta) - [\Gamma(1 + 1/\beta)]^2]
 \end{aligned}
 \tag{L5}$$

**LAMPIRAN**  
**PEMBUKTIAN EKSTISTENSI DAN KETUNGGALAN SOLUSI**  
**PADA FUNGSI *LOG-LIKELIHOOD* WEIBULL**

**Eksistensi Solusi  $\hat{\beta}$**

Fungsi *log-likelihood* Weibull sesuai persamaan (4.) memenuhi persamaan berikut

$$l(\alpha, \beta) = \ln L(\alpha, \beta; x_i)$$

$$= n \ln \beta - n\beta \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - 1/\alpha^\beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta$$

Turunan pertama terhadap parameter beta adalah

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{\ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i}{\alpha^\beta}$$

Sedangkan turunan kedua terhadap parameter beta adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\beta^2} + \frac{\alpha^\beta (\ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\ln x_i)^2)}{-\alpha^\beta \ln \alpha (\ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i)} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} + \frac{\ln \alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\ln x_i)^2}{\alpha^\beta} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\ln x_i)^2 - (\ln \alpha)^2 \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \\ &< 0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter beta bernilai kurang dari nol.

Selanjutnya, turunan pertama terhadap parameter alpha adalah

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = n\beta(\alpha^{\beta+1}) + \alpha\beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta$$

Turunan kedua terhadap parameter alpha adalah

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = -n\alpha^\beta(\beta + 1) + \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta < 0$$

Terbukti bahwa turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter alpha bernilai kurang dari nol. Dengan demikian nilai maksimum dari fungsi *log-likelihood* distribusi Weibull, eksis

### Ketunggalan Solusi $\hat{\beta}$

Perhatikan fungsi parameter beta berikut (sesuai persamaan 4. ) :

$$f(\beta) = 1/\beta + \sum_{i=1}^n \ln x_i/n - \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i / \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta = 0$$

Persamaan diatas dapat ditulis ulang sebagai berikut :

$$1/\beta = - \sum_{i=1}^n \ln x_i/n + \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i / \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta$$

Untuk menunjukkan ketunggalan solusi  $\hat{\beta}$ , dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa fungsi yang berada di ruas kanan misalkan  $f_1(\beta)$  merupakan fungsi monoton turun, sedangkan fungsi di ruas kiri misalkan  $f_2(\beta)$  merupakan fungsi monoton naik. Sehingga keduanya hanya akan berpotongan di satu titik saja yaitu  $\hat{\beta}$ .

$$\frac{df_1(\beta)}{d\beta} = -1/\beta^2 < 0$$

$$\frac{df_2(\beta)}{d\beta} = \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\ln x_i)^2 / \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta - \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \ln x_i \right)^2 / \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right)^2 > 0$$

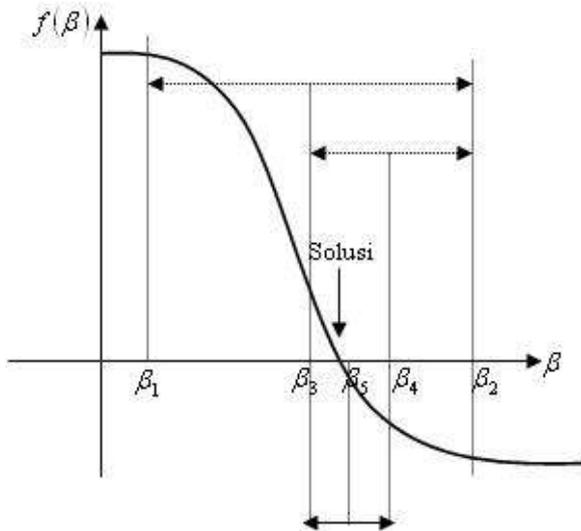
Karena  $\frac{df_1(\beta)}{d\beta}$  bernilai kurang dari nol dan  $\frac{df_2(\beta)}{d\beta}$  bernilai lebih dari nol, sehingga jelas bahwa  $f_1(\beta)$  adalah fungsi monoton turun dan  $f_2(\beta)$  adalah fungsi monoton naik.

## METODE *BISECTION* UNTUK MENDAPATKAN AKAR PERSAMAAN $f(\beta)$ PADA PERMASALAHAN ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL UNIVARIAT

Metode *bisection* dapat diaplikasikan untuk mencari akar suatu persamaan, misalkan  $f(\beta) = 0$ , dimana  $\beta \in \mathcal{R}$ .  $f$  adalah fungsi kontinu yang terdefinisi di selang  $[\beta_1, \beta_2]$  serta  $f(\beta_1) > 0$  dan  $f(\beta_2) < 0$  atau sebaliknya. Dalam hal ini,  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  dikatakan mengurung suatu nilai akar, karena sesuai dengan teorema nilai tengah,  $f$  pasti memiliki paling tidak satu nilai akar pada interval  $[\beta_1, \beta_2]$ .

Prinsip kerja metode *bisection* adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan titik tengah interval  $[\beta_1, \beta_2]$ , misalkan  $\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
2. Jika  $f(\beta_3) > 0$  maka gantikan  $\beta_1$  dengan  $\beta_3$  sehingga interval menjadi  $[\beta_3, \beta_2]$ , lakukan *bisection* selanjutnya
3. Jika  $f(\beta_3) < 0$  maka gantikan  $\beta_2$  dengan  $\beta_3$  sehingga interval menjadi  $[\beta_1, \beta_3]$ , lakukan *bisection* selanjutnya
4. Jika  $f(\beta_3) = 0$ , Iterasi dihentikan,  $\beta_3$  adalah solusi dari persamaan  $f(\beta) = 0$



**DIAGRAM BATANG DAN DAUN  
DATA WAKTU ANTAR KERUSAKAN MESIN FOTOKOPI**

**Diagram Batang dan Daun Data Kerusakan Level Sistem**

Stem-and-leaf of WAK    N = 39      Stem-and-leaf of CAK    N = 39  
Leaf Unit = 1.0                      Leaf Unit = 1000

1 0 9	8 0 24447888
7 1 024556	17 1 001112347
15 2 01344469	(7) 2 0122679
19 3 1377	15 3 1122366
(9) 4 003456799	8 4 0
11 5 2448	7 5 023
7 6 38	4 6 0
5 7 1	3 7 1
4 8 8	2 8 8
3 9 99	1 9
1 10	1 10
1 11	1 11 2
1 12 1	

**Diagram Batang dan Daun Data Kerusakan Level Komponen (*Cleaning Web*)**

Stem-and-leaf of CAK (Cle N = 15      Stem-and-leaf of WAK (Cle N = 15  
Leaf Unit = 1000                      Leaf Unit = 10

2 0 49	4 0 2233
2 1	(5) 0 56699
3 2 2	6 1 0
4 3 3	5 1 569
5 4 0	2 2 4
7 5 16	1 2 6
(2) 6 01	
6 7 148	
3 8	
3 9 6	

**Diagram Batang dan Daun Data Kerusakan Level Komponen (*Feed Roller*)**

Stem-and-leaf of CAK (Fee N = 11  
Leaf Unit = 1000

```

1  2 2
2  3 0
2  4
4  5 08
5  6 0
(2) 7 19
4  8
4  9 33
    
```

Stem-and-leaf of WAK (Fee N = 11  
Leaf Unit = 10

```

1  0 2
1  0
4  0 666
5  0 8
(1) 1 0
5  1
5  1 444
    
```

**Diagram Batang dan Daun Data Kerusakan Level Komponen (*Ozone Filter*)**

Stem-and-leaf of CAK(Ozon N = 8  
Leaf Unit = 10000

```

2  0 01
(3) 0 579
3  1
3  1 5
2  2
2  2
2  3 1
1  3 6
    
```

Stem-and-leaf of WAK(Ozon N = 8  
Leaf Unit = 10

```

4  0 1559
4  1 49
2  2
2  3 9
1  4
1  5
1  6 7
    
```

## BIODATA PENULIS



**Indira Puteri Kinasih, M.Si.** merupakan dosen Statistika di Prodi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, UIN Mataram. Penulis dilahirkan di Pamekasan, 16 Desember 1985. Penulis berkecimpung di dunia pendidikan sejak tahun 2010 sebagai pengajar matematika di sekolah menengah kejuruan di kota Malang. Penulis mengawali karir akademis sebagai dosen pada tahun 2012 di Universitas Pendidikan Mandalika, setelah menyelesaikan studi S2-nya di Institut Teknologi Bandung. Penulis juga tergabung dalam Ikatan

Alumni Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (IKA-ITS) wilayah NUSRA. Selain mengajar, penulis turut aktif dalam menjadi pendamping para guru matematika NTB dalam program *professional development*, kerjasama antara University of Canberra, Kemenag, Kemdikbud, dan UNDIKMA pada kurun waktu 2015-2018, sekaligus menjadi koordinator pengembang modul matematika SMP di kesempatan yang sama.