KALKULUS DIFERENSIAL

Sanabil
Puri Bunga Amanah
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946
Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabilpublishing.com

ISBN 978-623-317-227-1
9 786233 172271

Lalu Sucipto, M.Pd.
KALKULUS DIFERENSIAL

Lalu Sucipto, M.Pd.

Buku Ajar

KALKULUS DIFERENSIAL

Sanabil

KALKULUS DIFERENSIAL

Lalu Sucipto, M.Pd.

KALKULUS DIFERENSIAL

Sanabil

Kalkulus Diferensial

Penulis: Lalu Sucipto, M.Pd
Editor : Djuita Hidayati, M.Pd
Layout: Kurniawan Arizona, M.Pd
Desain Cover : Subaire, S.Pd.

ISBN : 978-623-317-227-1
Cetakan 1 : Oktober 2021

Penerbit:
Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabil.web.id

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR DEKAN

Alhamdulillah, segala puji hanya milik Allah SWT. Shalawat & Salam semoga senantiasa terlimpah pada teladan agung Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari kebangkitan kelak. Berkat rahmat dan hidayah Allah SWT, program penulisan buku ajar dan referensi telah dapat dirampungkan.

Kewajiban dosen untuk menulis dan memproduksi buku, baik buku ajar maupun buku referensi sejatinya sudah diatur dalam UU Nomor 12 tahun 2012 tentang perguruan tinggi dan UU Nomor 14 tahun 2005 tentang Guru dan Dosen dan sejumlah regulasi lainnya. Pasal 12 UU No.12 tahun 2012 dengan tegas menyebutkan bahwa dosen secara perseorangan atau kelompok wajib menulis buku ajar atau buku teks yang diterbitkan oleh perguruan tinggi sebagai salah satu sumber belajar.

Kompetisi Buku Ajar dan Referensi (KOBAR) Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram tahun 2021 adalah upaya Fakultas untuk berkontribusi dalam impelementasi undang-undang di atas, dimana secara kuantitatif, grafik riset dan publikasi dosen PTKI masih harus terus ditingkatkan. Tujuan lainnya adalah meningkatkan mutu pembelajaran dengan mewujudkan suasana akademik yang kondusif dan proses pembelajaran yang efektif, efisien dengan kemudahan akses sumber belajar bagi dosen dan mahasiswa. Publikasi ini juga diharapkan men-*support*peningkatan karir dosen dalam konteks kenaikan jabatan fungsional dosen yang ujungnya berdampak pada peningkatan status dan peringkat akreditasi program studi dan perguruan tinggi.

Secara bertahap, Fakultas terus berikhtiar meningkatkan kuantitas dan kualitas penerbitan buku. Pada tahun 2019 berjumlah 10 judul buku dan meningkat cukup signifikan tahun 2021 menjadi 75 judul buku referensi. Ikhtiar Fakultas tidak berhenti pada level publikasi, namun berlanjut pada pendaftaran Hak Kekayaan Intelektual (HKI) dosen di Direktorat Jenderal Kekayaan Intelektual (DJKI) Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia RI, sehingga tahun 2021 menghasilkan 75 HKI dosen.

Kompetisi buku ajar dan referensi tahun 2021 berorientasi interkoneksi-integrasi antara agama dan sains, berspirit Horizon Ilmu UIN Mataram dengan inter-multi-transdisiplin ilmu yang mendialogkan metode dalam *Islamic studies* konvensional berkarakteristik deduktif-normatif-teologis dengan metode *humanities studies* kontemporer seperti sosiologi, antropologi, psikologi, ekonomi, hermeneutik, fenomenologi dan juga dengan metode ilmu eksakta (*natural scincies*) yang berkarakter induktif-rasional. Buku yang dikompetisikan dan diterbitakan pada Tahun 2021 sejumlah 75 buku referensi dan 20 buku ajar untuk kalangan dosen. Disamping kompetisi buku untuk dosen, FTK UIN Mataram juga menyelenggarakan kompetisi buku bagi mahasiswa. Ada 20 judul buku yang dikompetisikan dan telah disusun oleh mahasiswa. Hal ini tentunya menjadi suatu pencapaian yang patut untuk disyukuri dalam meningkatkan kemampuan literasi dan karya ilmiah semua civitas akademika UIN Mataram.

Mewakili Fakultas, saya berterima kasih atas kebijakan dan dukungan Rektor UIN Mataram dan jajarannya, kepada penulis yang telah berkontribusi dalam tahapan kompetisi buku tahun 2021, dan tak terlupakan juga editor dari dosen sebidang dan penerbit yang tanpa sentuhan *zauq*nya, *perfomance* buku tak akan semenarik ini. Tak ada gading yang tak retak; tentu masih ada kurang, baik dari substansi maupun teknis penulisan, di 'ruang' inilah kami harapkan saran kritis dari khalayak pembaca. Semoga agenda ini menjadi *amal jariyah* dan hadirkan keberkahan bagi sivitas akademika UIN Mataram dan ummat pada umumnya.

Mataram, 25 Oktober 2021
Dekan

Dr. Jumarim, M.H.I
NIP. 197612312005011006

PRAKATA PENULIS

Alhamdulillah, Segala puji dipanjatkan kehadirat Allah SWT dengan limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penyusunan bahan ajar ini dengan judul "*Kalkulus Diferensial*" dapat diselesaikan.

Bahan ajar ini dapat diselesaikan juga karena adanya bantuan dan kerja sama yang baik dari berbagai pihak. Penulis dengan segala ketulusan menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada yang terhormat:

1. Ibu Dr. Hj. Lubna, M.Pd Selaku Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram.
2. Seluruh pimpinan di FTK dan seluruh dosen UIN Mataram, khususnya dosen Program Studi Tadris Matematika yang telah dengan tulus berdiskusi dengan penulis untuk terwujudnya bahan ajar ini.
3. Semua pihak yang penulis tidak dapat sebutkan yang telah banyak membantu penulis hingga selesai.

Penulis berdo'a semoga semua bantuan dan amal baik semua pihak yang diberikan kepada penulis mendapat balasan kebaikan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa bahn ajar ini masih banyak terdapat kekurangan dan perlu penyempurnaan, namun semoga dapat bermanfaat untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika.

Mataram, Oktober 2021

Penulis

Lalu Sucipto

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kita dihadapi pada ungkapan-ungkapan yang berbagai macam, misalnya: tiga buah apel atau delapan lembar uang lima ribuan, atau ungkapan-ungkapan lainnya. Disini secara tidak sadar kita telah menggunakan kata-kata "tiga", "lima", atau "delapan" yang dapat membantu kita untuk menerangkan suatu kondisi/keadaan tertentu, tetapi kita sendiri tidak tahu apakah yang dimaksud ungkapan itu. Dalam matematika ungkapan di atas kita sebut dengan bilangan. Tetapi apakah sebenarnya yang dimaksud dengan bilangan, susah sekali untuk menjawabnya. Dalam kehidupan sehari-sehari kita mengenal bilangan sebagai suatu alat yang sangat diperlukan dalam peradaban, yang dapat membantu manusia untuk menerangkan atau mengerjakan suatu kegiatan. Pada abad kelima sebelum masehi, Phytagoras mengatakan bahwa bilangan adalah inti dari seluruh alam semesta ini. Tentu saja kita akan pusing kalau memikirkan kebenaran dari ucapan di atas, dan tanpa memikirkan ucapan di atas, kita semua telah menyadari betapa pentingnya bilangan tersebut. Demikian pula dalam matematika, kita tidak usah pusing memikirkan hal-hal yang rumit di atas, yang penting kita tahu bagaimana menggunakan suatu bilangan, dapat menyelidiki, dan mempelajari sifat serta bekerja dengan bilangan tersebut.

Pada uraian mengenai sistem bilangan pada dasarnya merupakan suatu gambaran tentang pertumbuhan dari sistem bilangan mulai dari bilangan yang paling sederhana, yakni bilangan asli, melalui pecahan sampai kepada bilangan yang tak rasional. Jadi jika kita menyebut istilah bilangan real maka yang dimaksud adalah suatu bilangan yang mungkin bulat, mungkin positif, mungkin negatif, mungkin pecahan, atau bisa juga bilangan irasional. Jadi tanpa kita sadari kita selama ini telah "bermain-main" dengan bilangan real tanpa mengetahui lebih mendalam mengenai sistem bilangan real itu sendiri.

Dalam uraian sistem bilangan real di bawah ini dibicarakan tentang sifat medan bilangan real, dan sifat urutan dan sifat kerapatan pada bilangan real. Sifat medan memberikan rumus-rumus aljabar elementer yang sering digunakan dalam perhitungan matematika. Sifat urutan bilangan real menghasilkan bilangan positif, nol dan bilangan negatif. Selain itu sifat urutan memberikan relasi antara dua bilangan real yaitu $\leq$ ("kurang dari atau sama dengan") dan $\geq$ ("lebih dari atau sama dengan") yang melahirkan konsep ketaksamaan dan nilai mutlak yang sangat penting dalam kalkulus. Sedangkan sifat kerapatan bilangan rasional dalam bilangan real menyatakan bahwa diantara dua bilangan real sembarang yang berlainan terdapat suatu bilangan rasional.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memecahkan masalah berkaitan dengan konsep operasi bilangan real.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep bilangan real, Aksioma Medan, sifat-sifat urutan.
- **Materi Pokok**: Sistem Bilangan Real.

A. Kegiatan Belajar 1

4. Uraian Materi: Sistem Bilangan Real

- **Bilangan Real**

Sistem bilangan real dan sifat-sifanya merupakan dasar dalam kalkulus. Sebelum membicarakan sistem bilangan real tersebut, terlebih dahulu akan dimulai dengan membicarakan sistem bilangan yang paling sederhana yaitu *bilangan asli*.

Bilangan asli dalam matematika, terdapat dua kesepakatan mengenai himpunan bilangan asli. Yang pertama definisi menurut matematikawan tradisional, yaitu himpunan bilangan bulat positif yang bukan nol {1, 2, 3, 4, ...}. Sedangkan yang kedua definisi oleh logikawan dan ilmuwan komputer, adalah himpunan nol dan bilangan bulat positif {0, 1, 2, 3, ...}. Bilangan asli merupakan salah satu konsep matematika yg paling sederhana dan termasuk konsep pertama yang bisa dipelajari dan dimengerti oleh manusia. Para ahli matematika menggunakan N untuk menuliskan himpunan seluruh bilangan asli. Himpunan bilangan ini bisa dikatakan tidak terbatas.

Jika negatif dari bilangan asli digabungkan dengan bilangan nol diperoleh *bilangan bulat*. Bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan cacah {0, 1, 2, 3, ...} dan negatifnya {-1, -2, -3, ...}; -0 adalah sama dengan 0 sehingga tidak lagi dimasukkan secara terpisah). Bilangan bulat dituliskan tanpa komponen desimal atau pecahan. Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan Z berasal dari *Zahlen* (bahasa Jerman).

Bilangan-bilangan bulat belum memadai, bila dihadapkan pada bilangan-bilangan hasil pengukuran yang memerlukan ketelitian. Demikian pula bilangan-bilangan bulat tersebut tidak memadai bila dihadapkan pada bilangan yang merupakan hasil bagi dari dua bilangan bulat, misalnya ½ , 1/3, 6/3 dan -22/11. Bilangan 6/3 dan -22/11 dikelompokkan dalam bilangan-bilangan yang merupakan hasil bagi dari bilangan-bilangan bulat secara normal dengan bilangan 2 dab -2.

Tetapi 6/0 dan -22/0 tidak dapat dikelompokkan kedalam bilangan-bilangan yang merupakan hasil bagi dari bilangan-bilangan bulat, karena tidak dapat diartikan dari lambang-lambang tersebut.

Bilangan-bilangan yang merupakan hasil bagi dari dua bilangan bulat kecuali pembagian dengan nol disebut *bilangan rasional.*

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai a/b di mana a, b bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. di mana batasan dari bilangan rasional adalah mulai dari selang $(-\infty, \infty)$.

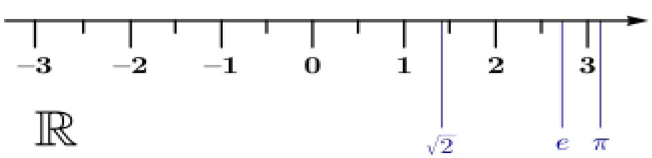
Bilangan bisa dikatakan dapat dibagi menjadi 2 sekup besar yaitu bilangan rasional dan bilangan irasional. Bila kita mengatakan bilangan rasional berarti di dalamnya sudah mencakup bilangan: bilangan bulat, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan prima dan bilangan-bilangan lain yang menjadi subset dari bilangan rasional. Himpunan semua bilangan rasional bulat dalam matematika dilambangkan dengan Q. Dalam himpunan bilangan rasional untu akar kuadrat dari kuadrat sempurna (misalnya, 0, 1, 4, 9, 16) adalah bilangan bulat.

Selanjutnya Dalam semua kasus lainnya, akar kuadrat dari bilangan bulat positif adalah *bilangan tak rasional.* Bilangan tak rasional adalah bilangan-bilangan real yang tak dapat dinyatakan sebagai a/b di mana a, b bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0. Bilangan tak rasional karenanya memiliki desimal tak berulang, misalkan $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π dan sebagainya.

Berikut pada tabel diberikan hasil akar kuadrat dari beberapa bilangan.

N	√n, dipotong menjadi 50 tempat desimal
2	1.41421356237309504880168872420969807856967187537694
3	1.73205080756887729352744634150587236694280525381038
5	2.23606797749978969640917366873127623544061835961152
6	2.44948974278317809819728407470589139196594748065667
7	2.64575131106459059050161575363926042571025918308245
8	2.82842712474619009760337744841939615713934375075389
10	3.16227766016837933199889354443271853371955513932521

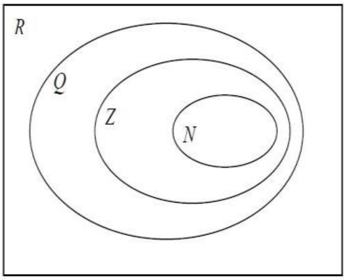
Sehingga berikutnya adalah sekumpulan bilangan (bilangan rasional dan tak rasional) bersama-sama dengan negatifnya dinamakan *bilangan real*. Himpunan semua bilangan rasional bulat dalam matematika dilambangkan dengan R. Bilangan real dapat digambarkan oleh himpunan titik-titik yang terletak pada suatu garis bilangan. Bilangan riil dapat dipahami sebagai titik-titik garis bilangan yang panjangnya tak terhingga.

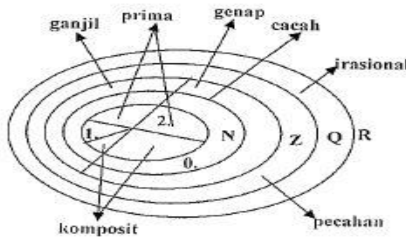


Hubungan keempat himpunan N, Z, Q, dan R dapat dinyatakan dengan:

$$\boxed{N \subset Z \subset Q \subset R}$$

Hubungan bilangan-bilangan di atas jika digambarkan dengan diagram venn sebagai berikut.





Bilangan real ini berbeda dengan bilangan kompleks yang termasuk di dalamnya adalah bilangan imajiner. Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan real memenuhi aksioma medan.

Contoh 1.1

Sederhanakan sesederhana mungkin $3[2-4(7-12)]$

Penyelesaian

$$3[2-4(7-12)]$$
$$=3[2-4(-5)]$$
$$=3[2+20]$$
$$=3[22]$$
$$=66$$

Contoh 1.2

Sederhanakan sesederhana mungkin $-1+\frac{3}{21}-\frac{1}{6}$

Penyelesaian

$$-1+\frac{3}{21}-\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{42}{42}+\frac{6}{42}-\frac{7}{42}$$
$$=\frac{-42+6-7}{42}=-\frac{43}{42}$$

Contoh 1.3

Sederhanakan sesederhana mungkin $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]$

Penyelesaian

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{15}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{15}\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$=-\frac{1}{9}$$

Contoh 1.4

Sederhanakan sesederhana mungkin $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$

Penyelesaian

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$$

$$=\frac{\frac{4}{8}-\frac{6}{8}+\frac{7}{8}}{\frac{4}{8}+\frac{6}{8}-\frac{7}{8}}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}}$$

$$=\frac{40}{24}$$

$$=\frac{5}{3}$$

Contoh 1.5

Sederhanakan sesederhana mungkin $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$

Penyelesaian

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{1-5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$$

$$=\frac{3^{-2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{9}$$

Contoh 1.6

Sederhanakan sesederhana mungkin $\frac{2}{6y-2}+\frac{y}{9y^2-1}-\frac{2y+1}{1+3y}$

Penyelesaian

$$\frac{2}{6y-2}+\frac{y}{9y^2-1}-\frac{2y+1}{1+3y}$$

$$=\frac{2}{2(3y-1)}+\frac{y}{(3y+1)(3y-1)}+\frac{2y+1}{3y-1}$$

$$=\frac{2(3y+1)}{2(3y-1)(3y+1)}+\frac{y}{(3y+1)(3y-1)}+\frac{(2y+1)(3y+1)}{(3y-1)(3y+1)}$$

$$=\frac{(3y+1)+y+6y^2+5y+1}{(3y-1)(3y+1)}$$

$$=\frac{(3y+1)+y+6y^2+5y+1}{(3y-1)(3y+1)}$$

$$=\frac{3+13y-6y^2}{3y^2-1}$$

- **Aksioma Medan / Lapangan Real**

Misalkan x, y dan z merupakan anggota himpunan bilangan riil R, dan operasi $x+y$ merupakan penjumlahan, serta xy merupakan perkalian. Maka:

1. Hukum komutatif:
   $x+y = y+x$, dan $xy = yx$
2. Hukum asosiatif:
   $x+(y+z) = (x+y)+z$ dan $x(yz) = (xy)z$
3. Hukum distributif:
   $x(y+z) = (xy + xz)$
4. *Eksistensi unsur identitas.*
   Terdapat dua bilangan riil berbeda, yang dilambangkan sebagai 0 dan 1, sehingga untuk setiap bilangan riil x kita mendapatkan $0+x=x$ dan $1.x=x$.
5. *Eksistensi negatif, atau invers terhadap penjumlahan.*
   Untuk setiap bilangan riil x, terdapat bilangan riil y sehingga $x+y=0$. Kita dapat juga melambangkan y sebagai-x.
6. *Eksistensi resiprokal, atau invers terhadap perkalian.*
   Untuk setiap bilangan riil tidak sama dengan 0, terdapat bilangan riil y sehingga $xy=1$. Kita dapat melambangkan y sebagai $1/x$.

Urutan pada bilangan real merupakan suatu konsep yang membandingkan di antara bilangan real, sehingga diperoleh suatu bilangan-bilangan real *lebih dari* (>) atau *kurang dari* (<) bilangan real lainnya. Pada bilangan real R jika b terletak disebelah kanan dari a pada garis bilangan, dikatakan b > a , sedangkan sebaliknya dikatakan a < b.

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow (b-a) > 0}$$

Bilangan real bukan nol dibedakan menjadi bilangan real positif dan bilangan real negatif. Selanjutnya akan dibicarakan sifat-sifat urutan sebagai berikut:

- **Sifat-sifat urutan.**

1. *Trikotomi.*
   Jika a dan b adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu diantara berikut berlaku: a < b atau a = b atau a > b
2. *Ketransitifan.*
   Jika a < b dan b < c maka a < c
3. *Penambahan.*
   Jika a < b jika dan hanya jika a + c < b + c
4. Perkalian.
   Jika a < b dan c >0 jika dan hanya jika ac < bc
   Jika a < b dan c >0 jika dan hanya jika ac > bc

Contoh 1.7

Nyatakan apakah terdefinisi atau tidak, jika terdefinisi tentukan nilai dari hasil bagi dua bilangan berikut: 22/0, 0/7, 22/7.

Penyelesaian

$$\frac{22}{0} = tidak\ \ terdefinisi$$

$$\frac{0}{7} = 0\,(terdefinisi)$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ \ \overline{142857}\ \ (terdefinisi)$$

Contoh 1.8

Nyatakan apakah masing-masing yang berikut benar atau salah $22 < 7$ dan $\frac{22}{7} > 3$.

Penyelesaian

Bukti

$22 < 7 \Leftrightarrow (7 - 22) > 0$

$\Leftrightarrow (-15) > 0$

$(-15) > 0$ *adalah pernyataan bernilai Salah*

Sehingga $22 < 7$ (*SALAH*)

$\frac{22}{7} > 3 \Leftrightarrow (\frac{22}{7} - 3) > 0$

$\Leftrightarrow (\frac{22}{7} - \frac{21}{7}) > 0$

$(\frac{1}{7}) > 0$ *adalah pernyataan bernilai Benar*

Sehingga $\frac{22}{7} > 3$ (*BENAR*)

Contoh 1.9

Jika a < b dan b < c maka a < c

Buktikan sifat ketransitifan di atas.

Penyelesaian

$a < b \Leftrightarrow (b - a) > 0$ (*definisi*)

$b < c \Leftrightarrow (c - b) > 0$ (*definisi*)

Disini diperoleh [(b – a) + (b – a)]>0

$\Rightarrow b - a + c - b > 0$

$\Rightarrow -a + c > 0$

$\Rightarrow c - a > 0$ (komutatif)

$\Rightarrow a < c$ (definisi)

Contoh 1.10

Jika a < b maka a+c < b+ c

Buktikan sifat penambahan di atas.

Penyelesaian

$a < b \Leftrightarrow (b - a) > 0$ (*definisi*)

Disini diperoleh [(b – a) + (c – c)]>0

$\Rightarrow b - a + c - c > 0$

$\Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0$

$\Rightarrow a + c < (b + c)$ (definisi)

2. Tugas Kegiatan Belajar 1

Anda pasti masih ingat bagaimana memanipulasi bilangan-bilangan, tetapi tidak ada salahnya untuk mengulang kembali sejenak. Dalam soal-soal 1–20, sederhanakan sesederhana mungkin. Pastikan menghilangkan semua tanda kurung dan mengurangi semua pecahan.

1. $4-2(8-11)+6$
2. $3[2-4(7-12)]$
3. $-4[5(-3+12-4)+2(13-7)]$
4. $5[-1(7+12-16)+4]+2$
5. $\frac{5}{7}-\frac{1}{13}$
6. $\frac{3}{4-7}+\frac{3}{21}-\frac{1}{6}$
7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right]$
8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]$
9. $\frac{14}{21}\left(\frac{2}{5-\frac{1}{3}}\right)^2$
10. $\left(\frac{2}{7}-5\right)/\left(1-\frac{1}{7}\right)$
11. $\dfrac{\frac{11}{7}-\frac{12}{21}}{\frac{11}{7}+\frac{12}{21}}$
12. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}$
13. $1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$
14. $2+\frac{3}{1+\frac{5}{2}}$
15. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$
16. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

17. $3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)$

18. $2\sqrt[3]{4}\left[\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}\right]$

19. $\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\right)^{-2}$

20. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$

Pada latihan aljabar merupakan hal yang baik bagi mahasiswa kalkulus. Dalam soal 21 – 34, lakukan operasi yang diminta dan sederhanakan.

21. $(3x-4)(x+1)$

22. $(2x-3)^2$

23. $(3x-9)(2x+1)$

24. $(4x-11)(3x-7)$

25. $(3t^2-t+1)^2$

26. $(2t+3)^3$

27. $\frac{x^2-4}{x-2}$

28. $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

29. $\frac{t^2-4t-21}{t+3}$

30. $\frac{2x-2x^2}{x^3-2x^2+x}$

31. $\frac{12}{x^2+2x}+\frac{4}{x}+\frac{2}{x+2}$

32. $\frac{2}{6y-2}+\frac{y}{9y^2-1}-\frac{2y+1}{1-3y}$

33. $\dfrac{t^2+t-12}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-6x-7}{8t-t^2-15}$

34. $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}}{\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}}$

Terlebih dahulu nayatakan apakah masing-masing yang berikut benar atau salah selanjutnya tunjukkan pernyataan saudara

35. $-3<-7$

36. $-1>-17$

37. $-3<-\dfrac{22}{7}$

38. $-5>-\sqrt{26}$

39. $\dfrac{6}{7}<\dfrac{34}{39}$

40. $-\dfrac{5}{7}<-\dfrac{44}{59}$

Anggap a > 0, b > 0. Buktikan setiap pernyataan.

41. $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

42. $a<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

Buktikan bahwa rata-rata dua buah bilangan terletak diantara kedua bilangan itu, yakni buktikan bahwa:

43. $a<b \Rightarrow a<\dfrac{a+b}{2}<b$

5. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 1

$$TP=\frac{A}{B}\times 100\ \%$$

Keterangan:
TP=
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke materi kegiatan 2. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 1, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

B. Kegiatan Belajar 2

Pendahuluan

Membahas tentang bilangan tak bisa dilepaskan dari tokoh ternama yaitu Al Khawarizmi. Nama lengkap beliau adalah Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa Al Khawarizmi, lahir di Khawarizm (Kheva, sekarang Usbekistan) sekitar 780 M. Penemu beliau tentang desimal yang paling populer kita dengar sebagai matematikawan Arab Muslim yang mempunyai kontribusi terhadap perkembangan matematika, beliau dikenal sebagai bapak Aljabar, memperkenalkan bilangan nol (0), dan penerjemah karya-karya Yunani kuno. Kisah angka nol Konsep bilangan nol telah berkembang sejak zaman Babilonia dan Yunani kuno, yang pada saat itu diartikan sebagai ketiadaan dari sesuatu. Konsep bilangan nol dan sifat-sifatnya terus berkembang dari waktu ke waktu. Hingga pada abad ke-7, Brahmagupta seorang matematikawan India memperkenalkan beberapa sifat bilangan nol. Ide-ide brilian dari matematikawan India selanjutnya dipelajari oleh matematikawan Muslim dan Arab. Hal ini terjadi pada tahap-tahap awal ketika matematikawan Al-Khawarizmi meneliti sistem perhitungan Hindu (India) yang menggambarkan sistem nilai tempat dari bilangan yang melibatkan bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Al-Khawarizmi adalah yang pertama kali memperkenalkan penggunaan bilangan nol sebagai nilai tempat dalam basis sepuluh. Sistem ini disebut sebagai sistem bilangan desimal.

Sistem bilangan desimal yang disusun dari 10 angka. Dengan menggunakan lambang – lambang tersebut sebagai digit pada sebuah bilangan, kita dapat mengekspresikan suatu kuantitas. kesepuluh lambang tersebut yaitu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Sistem bilangan desimal juga disebut sistem bilangan basis 10 atau radiks 10 karena mempunyai 10 digit. Sistem bilangan ini bersifat alamiah karena pada kenyataannya manusia mempunyai 10 jari. Kata digit itu sendiri diturunkan dari kata bahasa latin *finger*. Misalkan 0,22; 1,41; 0,0000001. Bilangan desimal adalah jenis bilangan berbasis 10 yang umunya dituliskan dengan tanda koma (,). Secara umum, bilangan ini berkaitan erat dengan bilangan pecahan karena ada sebuah materi dimana kita harus mampu mengubah bilangan ini ke dalam bentuk pecahan. Untuk melakukan pembagian bilangan desimal, kita harus dapat merubah bilangan yang akan dihitung ke dalam bentuk pecahan, yang sebaliknya dapat dirubahnya ke dalam bentuk desimal.

Petunjuk Belajar

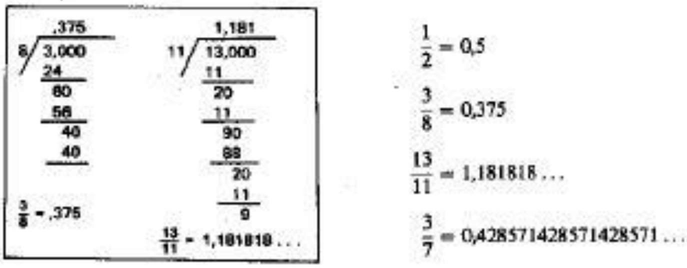
1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip desimal dalam melakukan manipulasi aljabar.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang desimal dalam melakukan manipulasi aljabar.
- **Materi Pokok: Desimal, Bilangan Rasional dan Tak Rasional**

6. Uraian Materi: Desimal, Bilangan Rasional dan Tak Rasional

Pada kegiatan belajar 1 sudah dibahas pengertian bilangan rasional yang merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk a/b dengan a dan b merupakan bilangan bulat serta b $\neq$ 0. Bilangan rasional dapat disebut juga sebagai bilangan pecahan. Dalam bilangan rasional berbentuk a/b, bilangan a melambangkan pembilang dan b merupakan penyebut bilangan rasional. Beberapa contoh bilangan rasional seperti 1/2, 3/8, 13/11, 3/7 dan lainnya. Jika pembilang kita bagi dengan penyebut, kita peroleh suatu desimal berulang, seperti pada gambar berikut:



Jika nilai b = 0 maka suatu bilangan pecahan atau rasional memiliki penyebut 0, seperti 1/0; 2/0; 10/0; dan lainnya, maka bilangan pecahan atau rasional tersebut tidak terdefinisi. Bilangan rasional, merupakan bilangan dengan bentuk desimal yang berhingga.

Selain kelompok bilangan rasional, terdapat kelompok bilangan tak rasional. Dalam bilangan real, bilangan tak rasional merupakan suatu bilangan real yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan a/b. Berbeda dari bilangan rasional, bilangan irasional merupakan bilangan dengan bentuk desimal yang tidak berhingga. Beberapa contoh bilangan irasional yaitu bilangan $\sqrt{2}$, π, dan *e*. Jika dihitung dengan bantuan alat hitung, nilai dari $\sqrt{2}$ yaitu 1,414213562373095048801688724… yang mana bilangan desimal tersebut tidak berulang dan tak hingga banyaknya angka di belakang desimal (koma). Namun, tidak semua bilangan dalam bentuk akar merupakan bilangan irasional. Misalnya $\sqrt{4}$ dan $\sqrt{9}$. Nilai dari $\sqrt{4}$ dan $\sqrt{9}$ yaitu 2 dan 3 yang merupakan bilangan bulat.

Bilangan π. Bilangan π = 3,14 atau π = 22/7 penggunaannya belum tepat karena nilai π yang sebenernya yaitu 3,141592653589793… .Penggunaan nilai π sama dengan 3,14 atau 22/7 merupakan bilangan rasional, sehingga tidak sesuai dengan sifat dari bilangan tak rasional. Bilangan eksponensial (*e*) merupakan konstanta dengan nilai 2,7182818….

Bilangan tak rasional juga tidak dapat diubah ke pecahan biasa , seperti √2, karena hasil dari √2 adalah 1,4142135623… yang desimal dari √2 tidak berhenti di suatu bilangan tertentu dan tidak berpola. Berikut Perkiraan desimal dari akar kuadrat dari beberapa bilangan asli pertama diberikan dalam tabel di bawah ini.

N	√*n*, dipotong menjadi 50 tempat desimal
1	1
2	1.41421356237309504880168872420969807856967187537694
3	1.73205080756887729352744634150587236694280525381038
4	2
5	2.23606797749978969640917366873127623544061835961152
6	2.44948974278317809819728407470589139196594748065667
7	2.64575131106459059050161575363926042571025918308245
8	2.82842712474619009760337744841939615713934375075389
9	3
10	3.16227766016837933199889354443271853371955513932521

Contoh 2.1

Ubah bilangan rasional $\frac{7}{8}$ menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang

Penyelesaian:

```
    0, 875 ...
   ------------
0 | 70
  | 64        _
    60
    56        _
     40
     40       _
      0
```

Contoh 2.2

Ubah bilangan rasional $\frac{11}{3}$ menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang

Penyelesaian:

```
     3, 666 ...
   ____________
3 | 11
    9          _
   ----------
    20
    18         _
   ----------
     20
     18        _
    ---------
      20
      18       _
     --------
       20
       18      _
      -------
       ...
```

Contoh 2.3

Ubah bilangan rasional $\frac{3}{7}$ menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang

Penyelesaian:

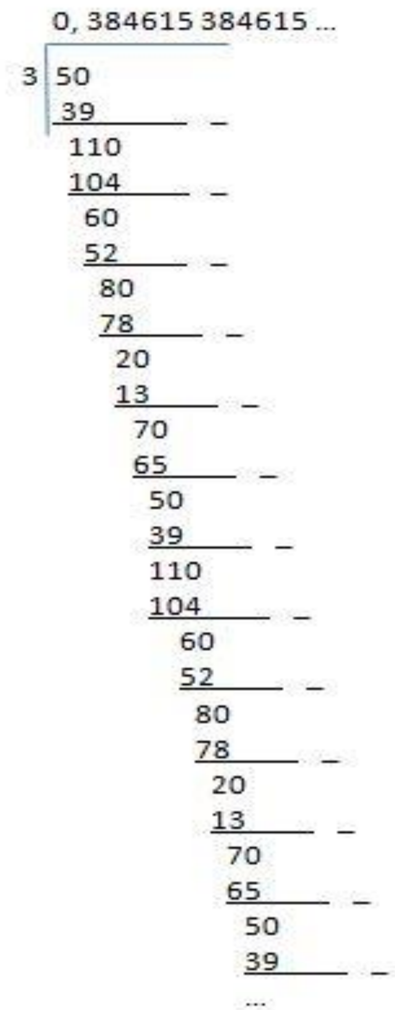
0, 428571 428571 ...

$$
\begin{array}{l}
7 \,|\, 30 \\
\underline{28} \quad - \\
20 \\
\underline{14} \quad - \\
60 \\
\underline{56} \quad - \\
40 \\
\underline{35} \quad - \\
50 \\
\underline{49} \quad - \\
10 \\
\underline{7} \quad - \\
30 \\
\underline{28} \quad - \\
20 \\
\underline{14} \quad - \\
60 \\
\underline{56} \quad - \\
40 \\
\underline{35} \quad - \\
50 \\
\underline{49} \quad - \\
10 \\
\underline{7} \quad - \\
30 \\
\underline{28} \quad - \\
\ldots
\end{array}
$$

Contoh 2.4

Ubah bilangan rasional $\frac{5}{13}$ menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang

Penyelesaian:



Contoh 2.5

Ubah bilangan masing-masing desimal berulang $2{,}56\,56\,\overline{56}$ menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{lrl}
2,565656\ldots & & \\
\text{Misal} & x & = 2,56\,56\,56\ldots \\
\text{maka} & \underline{100x} & \underline{= 256,56\,56\,56\ldots} \; - \\
 & -99x & = -254,000\,000\,000\ldots \\
 & 99x & = 256 \\
 & x & = \dfrac{254}{99}
\end{array}
$$

Contoh 2.6

Ubah bilangan masing-masing desimal berulang $0,123\overline{123}$ menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{lrl}
0,123\,123\,123\ldots & & \\
\text{Misal} & x & = 0,123\,123\,123\ldots \\
\text{maka} & \underline{1000x} & \underline{= 123,123\,123\,123\ldots} \; - \\
 & -999x & = -123,000\,000\,000\ldots \\
 & 999x & = 123 \\
 & x & = \dfrac{123}{999} \\
 & x & = \dfrac{41}{333}
\end{array}
$$

Contoh 2.7

Ubah bilangan masing-masing desimal berulang $2,92\,92\,\overline{92}$ menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
&3,92929292\ldots \\
&\text{Misal} \quad x = 3,929292\ldots \\
&\text{maka} \quad \underline{100x = 392,929292\ldots} \; - \\
&\quad -99x = -381,000\,000\,000\ldots \\
&\quad 99x = 381 \\
&\quad x = \frac{381}{99} \\
&\quad x = \frac{127}{33}
\end{aligned}
$$

Contoh 2.8

Ubah bilangan masing-masing desimal berulang $0{,}399\overline{9}$ menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
&0,399999\ldots \\
&\text{Misal} \quad x = 0,39999999\ldots \\
&\text{maka} \quad 10x = 3,99999999\ldots \\
&\quad \underline{100x = 39,99999999\ldots} \; - \\
&\quad -90x = -36,00000000\ldots \\
&\quad 99x = 36 \\
&\quad x = \frac{36}{90} \\
&\quad x = \frac{6}{15}
\end{aligned}
$$

Contoh 2.9

Ubah bilangan masing-masing desimal berulang $2{,}21717\,\overline{17}$ menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
&0,217171717\ldots \\
&\text{Misal} \quad x = 0,217\,17\,17\,17\ldots \\
&\text{maka} \quad 10x = 2,17\,17\,17\,17\ldots \\
&\quad 1000x = 217,17\,17\,17\,17\ldots \; - \\
&\quad -990x = -215,000\,000\,000\ldots \\
&\quad 990x = 215 \\
&\quad x = \frac{215}{990} \\
&\quad x = \frac{43}{198}
\end{aligned}
$$

Contoh 2.10

Buktikan bahwa adalah $\sqrt{2}$ tak rasional

Penyelesaian:

Pertama, kita misalkan $\sqrt{2}$ = p, sehingga $p^2 = 2$.

Kita akan membuktikan jika $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional dengan cara kontradiksi.

Misal $p = \frac{x}{y}$, dengan pembagi terbesar dari x dan y adalah 1.

Dari persamaan yang sudah kita asumsikan kita mendapatkan $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$.

Sekarang kita operasikan persamaan yang sudah kita asumsikan:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

Kita melihat bahwa ruas kanan $2y^2$ merupakan bilangan genap, maka ruas kiri x^2 juga bilang2an genap. Sehingga x dan $2y$ merupakan bilangan genap.

Kenapa bisa yakin kalau ruas kanan adalah bilangan genap? berikut penjelasannya:

Definisi:

Untuk **n** *bilangan bulat, maka* **2n** *adalah bilangan genap. Dan* **2n+1** *adalah bilangan ganjil.*

Karena x^2 adalah bilangan genap maka x^2 dapat diubah menjadi dengan $x^2 = (2n)^2$ dan n sembarang bilangan bulat. Sekarang kita mempunyai persamaan

$(2n)^2 = 2y^2$

$4n^2 = 2y^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 2y^2$

Terlihat dengan jelas jika y juga merupakan bilangan bulat.

Pernyataan awal kita menyatakan jika $p = \frac{x}{y}$ dengan pebagi terbesar x dan y adalah 1. Akan tetapi kenyataannya $\frac{x}{y}$ akan tetapi, kenyataannya $\frac{x}{y}$ dapat dinyatakan dengan $\frac{2y}{2n}$, arti nya memiliki pembagi terbesar lebih dari 1.

Jadi Asumsi kitaterbantahkan (kontradiksi)

sehingga terbukti merupakan bilangan irasional.

7. Tugas Kegiatan Belajar 2

Dalam soal–soal 1–12, ubah tiap bilangan rasional menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang.

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{2}{7}$
3. $\frac{3}{21}$
4. $\frac{5}{17}$
5. $\frac{11}{3}$

6. $\frac{8}{7}$

7. $\frac{3}{11}$

8. $\frac{3}{7}$

9. $\frac{11}{3}$

10. $\frac{7}{3}$

11. $\frac{13}{5}$

12. $\frac{11}{7}$

Dalam soal-soal 11–22 ubah masing-masing desimal berulang menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat

13. $0,2323232323\ldots$
14. $0,1717171717\ \ldots$
15. $0,234234234\ \ldots$
16. $1,6565656565\ \ldots$
17. $0,117171717\ldots$
18. 2,2360999...
19. $3,\ 292929292\ldots$
20. $3,\ 9292929292\ldots$
21. $0,199999999\ \ldots$
22. $0,399999999\ \ldots$
23. Karena 0,199999... = 0,200000... dan 0,399999... = 0,400000, kita lihat bahwa bilangan rasional tertentu mempunyai dua uraian desimal yang berlainan. Bilangan-bilangan rasional mana yang mempunyai sifat-sifat ini?

24. Tunjukkan bahwa bilangan rasional sebarang p/q, dengan pemfaktoran prima dari q seluruhnya terdiri dari angka 2 dan angka 5, memiliki suatu uraian desimal yang mempunyai akhir.
25. Carilah sebuah bilangan rasional positif dan sebuah bilangan tak rasional positif yang keduanya lebih kecil daripada 0,00001.
26. Berapa bilangan bulat positif terkecil? Bilangan rasional positif terkecil? Bilangan tak rasional positif terkecil.
27. Carilah bilangan tak rasional antara 3,14159 dan π
28. Apakah $\pi - \frac{22}{7}$ positif, negatif, atau nol?
29. Apakah terdapat bilangan antara 0,9999… dengan 1?
30. Carilah bilangan rasional antara $\frac{57}{113}$ dengan $\frac{19}{37}$
31. Apakah 0,1234567891011121314… rasional atau tak rasional ?
32. Carilah dua bilangan tak rasional yang jumlahnya rasional
33. Bilangan prima adalah bilangan asli (bilangan bulat positif) yang hanya mempunyai pembagi dua bilangan asli, bilangan itu sendiri dan 1. Beberapa bilangan prima yang pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Menurut teorema dasar aritmetika, setiap bilangan asli (selain 1) dapat dituliskan sebagai hasil kali suatu himpunan unik bilangan prima. Misalnya, 45 = $3\cdot3\cdot5$. Tuliskan masing-masing yang berikut sebagai suatu hasil kali bilangan –bilangan prima
    a. 243
    b. 127
    c. 5100
    d. 346
34. Gunakan teorema dasar aritmetika untuk menunjukkan bahwa kuadrat sebarang bilangan asli (selain 1) dapat dituliskan sebagai hasil kali suatu himpunan unik bilangan prima, dengan masing-masing bilangan prima ini muncul sebanyak suatu bilangan genap. Misalnya, $(45)^2 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$.
35. Tunjukkan bahwa √3 tak rasional.
36. Buktikan bahwa jumlah dua bilangan rasional adalah rasional.

37. Buktikan bahwa hasil kali sebuah bialngan rasional (selain 0) dengan sebuah bilangan tak rasional adalah tak-rasional.
38. Mana diantara yang berikut rasional dan mana yang tak rasional?
    a. $-\sqrt{9}$
    b. $0{,}375$
    c. $1-\sqrt{2}$
    d. $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$
    e. $\left(3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}\right)$
    f. $5\sqrt{2}$
39. Apakah jumlah dua bilangan tak rasional pasti tak rasional? Jelaskan
40. Tunjukkan bahwa $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ tak rasional.

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kriteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 2

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP=Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke materi kegiatan 3. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 2, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai

C. Kegiatan Belajar 3

Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, sering kita dihadapi pada berbagai permasalahan, misalnya kasus berikut ada dua orang kakak beradik patungan untuk membeli sebuah kado untuk ulang tahun pernikahan orang tua mereka. Uang yang mereka kumpulkan tidak lebih dari Rp. 75.000,00. Jika adiknya membayar Rp. 15.000,00 kurang dari kakaknya atau kasus lain misal sepotong kawat yang panjangnya tidak lebih dari 108 cm. Kawat ini dipakai untuk membuat kerangka suatu balok dengan ukuran rusuknya sebagai berikut: panjang $(2x + 3)$ cm, lebar $(x + 3)$ cm, dan tingginya $(x + 1)$ cm. Tentu saja kasus-kasus tersebut kita akan membutuhkan analisis yang mendalam untuk mendapatkan solusi yang terbaik dari kasus di atas. Kita semua telah menyadari betapa pentingnya suatu konsep ketaksamaan. Demikian pula dalam matematika, kita tidak usah pusing memikirkan hal-hal yang rumit di atas, yang penting kita tahu bagaimana menggunakan suatu konsep yang selanjutnya dapat digunakan untuk menyelidiki kasus-kasus yang kita hadapi.

Selanjutnya pertidaksamaan adalah hubungan matematika yang mengandung tanda salah satu dari $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ dan suatu variabel. Semua himpunan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan dinamakan himpuman penyelesaian. Penyelesaian pertidaksamaaan dapat diperoleh dengan menggunakan sifat- sifat urutan yang telah dibicarakan pada pasal sebelumnya. Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dapat dituliskan dalam bentuk notasi himpunan atau dalam notasi interval. Pertidaksamaan-pertidaksamaan yang akan dibahas adalah pertidaksamaan linear, pertidaksamaan kuadrat, dan pertidaksamaan rasional.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai

Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip ketaksamaan dalam manipulasi aljabar.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang ketaaksamaan dalam melakukan manipulasi aljabar.
- **Materi Pokok:** Ketaksamaan

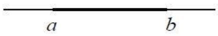
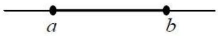
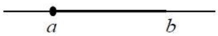
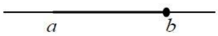
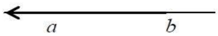
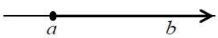
1. Uraian Materi: Ketaksamaan

Sebelum membicarakan pertidaksamaan, terlebih dahulu akan dibahas mengenai pengertian interval yang sangat erat kaitannya dengan penulisan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan.

Suatu interval adalah himpunan bagian tak kososng dari R yang memenuhi ketaksamaan tertentu. Suatu interval terdiri dari interval terbatas dan interval tak terbatas yang didefinisikan sebagai berikut.

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b. Jadi $(a,b) = \{x: a < x < b\}$. Sedangkan interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b. Jadi $[a,b] = \{x: a \leq x \leq b\}$.

Beberapa interval ditunjukkan dalam daftar berikut.

Interval	Himpunan	Garis Bilangan
(a, b)	$\{x: a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x: a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x: a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x: x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x: x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x: x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x: x \geq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	R	

Menyelesaiakan Ketaksamaan

Sama halnya seperti dengan persamaan,prosedur unuk menyelesaikan ketaksamaan terdiri atas pengubahan keaksamaan satu langkah tiap kali sampai himpunan penyelesaian jelas. Alat utamanya adalah sifat-sifat urutan pada sistem bilangan real. Ini berarti bahwa kita dapat melaksanakan operasi-operasi tertentu pada suatu ketaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaiannya. Khususnya:

1. Kita dapat menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas suatu ketaksamaan;
2. Kita dapat mengalikan kedua ruas suatu ketaksamaan dengan suatu bilangan positif
3. Kita dapat mengalikan kedua ruas dengaan suatu bilangan negatif, tetapi kemudian kita harus membalikkan arah tanda ketaksamaan.

Contoh 3. 1

Selesaikan ketaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$ dan perlihatkan grafik himpunan penyelesaiannya

Penyelesaian:

$2x - 7 < 4x - 2$ (tambahkan 7)

$\Leftrightarrow 2x < 4x + 5$ (tambahkan $-4x$)

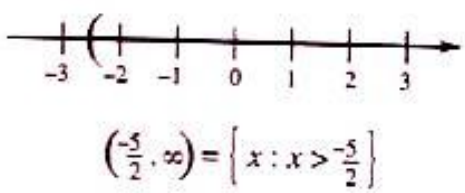
$\Leftrightarrow -2x < 5$ (kalikan dengan $-\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

HP $= (-\frac{5}{2}, \infty)$

$= \{x: x > -\frac{5}{2}\}$

Grafik:



Contoh 3. 2

Selesaikan ketaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$ dan perlihatkan grafik himpunan penyelesaiannya

Penyelesaian:

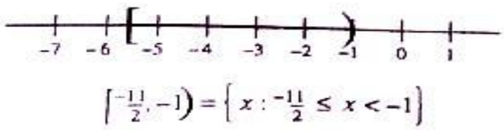
$-5 \leq 2x + 6 < 4$ (tambahkan -6)

$\Leftrightarrow -11 \leq 2x < -2$ (kalikan dengan ½)

$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leq x < -1$

Hp $= [-\frac{11}{2}, -1)$

$= \{x: -\frac{11}{2} \leq x < -1\}$



Grafik:

Sebelum menangani ketaksamaan kuadrat, kita tunjukkan bahwa suatu faktor linear berbentuk x–a adalah positif unuk x>a dan negatif untuk x<a. Ini berarti bahwa hasil kali $(x-a)(x-b)$ dapat berubah dari bernilai positif menjadi negatif, atau sebaliknya, hanya pada a atau b. titik ini, tempat suatu factor adalah nol, disebut titik-titik pemecah. Titk–titik ini merupakan kunci untuk menentukan himpunan penyelesaian dari ketaksamaan kuadrat atau tingkat lebih tinggi.

Contoh 3.3

Selesaikan ketaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$

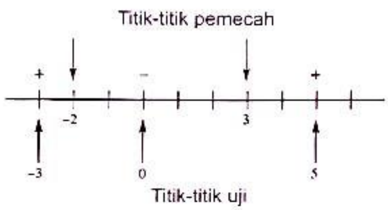
Penyelesaian:

Sebagaaimana dengan persamaan kuadrat, kita pindahkan semua suku bukan nol ke salah satu ruas dan faktorkan.

$x^2 - x < 6$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0$ (tambahkan –6)

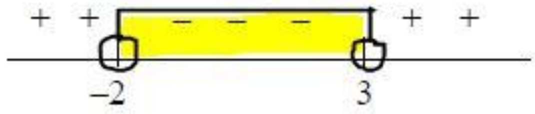
$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$ (faktorkan)



Kita lihat bahwa -2 dan 3 adalah titik-titik pemecah: tiik-titik ini membagi garis real menjadi 3 selang (–∞,–2), (–2,3), dan (3,∞). Pada tiap selang ini, (x–3)(x+2) bertanda tetap, yakni selaku positif atau selalu negatif. Untuk mencari tanda ini dalam seiap selang, kita gunakan titk-titik uji –3, 0, dan 5.

Titik uji	*Nilai dari $(x - 3)(x + 2)$*	*Tanda*
−3	6	(+)
0	−6	(−)
5	14	(+)

Informasi yang telah diperoleh diringkaskan pada bagian atas gambar. Kita simpulkan bahwa himpunan penyelesaian untuk (x-3)(x+2) < 0 adalah selang (-2, 3)



HP = (–2, 3)

$= \{x: -2 < x < 3\}$

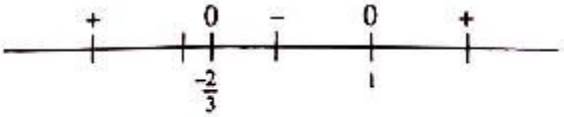
Contoh 3.4

Selesaikan ketaksamaan kuadrat $3x^2 - x - 2 > 0$

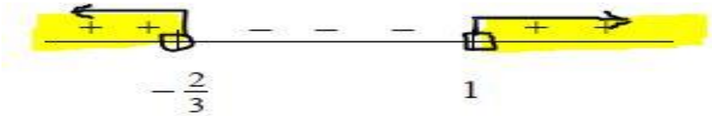
Penyelesaian:

Karena $3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2) = 3(x-1)(x+\frac{2}{3})$

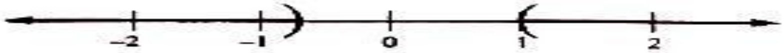
Titik-titik pemecah adalah $-\frac{2}{3}$ dan 1. Titik-titik ini, bersama-sama dengan titik-titik uji -5, 0, 5, memberikan informasi pada gambar berikut:



Kita simpulkan bahwa himpunan ketaksamaan $3x^2 - x - 2 > 0$ adalah titik-titik yang bearada dalam selang $(-\infty, -\frac{2}{3})$ atau $(1, \infty)$, dimana dalam bentuk grafik sebagai berikut:



atau



Sehingga:

HP = $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty)$

$= \{x: x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > 1\}$

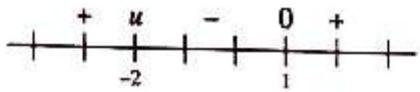
Contoh 3.5

Selesaikan ketaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

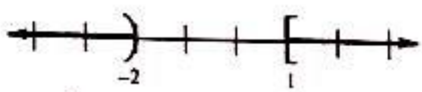
Penyelesaian:

Kecendrungan mengalikan kedua ruas dengan $x + 2$ segera menimbulkan dilemma, karena $x + 2$ mungkin positif atau negatif. Untuk medapatkan titik pemecah dapat kita buat pernyataan sebagai berikut: $\frac{x-1}{x+2} \Rightarrow (x-1)(x+2)$; $x \neq -2$

Titik-titik pemecah adalah 1 dan −2, Titik-titik ini, bersama-sama dengan titik-titik uji -3, 0, 3, memberikan informasi pada gambar berikut:



Kita simpulkan bahwa himpunan ketaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \Rightarrow (x-1)(x+2)$ dengan syarat $x \neq -2$ dalah titik-titik yang berada dalam selang (–∞, −2) atau [1, ∞) , dimana dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Sehingga:

HP = (–∞, −2) ∪ [1, ∞)

= {x: $x < -2$ atau $x \geq 1$}

Contoh 3.6

Selesaikan ketaksamaan $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

Penyelesaian:

Pertama-tama kita lakukan manipulasi terhadap ketaksaam di atas yaitu:

$$\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} - 1 \leq 0$$

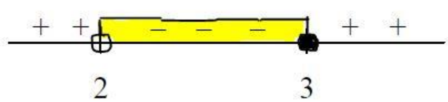
$$\Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

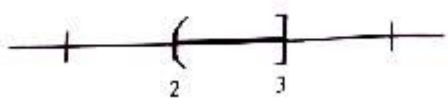
Karena ruas kanan sudah 0 maka akan kita peroleh bentuk kasus seperti contoh sebelumnya. Untuk medapatkan titik pemecah dapat kita buat pernyataan sebagai berikut: $\frac{x-3}{x-2} \Rightarrow (x-3)(x-2)$; $x \neq 2$. Titik-

titik pemecah adalah 2 dan 3, Titik-titik ini, bersama-sama dengan titik-titik uji 1, $\frac{5}{2}$, 4, memberikan informasi pada gambar berikut:

Kita simpulkan bahwa himpunan ketaksamaan $\frac{x-3}{x-2} \Rightarrow (x-3)(x-2)$ dengan syarat $x \neq 2$ dalah titik-titik yang berada dalam selang (2 , 3], dimana dalam bentuk grafik sebagai berikut:



atau



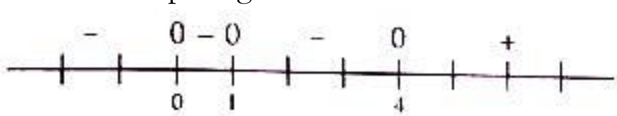
Sehingga:
HP = (2, 3] = $\{x: 2 < x \leq 3\}$

Contoh 3.7

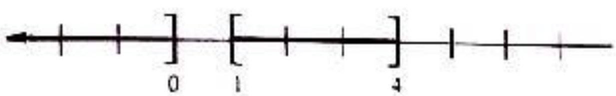
Selesaikan ketaksamaan kuadrat $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$

Penyelesaian:

Karena $3x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4)$. Titik-titik pemecah adalah 0, 1 dan 4. Titik-titik ini, bersama-sama dengan titik-titik uji -5, ½ , 2, 5 memberikan informasi pada gambar berikut:



Kita simpulkan bahwa himpunan ketaksamaan $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$ adalah titik-titik yang bearada dalam selang (–∞, 0] atau [0, 1] atau [1, 4] bila disederhanakan menjadi (–∞, 1] atau [1, 4], dimana dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Sehingga:

HP = (–∞, 1]∪[1, 4]

= $\{x: x < 1$ atau $1 \le x \le 4\}$

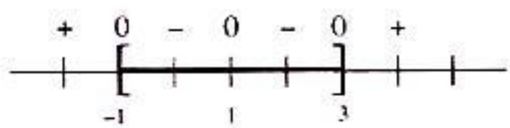
Contoh 3.8

Selesaikan ketaksamaan kuadrat $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x - 3 \le 0$

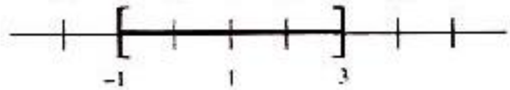
Penyelesaian:

Karena

$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x = 1) = (x+1)(x-3)(x-1)^2$ Titik-titik pemecah adalah –1, 1 dan 3. Titik-titik ini, bersama-sama dengan titik-titik uji -2, 0, 2, 4 memberikan informasi pada gambar berikut:



Kita simpulkan bahwa himpunan ketaksamaan $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x - 3 \le 0$ adalah titik-titik yang bearada dalam selang [–1, 1] atau [1, 3] bila disederhanakan menjadi [–1, 3], dimana dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Sehingga:

HP = [–1, 3]

= $\{x: -1 \le x \le 4\}$

2. Tugas Kegiatan Belajar 3

Dalam soal–soal 1–6, tunjukkan masing-masing selang berikut pada garis real.

41. $[-1,1]$

42. $(-4,1]$

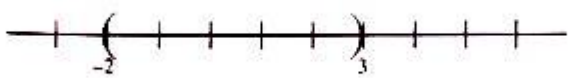
43. $(-4,1)$

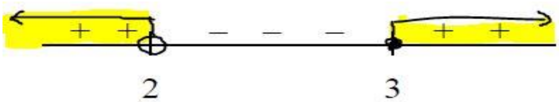
44. $[-1,4]$

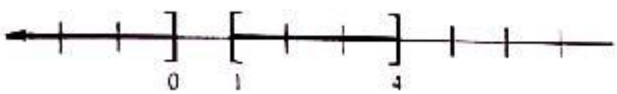
45. $[-1,\infty)$

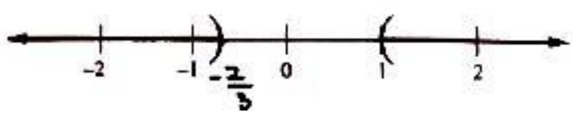
46. $(-\infty,0]$

Dalam soal–soal 7–10, Gunakan cara penulisan soal 1-6 untuk mendeskripsikan selang-selang berikut.

47. 

48. 

49. 

50. 

Dalam soal–soal 11– 41, Nyatakanlah himpunan penyelesaian dari ketaksamaan yang diberikan dalam notasi selang dan sketsakan grafiknya.

51. $x-7<2x-5$

52. $3x-5<4x-6$

53. $7x-2\leq 9x+3$

54. $5x-3>4x-6$

55. $10x+1>8x+5$

56. $-2x+5\geq 4x-3$

57. $-4<3x+2<5$

58. $-3<4x-9<11$

59. $-3<1-6x\leq 4$

60. $4<5-3x<7$

61. $2+3x<5x+1<16$

62. $2x-4\leq 6-7x\leq 3x+6$

63. $x^2 + 2x - 12 < 0$

64. $x^2 - 5x - 6 > 0$

65. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

66. $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$

67. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

68. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

69. $\dfrac{x+4}{x-3} \leq 0$

70. $\dfrac{3x-2}{x-1} \geq 0$

71. $\dfrac{x}{2} < 5$

72. $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

73. $\dfrac{1}{3x-2} \leq 4$

74. $\dfrac{3}{x+5} > 2$

75. $\dfrac{x-2}{x+4} < 2$

76. $\dfrac{2x-1}{x-3} > 1$

77. $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$

78. $(2x+3)(3x-1)(x-2) < 0$

79. $(2x-3)(x-1)^2(x-3) \geq 0$

80. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

81. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

Dalam soal–soal 42 – 44 Carilah semua nilai x yang memenuhi kedua ketaksamaan secara serentak (simultan).

82. $3x + 7 > 1 \; dan \; 2x + 1 < 3$

83. $3x+7>1 \; dan \; 2x+1>-4$

84. $3x+7>1 \; dan \; 2x+1<-4$

Dalam soal–soal 45 – 47 Carilah semua nilai x yang memenuhi paling sedikit satu dari dua ketaksamaan .

85. $2x-7>1, \{4<x\} \; atau \; 2x+1<3$

86. $2x-7\leq 1, \{x\leq 4\} \; atau \; 2x+1<3$

87. $2x-7\leq 1, \{x\leq 4\} \; atau \; 2x+1>3$

Dalam soal–soa 48 – 50 Selesaikan untuk x, nyatakan jawabannya dalam bentuk selang.

88. $(x+1)(x^2+2x-7)\geq x^2-1$

89. $x^4-2x^2\geq 8$

90. $(x^2+1)^2-7(x^2+1)+10<0$

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 3

$$TP=\frac{A}{B}\times 100\ \%$$

Keterangan:

TP=Tingkat Penguasaan

A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan

B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 4. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 3, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai

D. Kegiatan Belajar 4

Pendahuluan

Ketika mempelajari matematika atau bahkan ketika mengajarkan matematika akan ditemukan pihak pihak yang mencari cari alasan untuk tidak berdekatan dengan matematika. Pihak pihak tersebut adalah para kaum sayap kiri dalam dunia matematika. Bisa dipastikan ketika sebuah permasalahan matematika dikatakan adalah sesuatu yang sulit. Berpikiran semacam demikian adalah hal yang tidak tepat. Termasuk berpikir bahwasanya matematika yang dibutuhkan hanya kali, bagi, tambah dan kurang. Sekarang analogi-kan dengan seorang bayi. Seorang bayi tidak tahu apa itu komputer. Makanya jika pembaca memberikan sebuah komputer pada seorang bayi, baginya itu tidak berguna sama sekali. Tapi ketika usia mereka meningkat menjadi anak-anak, mereka tahu bahwasanya komputer tersebut digunakan salah satu-nya untuk bermain. Begitu juga dengan matematika, jika para pelajar matematika mengetahui kegunaan masing masing topik matematika, maka mereka dipastikan akan mengemarinya sebagaimana ilustrasi bayi di atas. Pada kesempatan ini, salah satu kegunaan topik matematika yang akan dibahas mengenai nilai mutlak. Nilai mutlak adalah nilai suatu bilangan atau penyelesaian sebuah persamaan yang dianggap positif semua (absolute). Aplikasi nilai mutlak digunakan dalam menetapkan rentang dari nilai nilai tertentu agar pernyataan yang berkaitan dengan nilai tersebut menjadi logis dan benar. Bentuk aplikasi nilai mutlak ini bisa ditemukan pada produksi sebuah kendaraan.. Aplikasi nilai mutlak yang digunakan dalam pembuatan kendaraan (mobil atau motor) adalah untuk menetapkan penggunaan bahan bakar yang berkaitan dengan jarak tempuh. Apabila disebutkan, sebuah mobil membutuhkan bahan bakar 1 liter untuk setiap jarak tempuh 12 km. Maka ini bukan berarti tepat 12 km untuk 1 liter bahan bakar. Nantinya ada indeks kisaran jarak tempuh dan konsumsi bahan bakar. Kita akan ambil sebuah contoh berikut. Sebuah mobil dengan merk A tertulis angka konsumsi penggunaan bensin yaitu 12 km/L. Indeks kisaran tempuh mobil A adalah 2,8. Jika Ahmad mengedarai mobil tersebut yang bensinnya bersisa 1 liter, maka pada jarak berapa Ahmad setidaknya harus mengisi bensin sebaiknya dan berapa juga jarak tempuh maksimal yang bisa ditempuh Ahmad. Menjawab permasalahan tersebut, hal yang penting dilakukan untuk memulai adalah membuat permodelan matematika. Permodelan ini akan mengambarkan permasalahan dalam bentuk bahasa matematika sehingga lebih mudah di sederhanakan. Permodelan yang akan diperoleh beserta penyelesaiannya adalah dengan menggunakan nilai mutlak. yaitu $|S-12| < 2,8$ (S adalah jarak tempuh, diamana selisish jarak tempuh adalah 12 km/L dengan indeks kisaran 2,8)

$\Leftrightarrow -2,8 < S-12 < 2,8$

$\Leftrightarrow 9,2 < S < 14,8$

Jadi dari penyelesaian di atas bisa dikatakan bensin pada mobil A (dengan bensin 1 L) yang dikendarai Ahmad akan habis pada jarak antar 9,2 km hingga 14,8 km. Agar lebih aman, Ahmad harus melakukan pengisian ulang bahan bakar pada jarak 9,2 km. Sementara itu nasib Ahmad paling baik adalah mobil bisa digunakan untuk menempuh jarak 14,8 km.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip nilai mutlak dalam manipulasi aljabar.

- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang nilai mutlak dalam melakukan manipulasi aljabar.
- **Materi Pokok; N**ilai Mutlak

1. Uraian Materi Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat diperlukan untuk mempelajari kalkulus. Oleh karena pembaca yang ingin memahami betul konsep-konsep dalam kalkulus disarankan mempunyai ketrampilan dalam bekerja menggunakan nilai mutlak.

Nilai mutlak dari bilangan-bilangan real x selalu bernilai tak negatif. Secara geometri nilai mutlak dari bilangan real x dapat diartikan sebagai jarak dari sebarang bilangan real ke 0. Sebagai ilustrasi, perhatikan uraian berikut:

Jarak dari 9 ke 0 adalah 9 – 0 = 9

Jarak dari – 9 ke 0 adalah 0 –(– 9) = 9

Jarak dari 0 ke 0 adalah 0

Jika x > 0 maka jarak x ke 0 adalah x – 0 = x

Jika x < 0 maka jarak x ke 0 adalah 0 – x = – x

Jarak x = 0 maka jarak 0 ke 0 adalah 0

Berdasarkan uraian di atas dapat diberikan definisi sebagai berikut:

Definisi:

Nilai mutlak bilangan real $|x|$, ditulis x didefinisikan dengan:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Misal: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$

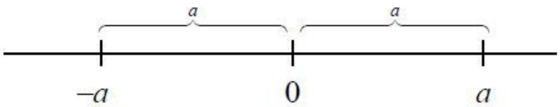
Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

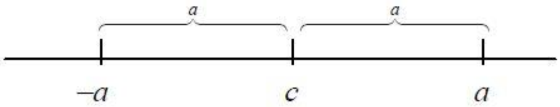
Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak dapat digunakan teorema berikut.

Teorema 1.:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$.

$|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $x<a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a. Sedangkan $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c, sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a.





Berdasarkan definisi nilai mutlak diatas, diperoleh rumus- rumus yang sering dipakai dalam pembahasan selanjutnya. Adapun rumus-rumus tersebut disajikan pada teorema berikut.

Teorema 2. Sifat-sifat Nilai Mutlak

1. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku $|x| = |y|$ *jika dan hanya jika* $x = \pm y$ *dan* $x^2 = y^2$

2. Jika $a \geq 0$, *maka*

a. $|x| \leq a$ *jika dan hanya jika* $-a \leq x \leq a$ *dan* $x^2 \leq a^2$

b. $|x| \geq a$ *jika dan hanya jika* $x \geq a$ *atau* $x \leq -a$, *dan* $x^2 \leq a^2$

3. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

a. $|x + y| \leq |x| + |y|$

b. $|x - y| \leq |x| + |y|$

c. $|x| - |y| \leq |x - y|$

d. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

4. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

a. $|xy| = |x| \cdot |y|$

b. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

Berikut ini diperlihatkan beberapa bukti dari teorema dia atas, sedangkan bukti bagian lainnya dipersilahkan kepada pembaca untuk mecoba sendiri

2a. Akan dibuktikan: $|x| \le a$ jika dan hanya jika $-a \le x \le a$ dengan $a \ge 0$

($\Rightarrow$) karena $|x| \le a \Rightarrow x \le a$ dan $-x \le a$

$\Rightarrow x \le a$ dan $-a \le x$

$\Leftrightarrow -a \le x$ dan $x \le a$

$\Leftrightarrow -a \le x \le a$ ....(1)

($\Leftarrow$) karena $-a \le x \le a \Rightarrow x \le a$ dan $x \le -a$

$\Rightarrow x \le a$ dan $-x \ge -a$

$\Leftrightarrow |x| \le a$ ....(2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa:

$|x| \le a$ *jika dan hanya jika* $-a \le x \le a$ *dan* $x^2 \le a^2$

3a. Untuk setiap x dan y $\in \Re$ berlaku $-|x| \le x \le |x|$ dan $-|y| \le y \le |y|$ akibatnya, diperoleh $-(|x+y|) \le x + y \le |x| + |y|$

Berdasarkan teorema 2a. Diperoleh $|x+y| \le |x| + |y|$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian $|x| < 3$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema 1.1, maka nilai x yang memenuhi $-3 < x < 3$ merupakan penyelesaian pertidaksamaan $|x| < 3$.

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari: $|x - 2| < 3$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema 1.1, maka

$|x - 2| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$

$\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2$

$\Leftrightarrow -1 < x < 5$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$.

Contoh 4.3

Tentukan penyelesaian dari: $|3x - 5| \geq 1$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema 1.2, maka

$|3x - 5| \geq 1$

$\Leftrightarrow 3x - 5 \leq -1$ atau $3x - 5 \geq 1$

$\Leftrightarrow 3x \leq 4$ atau $3x \geq 6$

$\Leftrightarrow x \leq 4/3$ atau $x \geq 2$

Jadi, HP yang memenuhi $x \leq 4/3$ atau $x \geq 2$

Contoh 4.4

Ubah setiap bentuk $|x + 1|$ ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.

Penyelesaian:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, x+1 \geq 0 \\ -x-1, x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$$

Contoh 4.5

Ubah setiap bentuk $|2 - x|$ ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.

Penyelesaian:

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, 2-x \geq 0 \\ -(2-x), 2-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, x \leq 2 \\ x-2, x > 2 \end{cases}$$

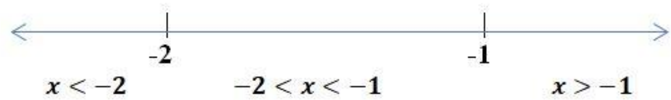
Contoh 4.7

Ubah setiap bentuk $2|x+1| + |x+2|$ ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.

Penyelesaian:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, x+1 \geq 0 \\ -x-1, x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, x+2 \geq 0 \\ -(x+2), x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, x \geq -2 \\ -x-2, x < -2 \end{cases}$$



$$|x+1|+|x+2| = \begin{cases} (x+1)+(x+2), x < -2 \\ (x+1)+(x+2), -2 \leq x < -1 \\ (x+1)+(x+2), x \geq -1 \end{cases}$$

Contoh 4.8

Tentukan penyelesaian dari: $|8 - 3x| \geq |2x|$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema 2.2, maka

$|8 - 3x| \geq |2x|$

$\Rightarrow (8-3x)^2 \geq (2x)^2$

$\Rightarrow 64 - 48x + 9x^2 \geq 4x^2$

$\Rightarrow 5x^2 - 48x + 64 \geq 0$

$\Rightarrow (5x-8)(x-8) \geq 0$

$$x = \frac{8}{5} \quad \cup \quad x = 8$$

Jadi, HP yang memenuhi $x \leq \frac{8}{5}$ atau $x \geq 8$

Contoh 4.9

Tentukan penyelesaian dari: $|x + 1| \geq 2x - 7$.

Penyelesaian:

Pada soal ini tidak berlaku teorema 1 dan teorema 2 yang telah diberikan, untuk itu dapat melakukan manipulasi terdapat definisi yaitu:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, x+1 \geq 0 \\ -x-1, x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ -x-1, x < -1 \end{cases}$$

Untuk kasus $x \geq -1$

$|x + 1| > 2x - 7$

$\Rightarrow x + 1 > 2x - 7$

$\Rightarrow -x > -8$

$\Rightarrow x < 8$

Jadi $HP_1 = [-1, \infty) \cap (-\infty, 8) = [-1, 8)$

Untuk kasus $x < -1$

$|x+1| > 2x - 7$

$\Rightarrow -x - 1 > 2x - 7$

$\Rightarrow -3x > -6$

$\Rightarrow x < 2$

Jadi $HP_2 = (-\infty, -1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1)$

Oleh karena itu, diperoleh:

$HP = HP_1 \cup HP_2$

$= [-1, 8) \cup (-\infty, -1)$

$= (-\infty, 8)$

Contoh 4.10

Tentukan penyelesaian dari: $|x - 2| + 2|x - 1| > 1$.

Penyelesaian:

Pada soal ini tidak berlaku teorema 1 yang telah diberikan, untuk itu dapat melakukan manipulasi terdapat definisi yaitu:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, x-2 \geq 0 \\ -x+2, x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ 2-x, x < 2 \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x+1, x+1 \geq 0 \\ -x+1, x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, x \geq -1 \\ 1-x, x < -1 \end{cases}$$

Karena $|x - 2|$ dan $|x - 1|$ berganti tanda di $x=2$ dan $x=1$, maka garis bilangannya terbagi atas tiga selang bagian yaitu $(-\infty, 1)$; $[1, 2)$ dan $[2, \infty)$

$x > 1$ 1	$1 \leq x < 2$ 2	$x \geq 2$
$\|x-2\| = 2-x$ $2\|x-1\| = 2(1-x)$ $\|x-2\| + 2\|x-1\| > 1$ $\Rightarrow 2-x + 2(1-x) > 1$	$\|x-2\| = 2-x$ $2\|x-1\| = 2(x-1)$ $\|x-2\| + 2\|x-1\| > 1$ $\Rightarrow 2-x + 2(x-1) > 1$	$\|x-2\| = x-2$ $2\|x-1\| = 2(x-1)$ $\|x-2\| + 2\|x-1\| > 1$ $\Rightarrow x-2 + 2(x-1) > 1$

$\Rightarrow -3x + 4 > 1$	$\Rightarrow -x+2+2x-2 > 1$	$\Rightarrow x-2+2x-2 > 1$
$\Rightarrow -3x > -3$	$\Rightarrow x > 1$	$\Rightarrow 3x-4 > 1$
$\Rightarrow x < 1$	Jadi HP_2	$\Rightarrow x > 5/3$
Jadi HP_1	$=[1, 2) \cap (1, \infty)$	Jadi HP_2
$=(-\infty, -1) \cap (-\infty, 1)$	$=(1, 2)$	$=[2, \infty) \cap (5/3, \infty)$
$=(-\infty, -1)$		$=[2, \infty)$

Jadi HP= HP = $HP_1 \cup HP_2 \cup HP_3$

$$HP= (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup [2, \infty) = (-\infty, \infty) - \{1\} = R-\{1\}$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 4

Pada soal no 1 – 5, ubah setiap bentuk nilai mutlak yang diberikan ke dalam bentuk yang tidak memuat nilai mutlak.

8. $|x + 2| + |x - 1|$
9. $3|2-x| + |x + 2|$
10. $|x - 2| + 3|x + 2$
11. $|2x - 2| + 2|x|$
12. $3|2x - 1| + 2|x - 1|$

Pada soal no 6 – 25, tentukan penyelesaian dari nilai mutlak berikut:

13. $|x + 2| < 1$
14. $|2- x| > 2$
15. $|x - 2| \geq 5$
16. $|2x - 2| \geq ½$
17. $|2x - 1| > 2$
18. $|x - ¼| > 1$
19. $|4x + 5| \leq 10$
20. $|5-4x| \geq 5$
21. $|¼ x + 1| < 1$
22. $|1 - ¼ x| > 4$
23. $|\frac{2x}{7} - 5| \geq 7$
24. $|5 - \frac{2x}{7}| \leq 7$
25. $|5 - ¼ x| > 2$
26. $|2x - 7| > 3$
27. $|x - \frac{1}{7}| \leq 1$
28. $|5x - 6| > 1$
29. $|x - ½| > ¼$

30. $|4x + 2| \geq 10$
31. $|2 - \frac{1}{2}x| \leq 5$
32. $|\frac{1}{2}x + 7| \geq 2$
Pada soal no 26 – 35, tentukan penyelesaian dari nilai mutlak berikut:
33. $|x - 1| \geq 3x - 2$
34. $|2x + 1| \leq x - 7$
35. $|5 - 4x| \geq x + 1$
36. $|2x + 3| \leq |x - 3|$
37. $|3x - 2| \geq 2|x - 1|$
38. $x|x| < x - 2$
39. $(2x - 5)^2 - 3|2x - 5| > 10$
40. $(3x + 2)^2 - 6|3x + 2| + 8 \leq 0$
41. $|x + 2| + |x - 1| \geq 1$
42. $3|x| + 2|x - 1| \leq 7$

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 4

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\,\%$$

Keterangan:
TP=
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 5. Namun jika penguasaan

Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 4, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai

4. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

5. Bacaan Yang Dianjurkan

Endang Dedi, 2005. Kalkulus I. Universitas Negeri Malang. Malang: UM Press.

BAB II

FUNGSI, LIMIT DAN KEKONTINUAN

Pendahuluan

Konsep fungsi sangat berperan dalam kalkulus. Semua topik dalam kalkulus baik dalam membicarakan limit, turunan, maupun dalam integral selalu melibatkan suatu fungsi. Oleh karena itu, pemahaman akan konsep fungsi seperti daerah asal, daerah hasil, operasi-operasi pada fungsi komposisi fungsi sangan diperlukan sekali. Pembahasan konsep fungsi akan disajikan fungsi sebagai pemetaan.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini Mahasiswa dapat menggunakan konsep dasar matematika dalam menyelesaikan maslah fungsi
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa membuat grafik persamaan, menjelaskan arti fungsi, menentukan daerah definisi fungsi, dan menggambarkan grafik fungsi.
- **Materi Pokok:** Fungsi dan grafiknya, Fungsi trigonometri

A. Kegiatan Belajar 5

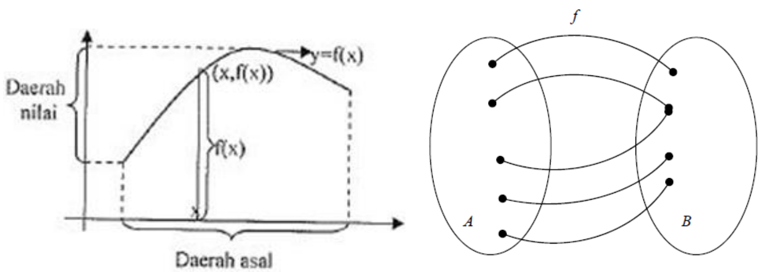
1. **Uraian materi: Fungsi dan grafiknya**

- **Fungsi**

  Definisi

  Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B.

A disebut **domain** (daerah asal) fungsi f dan B disebut **kodomain** (daerah kawan). Sedangkan himpunan semua anggota B yang mempunyai pasangan disebut **range** (daerah nilai/daerah hasil).



Gambar Fungsi

Definisi di atas tidak memberikan pembatasan pada domain dan kodomain. Domain dapat berupa himpunan yang beranggotakan orang atau yang lain, demikian pula kodomain. Dalam uraian selanjutnya domain dan kodomain dibatasi pada himpunan-himpunan bilangan real. Untuk memberi nama fungsi digunakan huruf tunggal seperti f (atau g, atau F), maka $f(x)$ menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x.

Jika $f(x) = x^3 - 4$, maka

$f(2) = 2^3 - 4 = 4$

$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$

$f(a) = a^3 - 4$

$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$

Contoh 5.1

Untuk $f(x) = x^2 - 2x$, carilah dan sederhanakan:

a. $f(4)$

b. $f(4 + h)$

c. $f(4 + h) - f(4)$

d. $[f(4 + h) - f(4)]/h$ dengan $h \neq 0$.

Penyelesaian:

a. $f(4) = 4^2 - 2(4) = 8$

b. $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 8 + 6\,h + h^2$
c. $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6\,h + h^2 - 8 = 6\,h + h^2$
d. $[f(4 + h) - f(4)]/\text{h} = [6\,h + h^2]/h = 6 + h$

Contoh 5.2

Untuk $f(x) = x^2 + 1$ dengan daerah asal atau $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, carilah daerah hasil fungsi f.

Penyelesaian:

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$
$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$
$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$
$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$
$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$
daerah hasil fungsi $R_f = \{1, 2, 5, 10\}$

Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, maka dianggap daerah asal fungsi tersebut adalah himpunan bilangan real sehingga aturan fungsinya bermakna dan memberikan nilai bilangan real.

Contoh 5.3

a. Daerah asal untuk fungsi $f(x) = 1/(x - 3)$ adalah $\{x \in R \mid x \neq 3\}$.
b. Daerah asal untuk fungsi $g(t) = 9 - t^2$ adalah [-3, 3].

Apabila daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat, dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

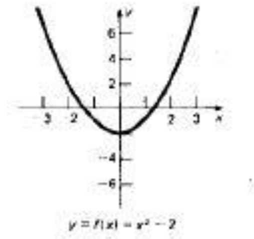
Contoh 5.4

Diketahui:
(a) $f(x) = x^2 - 2$
(b) $g(x) = x^3 - 2\text{x}$
(c) $h(x) = 2/(1-x)$

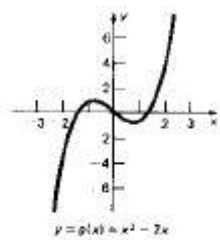
Tentukan domain dan range serta sketsa grafik, dari fungsi-fungsi $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

Penyelesaian:

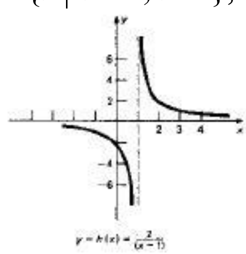
(a) $f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, \infty)$ dan $R_f = \{x \mid x \geq -2\}$



(b) $g(x) = x^3 - 2x \Rightarrow D_g = (-\infty, \infty)$ dan $R_g = (-\infty, \infty)$

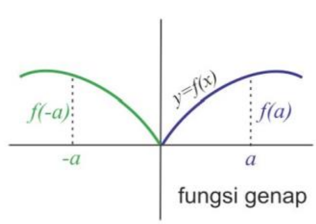


(c) $h(x) = 2/(1-x) \Rightarrow D_h = \{x \mid x \in R, x \neq 1\}$; $R_h = \{y \mid y \in R, x \neq 0\}$

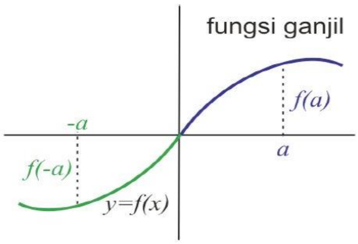


- **Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil**

Fungsi f disebut **fungsi genap** bila memenuhi $f(-a) = f(a)$. Grafik dari fungsi genap simetri terhadap sumbu-y



Fungsi f disebut **fungsi ganjil** bila memenuhi $f(-a) = -f(a)$. Grafiknya simetri terhadap titik asal (titik pusat koordinat).



- **Operasi pada Fungsi**

Jika f dan g dua fungsi maka jumlah $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali $f.g$, hasil bagi f/g dan perpangkatan f^n adalah fungsi-fungsi dengan daerah asal berupa irisan dari daerah asal f dan daerah asal g, dan dirumuskan sebagai berikut.

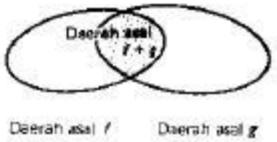
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f.g)(x) = f(x)\, g(x)$

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, asalkan $g(x) \neq 0$

Kita dapat membuat fungsi baru dari operasi dua fungsi, dimana daerah asal dari operasi $f * g$ adalah irisan dari daerah asal f dan g



Contoh 5.5

Jika $f(x) = ½ (x - 3)$ dan $g(x) = \sqrt{x}$, maka tentukan $f + g$, $f - g$, $f.g$, f/g dan f^3.

Penyelesaian:

Jika $D_f = (-\infty, \infty)$ dan $D_g = [0, \infty)$ maka $D_f \cap D_g = [0, \infty)$

sehingga

$f(x) + g(x) = ½ (x - 3) + \sqrt{x} \Rightarrow D_{f+g} = [0, \infty)$

$f(x) - g(x) = ½ (x - 3) - \sqrt{x} \Rightarrow D_{f-g} = [0, \infty)$

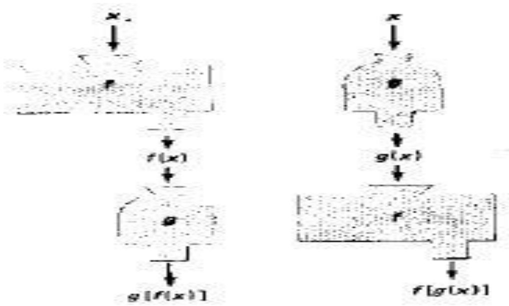
$f(x).g(x) = [½ (x - 3)][\sqrt{x}] \Rightarrow D_{f.g} = [0, \infty)$

$f(x) / g(x) = [½ (x - 3)]/[\sqrt{x}] \Rightarrow D_{f/g} = [0, \infty)$

$f(x)^3 = [½ (x - 3)]^3 \Rightarrow D_{f^3} = (-\infty, \infty)$

- **Komposisi Fungsi**

Pada bagian ini, Anda diminta untuk membayangkan sebuah fungsi sebagai sebuah mesin. Fungsi ini menerima x masukan, bekerja pada x, dan menghasilkan $f(x)$ sebagai keluaran. Dua mesin seringkali dapat diletakkan berdampingan untuk membuat sebuah mesin yang lebih rumit; demikian juga halnya dengan dua fungsi f dan g (seperti pada gambar di bawah). Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan $f(x)$ dan g kemudian bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$.



Selanjutnya didefinisikan komposisi fungsi sebagai berikut. Jika f dan g dua fungsi dengan daerah asal g merupakan daerah hasil f maka komposisi g o f dan komposisi f o g

$$\boxed{\begin{array}{l}(g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ (f \circ g)(x) = f(g(x))\end{array}}$$

Contoh 5. 6

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(g \circ f)(x) = g(x^2 - 2x)$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x - 1$
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$(f \circ g)(x) = f(x - 1)$
$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$
$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 5. 7

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$
$(g \circ f)(x) = g\,(x^2 - 2x)$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x - 1$
$(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$
$(f \circ g)(x) = f\,(x - 1)$
$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)$
$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$
$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 5. 8

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$
$(g \circ f)(x) = g\,(x^2 - 2x)$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x - 1$
$(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$
$(f \circ g)(x) = f\,(x - 1)$
$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)$
$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$
$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 5. 9

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$
$(g \circ f)(x) = g\,(x^2 - 2x)$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x - 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(x - 1)$

$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 5. 10

Jika $f(x) = x^2 - 2x$ dan $g(x) = x - 1$, tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$. Selanjutnya gambarlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(x) = g(x^2 - 2x)$

$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x - 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(f \circ g)(x) = f(x - 1)$

$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 - 2(x - 1)$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$

$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$

2. Tugas Kegiatan Belajar 5

1. Untuk $f(x) = 1 - x^2$, hitung masing-masing nilai:
   a. $f(1)$
   b. $f(-2)$
   c. $f(0)$
   d. $f(k)$
   e. $f(-5)$
   f. $f(1/4)$
   g. $f(3t)$
   h. $f(2x)$
   i. $f(\frac{1}{t})$
2. Untuk $g(x) = x^2 + 3x$, hitung masing-masing nilai:
   a. $g(1)$
   b. $g(\sqrt{2})$
   c. $g(1/4)$
   d. $g(\pi)$

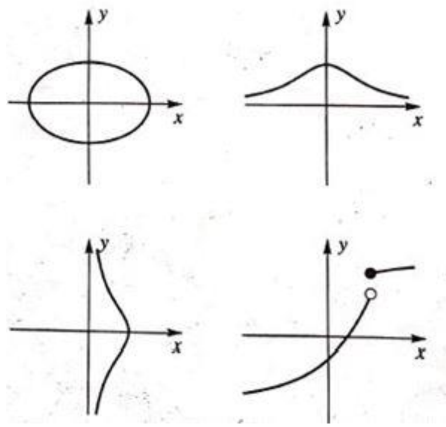
e. $g(\frac{1}{t})$
f. $g(2.718)$

3. Untuk $h(x) = 1/(x-1)$ hitung masing-masing nilai:
a. $h(0)$
b. $h(0{,}999)$
c. $h(1{,}01)$
d. $h(y^2)$
e. $h(-x)$
f. $h(\frac{1}{x^2})$

4. Untuk $l(x) = \dfrac{x + x^2}{\sqrt{x}}$, hitung masing-masing nilai:
a. $l(1)$
b. $l(½)$
c. $l(-x)$
d. $l(x-1)$
e. $l(x^2)$
f. $l(x^2 + x)$

5. Mana dari yang berikut menentukan suatu fungsi f debgan rumus y = f(x)? Untuk demikian, cari f(x).
petunjuk:selesaikan untuk y dalam bentuk x, dan perhatikan bahwa definisi fungsi mensyaratkan suatu y tunggal tiap x.
a. $x^2 + y^2 = 1$
b. $xy + y + x = 1$
c. $x = \sqrt{(2y} + 1$
d. $x = \dfrac{y}{y+1}$

6. Mana dari grafik – grafik dalam gambar 11 yang merupakan grafik fungsi – fungsi dengan rumus berbentuk y = f (x)? (Apakah terdapat y tunggal untuk masing – masing x?)



7. Cari daerah asal alami masing-masing fungsi berikut ini,
   a. $F(z) = \sqrt{2z = 3}$
   b. $g(x) = \sqrt{x^2} - 9$
   c. $g(v) = \dfrac{1}{(4v-1)}$
   d. $H(y) = -\sqrt{625 - y^2}$
8. Cari daerah asal alami dalam masing-masing kasus berikut ini
   a. $F(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$
   b. $G(u) = |2u + 3|$
   c. $F(t) = t^{2/3} - 4$
   d. $G(y) = \sqrt{(y+1)^{-1}}$
9. Untuk $f(x) = x+1$ dan $g(x) = x^2$, carilah tiap nilai (jika mungkin):
   a. $(f+g)(2)$
   b. $(f \cdot g)\,(0)$
   c. $(g\,/\,f)(3)$
   d. $(f \circ g)\,(1)$
   e. $(g \circ f)\,(1)$
   f. $(g \circ f)\,(-8)$

10. Untuk $f(x) = x^2+x$ dan $g(x) = 2/(x+3)$, carilah tiap nilai (jika mungkin):

a. $(f - g)(2)$
b. $(f \circ g)(1)$
c. $(f / g)(1)$
d. $(g \circ f)(1)$
e. $g^3(3)$
f. $(g \circ g)(3)$

11. Untuk $f(x) = x^3+1$ dan $g(x) = 1/x$, carilah tiap nilai (jika mungkin):

a. $(f + g)(t)$
b. $(f \circ g)(t)$
c. $(f / g)(1)$
d. $(g \circ f)(t)$
e. $g^3(t)$
f. $((f - g) \circ g)(t)$

12. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x}$, cari rumus-rumus untuk yang berikut dan nayatakan daerah asalnya.

a. $(f \cdot g)(x)$
b. $(f \circ g)(x)$
c. $f^4(x)+g^4(x)$
d. $(g \circ f)(-x)$

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 5

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:

TP=

A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan

B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 6. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 5, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

B. Kegiatan Belajar 6

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip fungsi trigonometri.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang fungsi trigonometri.
- **Materi Pokok:** Fungsi trigonometri.

1. **Uraian Materi: Fungsi Trigonometri**

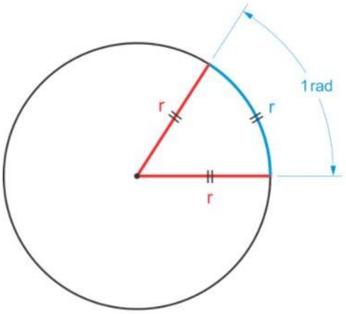
Fungsi trigonometri yang akan dibahas pada bagian ini Secara umum, ada dua satuan yang digunakan dalam pengukuran sudut, yaitu derajat (°) dan radian (rad). Adapun hubungan antara keduanya adalah sebagai berikut:

$$1\text{rad} = 57{,}2958...\ ^\circ$$
$$1^\circ = 0{,}0174...\text{rad}$$

Pertanyaannya adalah dari mana angka-angka tersebut didapatkan. Untuk menjawab pertanyaan ini, kita dapat memulai dari definisi berikut:

Definisi:

Satu radian didefinisikan sebagai besar sudut pusat yang panjang busurnya sama dengan jari-jari.



Untuk menemukan hubungan radian dan derajat, kita dapat menggunakan konsep perbandingan sudut pusat dan panjang busur.

$$\frac{sudut\ pusat}{360^0} = \frac{panjang\ busur}{keliling}$$

Sudut Pusat = 1rad
Panjang busur = r
Keliling = 2πr
Dengan menggunakan perbandingan diatas

$$\frac{1rad}{360^0} = \frac{r}{2\pi r}$$

Jika disederhanakan akan diperoleh persamaan

$$\pi\ rad = 360^0$$

Jika kedua ruas pada persamaan diatas dibagi π, akan diperoleh

$$1rad = \frac{360^0}{\pi} \approx 57{,}29^0$$

dan jika kedua ruas dibagi 180, akan diperoleh

$1^0 = \frac{\pi}{180} rad \approx 0{,}02^0$ dan $180^0 = \pi$ rad ≈3,1415927 rad

Jika ingin mengubah dari derajat ke radian dapat menggunakan formulasi berikut:

$$x^0 = x^0 \cdot \frac{\pi}{180^0}$$

Contoh 6.1

Konversi 30^0 kedalam radian (gunakan π dalam jawaban Anda)

Penyelesaian:

$$30^0 = 30^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{\pi}{6}$$

Contoh 6.2

Konversi 270^0 kedalam radian (gunakan π dalam jawaban Anda)

Penyelesaian:

$$270^0 = 270^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = \frac{3\pi}{2}$$

Contoh 6.3

Konversi -30^0 kedalam radian (gunakan π dalam jawaban Anda)

Penyelesaian:

$$-45^0 = -45^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = -\frac{\pi}{4}$$

Contoh 6.4

Konversi -225^0 kedalam radian (gunakan π dalam jawaban Anda)

Penyelesaian:

$$-225^0 = -225^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = -\frac{5\pi}{4}$$

Jika ingin mengubah dari radian ke derajat dapat menggunakan formulasi berikut:

$$x \cdot rad = x \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

Contoh 6.5

Konversi $\frac{1}{6}\pi$ ke dalam derajat

Penyelesaian:

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 30^0$$

Contoh 6.6

Konversi $\frac{3}{5}\pi$ ke dalam derajat

Penyelesaian:

$$\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 108^0$$

Contoh 6.7

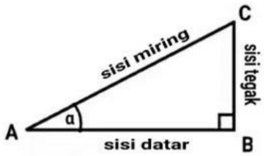
Konversi 4π ke dalam derajat

Penyelesaian:

$$4\pi = 4\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 720^0$$

Definisi:

Pengertian Sinus dan Kosinus



Sinus atau biasa disingkat **sin** adalah perbandingan atau hasil bagi antara sisi tegak dan sisi miring pada sebuah segitiga siku-siku. Sedangkan Cosinus atau **cos** merupakan perbandingan atau hasil bagi antara sisi datar dengan sisi miring pada sebuah segitiga siku-siku

Definisi:

Nilai Tangen, Kotangen, Sekan dan Kosekan

Tangen biasa disingkat $\mathbf{tan}\ t = \frac{\mathbf{sin}\, t}{\mathbf{cos}\, t}$

Kotangen biasa disingkat $\mathbf{tan}\ t = \frac{\mathbf{cos}\, t}{\mathbf{sin}\, t}$

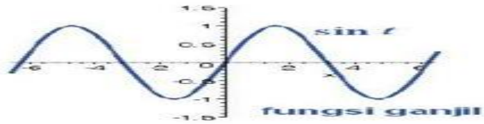
Sekan biasa disingkat $\mathbf{sec}\, t = \frac{1}{\mathbf{cos}\, t}$

Kosekan biasa disingkat $\mathbf{csc}\ t = \frac{1}{\mathbf{sin}\, t}$

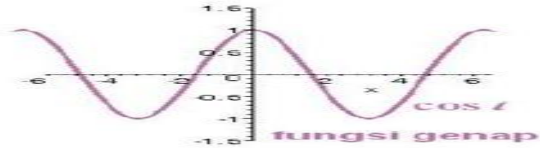
Persamaan Trigonometri

a. Persamaan ganjil-genap

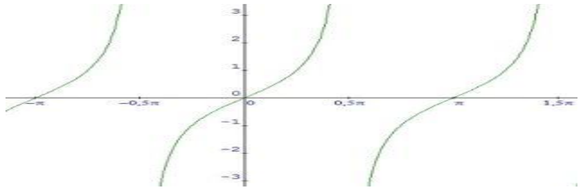
• $\sin(-t) = -\sin t$



• $\cos(-t) = \cos t$



• $\tan(-t) = -\tan t$



Contoh 6.8

Hitung tanpa menggunakan kalkulator:

a. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

b. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Penyelesaian:

a. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

c. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

b. Persamaan Pytagoras

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

c. Persamaan Penambahan

- $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\tan (x + y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x \tan y)$
- $\tan (x - y) = (\tan x - \tan y)/(1 + \tan x \tan y)$

d. Persamaan Sudut Ganda

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

e. Persamaan Setengah Sudut

- $\sin^2 x = ½ - ½ \cos(2x)$
- $\cos^2 x = ½ + ½ \cos (2x)$

f. Persamaan Jumlah

- $\sin x + \sin y = 2 \sin[(x+y)/2] \cos[(x-y)/2]$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos[(x+y)/2] \sin[(x-y)/2]$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos[(x+y)/2] \cos[(x-y)/2]$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin[(x+y)/2] \sin[(x-y)/2]$

g. Persamaan Hasil kali

- $\sin x \sin y = - ½ [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
- $\cos x \cos y = ½ [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \cos y = ½ [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x \sin y = ½ [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

Contoh 6.9

Periksa kesamaan berikut $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$

Penyelesaian

$$1+\tan^2 t = 1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

Contoh 6.10

Periksa kesamaan berikut $1+\cot^2 t = \csc^2 t$

Penyelesaian

$$1+\cot^2 t = 1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} = \csc^2 t$$

2. **Tugas Kegiatan Belajar 6**

Pada soal 1 – 9 berikut, konversi yang berikut kedalam radian (gunakan π dalam jawaban Anda)

1. 30^0
2. 45^0
3. -60^0
4. 240^0
5. -370^0
6. 10^0
7. $22\frac{1}{2}^0$
8. 600^0
9. -120^0

Pada soal 10 – 18 berikut, konversi yang radian menjadi derajat

10. $\frac{7}{6}\pi$
11. $\frac{3}{4}\pi$
12. $-\frac{1}{3}\pi$
13. $\frac{4}{3}\pi$
14. $-\frac{35}{18}\pi$
15. $\frac{3}{18}\pi$

16. $\frac{9}{8}\pi$

17. $\frac{10}{3}\pi$

18. $-\frac{4}{3}\pi$

Pada soal 19 – 24, Hitung tanpa menggunakan kalkulator:

19. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

20. $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$

21. $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$

22. $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$

23. $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

24. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Pada soal 25 – 40 berikut, konversi yang radian menjadi derajat

25. $(1+\sin x)(1-\sin x)=\frac{1}{\sec^2 x}$

26. $(\sec x-1)(\sec x+1)=\tan^2 x$

27. $\sec x \; -\sin x\tan x=\cos x$

28. $\frac{\sec^2 x-1}{\sec^2}=\sin^2 x$

29. $\cos x(\tan x+\cot x)=\csc x$

30. $\sin^2 x+\frac{1}{\sec^2 x}=1$

31. $\frac{1+\tan^2 t}{\sec^2 t}=1$

32. $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$

33. $\sin 4x = 8\sin x\cos^3 x - 4\sin x\cos x$

34. $(\cos t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

35. $\sin t(\tan t - \cot t) = -\sin t\dfrac{2\cos^2 t - 1}{\cos t\sin t}$

36. $\dfrac{\sin u}{\csc u} + \dfrac{\cos u}{\sec u} = 1$

37. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

38. $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$

39. $\dfrac{1 - \csc^2 x}{\csc^2 x} = \dfrac{-1}{\sec^2 x}$

40. $\dfrac{1}{\sin x\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan x$

3. **Penilaian**

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 6

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 7. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 6, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

C. Kegiatan Belajar 7

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip limit.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang limit.
- **Materi Pokok:** Pendahluan Limit

1. Uraian Materi: Pendahluan Limit

Di dalam kehidupan sehari-hari tentu sudah tidak asing lagi menggunakan atau mendengar istilah limit, nyaris, mendekati, atau hampir. Sebagai contoh dapat disimak beberapa pernyataan seperti berikut ini.

Karena pekerjaan terlalu banyak, hampir saja saya terlambat mengantar anak ke sekolah, atau limit waktu laporan LBKD, atau seorang buronan nyaris tertembak oleh seorang polisi, dan sebagainya.

Contoh pemakaian istilah-istilah tersebut tentunya sangat membantu untuk memahami pengertian limit yang sesungguhnya dalam kalkulus. Perkataan limit berarti mendekati, seperti “Saya sudah menahan sampai mendekati batas kesabaran saya,” atau “Janganlah kamu mendekati zina”.

Untuk memahami pengertian limit secara intuisi, diberikan fungsi berikut:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

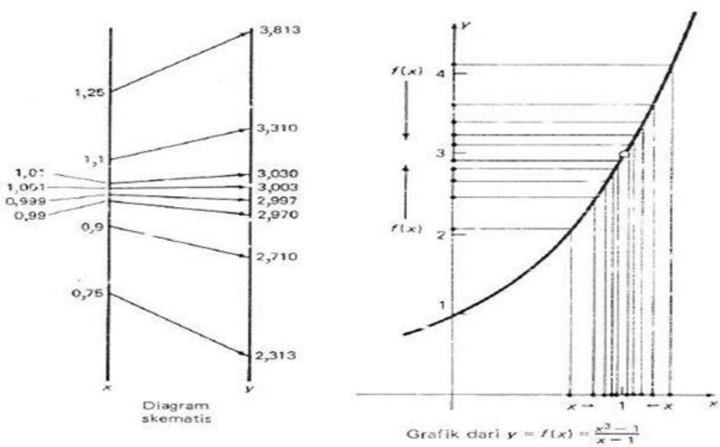
Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi di x=1 sebab dititik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$ yang tanpa arti. Tetapi kita masih dapat diselidiki mengenai nilai $f(x)$ di titik-titik yang dekat dengan 1 (x mendekati 1). Kita dapat menunjukkan nilai-nilai dalam sebuah table.

x	$y = f(x)$
1.25	3.813
1.1	3.310
1.01	3.030
1.001	3.003
↓	↓
1	?
↑	↑
0.999	2.997
0.99	2.970
0.9	2.710
0.75	2.313

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

(ini dibaca "limit (x^3 – 1)/ (x – 1) untuk x mendekati 1 adalah 3)

Dengan menguraikan operasi aljabar, maka dapat menyajikan fakta-fakta yang lebih banyak dan lebih baik. Perhatikan nilai $f(x)$ untuk beberapa x seperti terlihat pada diagram skematis dan grafik $y = f(x)$ yang disajikan pada gambar berikut:



Berdasarkan informasi pada tabel dia atas, diagram skematis dan pada grafik menunjukkan bahwa $f(x)$ mendekati 3 apabila x mendekati 1. Secara matematis hal tersebut dituliskan dengan

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1+3$$

Perhatikan bahwa $(x-1)/(x-1)=1$ selama $x\neq 1$. Ini membenarkan langkah yang kedua. Langkah ketiga seharusnya Nampak wajar; pembenaran yang cermat akan dibahas pada materi berikutnya.

Agar yakin kita berada pada jalur yang benar, kita perlu mempunyai pengertian yang jelas tenteng arti perkataan limit. Berikut upaya kita yang pertama pada sebuah definisi.

Definisi

(Pengertian limit secara intuisi). Mengatakan bahwa $\lim_{x\to c} f(x)=L$

berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$dekat dengan L.

di c. fungsi f bahkan tidak perlu didefinisikan di c, juga tidak dalam contoh $f(x)=(x^3-1)/(x-1)$ yang baru saja ditinjau. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi dekat c, bukan di c.

Pembaca yang kritis pasti menentang penggunaan perkataan dekat. Apa sebenarnya makna dekat? Untuk mendapatkan jawaban yang tepat, beberapa contoh lebih lanjut akan membantu memperjelas pemikiran tersebut.

Contoh 7.1

Cari limit berikut dengan pemeriksaan dimana $\lim_{x\to 3}(4x-5)$

Penyelesaian

Bilamana x dekat 3; maka $4x$–5 dekat terhadap 4 (3) – 5 =7.

Sehingga dapat kita tuliskan bahwa:

$$\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$$

Contoh 7.2.

Cari limit berikut dengan pemeriksaan dimana $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ tidak terdefinisi di $x = 3$, tetapi itu tidak apa-apa. Untuk mendapatkan gagasan tenteng apa yang terjadi bilamana x mendekati 3 kita dapat menggunakan aljabar untuk menyederhanakan persoalan.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+2) = 3 + 2 = 5$$

Pencoretan $x - 3$ dalam langkah kedua adalah benar,karena definisi limit akan mengabaikan perilaku tepat di $x = 3$. Jadi kita tidak membaginya dengan nol.

Contoh 7.3.

Cari limit berikut dengan pemeriksaan dimana $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Penyelesaian

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

Beberapa Teorema limit untuk $x \to 0$.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax+\tan bx}{cx-\sin dx}=\frac{a+b}{c-d}$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

9. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

10. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

11. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{(bx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax)^2}{\sin^2 bx}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

12. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 ax}{(bx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax)^2}{\tan^2 bx}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

13. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{\tan^2 bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 ax}{\sin^2 bx}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Contoh 7.4.

Cari limit berikut $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\tan 3x}{\sin^3 2x}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2\tan 3x}{\sin^3 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot 5x\cdot \tan 3x}{\sin 2x\cdot \sin 2x\cdot \sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{5.5.3}{2.2.2}=\frac{75}{8}$$

Contoh 7.5.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3}$$

$$= 3 \lim_{x \to o} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= 3\left(\frac{3}{3}\right) = 3 \cdot 1 = 3$$

Contoh 7.6.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3x}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \right)$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{3x}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3x}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} \times \frac{\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3x\left(\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}\right)}{(9+x) - (9-x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3x\left(\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x}\right)}{2x} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\sqrt{9+0} + \sqrt{9-0} \right) = \frac{3}{2}(6) = 9$$

Contoh 7.7.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{3-\sqrt{7-x}}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{3-\sqrt{7-x}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{3-\sqrt{7-x}}\times\frac{3+\sqrt{7-x}}{3+\sqrt{7-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(3+\sqrt{7-x}\right)}{3-(7-x)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\left(3+\sqrt{7-x}\right)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\left(3+\sqrt{7-x}\right)$$

$$=3+\sqrt{7-(-2)}=6$$

Contoh 7.8.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{-(\cos x-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{-(\cos x-\sin x)}$$

$$=-1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x)-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x)$$

$$=-\cos\tfrac{\pi}{4}-\sin\tfrac{\pi}{4}$$

$$=-\tfrac{\sqrt{2}}{4}-\tfrac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

Contoh 7.9.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 \frac{x}{3}}{(2x)^2}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 \frac{x}{3}}{(2x)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 \frac{x}{3}}{(2x)^2}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{9}}{4}\right) = \frac{1}{36}$$

Contoh 7.10.

Cari limit berikut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 5x}{\sin^2 \frac{1}{3} x}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 5x}{\sin^2 \frac{1}{3} x}$$

$$= \left(\frac{5}{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{25}{\frac{1}{9}}\right) = 225$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 7

   Dalam soal–soal 1–6, cari limit yang ditunjuk dengan pemeriksaan.

   1. $\lim\limits_{x \to 3} (x - 5)$
   2. $\lim\limits_{x \to -1} (1 - 2x)$

3. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{3x + 2x}}$

6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{1 - 2x}}{(3x \ \ + 2)^3}$

Dalam soal-soal 7–16, cari limit yang ditunjukkan. Dalam beberapa kasus anda terlebih dahulu melakukan perhitungan aljabar terlebih dahulu.

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

8. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2 + 4x - 21}{x + 7}$

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^2}$

11. $\lim\limits_{x \to -t} \dfrac{x^2 - t^2}{x + t}$

12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{(x + 4)(x - 2)^4}}{(3x - 6)^2}$

14. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{(x - 7)^3}}{x - 7}$

15. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 18x^2 + 81}{(x - 3)^2}$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3x + 4)(2x - 2)^3}{(x - 1)^2}$

Dalam soal-soal 17–26, hitung nilai-nilai fungsi yang diberikan

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\sin x)^2}{x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{x^2}$

21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sin(x-1)}$

22. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-\sin(x-3)-3}{x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\sin(x-3\pi/2)}{x-\pi}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cot x}{\frac{1}{x}}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{(x-\pi/4)^2}{(\tan x-1)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2-2\sin x}{3x}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

29. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2-2\sin x}{3x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 \frac{1}{2}x}{(3x)^2}$

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 7

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:

TP=

A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan

B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 8. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 7, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

D. Kegiatan Belajar 8

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip limit.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang limit.
- **Materi Pokok:** Pengkajian Limit

1. Uraian Materi Pengkajian tentang Limit

Dalam pasal sebelumnya telah diberikan definisi limit secara tak resmi. Berikut definisi yang lebih baik sedikit, tetapi masih tak resmi, dengan menyusun kembali susunan kata-kata dari definisi tersebut. Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa selisih antara f(x) dan

L dapat dibuat sekecil mungkin dengan mensyaratkan bahwa x cukup dekat tetapi tidak sama dengan c. sekarang kita coba untuk menekan hal ini dengan mengemukakan bukti-bukti.

Membuat definisi yang tepat pertama, kita ikuti sebuah tradisi lama dalam menggunakan huruf yunani ε (epsilon) dan δ (delta) untuk menggantikan bilangan-bilangan positif sebarang. Pikirkanlah ε dan δ sebagai bilangan- bilangan positif kecil.

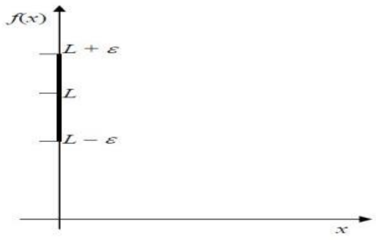
Mengatakan bahwa f(x) berada dari L sebesar lebih kecil dari ε sama saja dengan mengatakan

$|f(x) - L| < \varepsilon$

atau setara dengan

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

Ini berarti bahwa f(x) terletak dalam selang buka(L – ε, L +ε) yang diperlihatkan pada grafik dalam gambar.

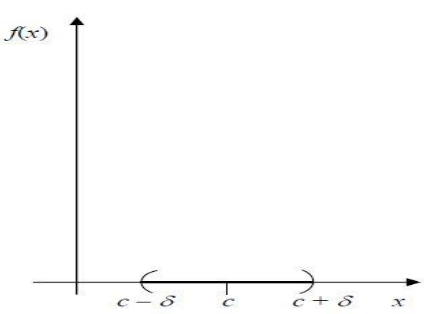


$|f(x)-L| < \varepsilon$

Selanjutnya, mengatakan bahwa x cukup dekat tetapi berlainan dengan c sama saja dengan mengatakan bahwa untuk suatu δ, x terletak dalam selang buka(c – δ, c + δ) dengan c tidak diikutkan. Barangkali cara terbaik untuk mengatakan ini adalah dengan menuliskan:

$$0 < |x-c| < \delta$$

Perhatikan bahwa $|x - c| < \delta$ akan menguraikan selang, $c - \delta < x < c + \delta$ sedangkan $|x - c| > 0$ mensyaratkan bahwa $x = c$ dikecualikan. Selang dengan pengeculian yang diuraikan tersebut diperlihatkan dalam gambar.



$0 < |x-c| < \delta$

Kita siap untuk definisi yang menurut sementara orang disebut definisi yang terpenting dalam kalkulus.

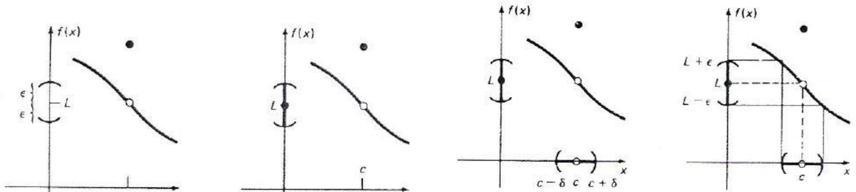
Definisi

(pengertian yang tepat tentang limit).

Mengatakan bahwa $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk tiap ε>0yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat δ > 0 yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$asalkan bahwa $|x - c| < \delta$;
yakni,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Gambar berikut memberikan gambaran:



apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$

Beberapa bukti limit (fakultatif) dalam setiap contoh-contoh berikut, kita mulai dengan apa yang disebut analisis pendahuluan. Ini bukan bagian dari bukti melainkan lebih merupakan pekerjaan yang seharusnya anda kerjakan di kertas buram. Kami sertakan disini agar bukti-bukti kita tidak kelihatan begitu saja turun dari langit.

Contoh 8. 1

Berikan definisi ε, δ yang sesuai untuk: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$$

Contoh 8. 2

Berikan definisi ε, δ yang sesuai untuk: $\lim\limits_{t\to c} f(t) = D$

Penyelesaian:

$$\lim_{t\to c} f(t) = D \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni 0 < |t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - D| < \varepsilon$$

Contoh 8. 3

Berikan definisi ε, δ yang sesuai untuk: $\lim\limits_{y \to e} f(y) = F$

Penyelesaian:

$$\lim_{y \to d} f(y) = F \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |y - e| < \delta \Rightarrow |f(y) - F| < \varepsilon$$

Contoh 8.4

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

Analisi pendahuluan andaikan ε bilangan positif sebarang. Kita harus menghasilkan suatu δ>0 sedemikian sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon \ &\Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |3||x - 4| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Sekarang kita lihat bagaimana memilih δ, yakni δ = ε/3. Tentu saja, sebarang δ yang lebih kecil akan memenuhi.

BUKTI RESMI andaikan diberikan ε>0. Pilih δ = ε/3 atau 3δ = ε maka 0< $|x - 4|$ < δ

Perhatikan ketaksamaan sebelah kanan

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon \ &\Leftrightarrow |3x - 12| < 3\delta \\ &\Leftrightarrow |3(x - 4)| < 3\delta \\ &\Leftrightarrow 3|x - 4| < 3\delta \\ &\Leftrightarrow |x - 4| < 3\delta/3 \\ &\Leftrightarrow |x - 4| < \delta \end{aligned}$$

Jadi kesimpulannya

$$\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 5) - 5| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Contoh 8. 5

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Analisi pendahuluan andaikan ε bilangan positif sebarang. Kita harus menghasilkan suatu δ>0 sedemikian sehingga

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

$$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2||x-2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sekarang kita lihat bagaimana memilih δ, yakni δ = ε/2. Tentu saja, sebarang δ yang lebih kecil akan memenuhi.

BUKTI RESMI andaikan diberikan ε>0. Pilih δ = ε/2 atau 2δ = ε maka 0< $|x - 2|$< δ

Perhatikan ketaksamaan sebelah kanan

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}-5\right|<2\delta$$

$$\Leftrightarrow \left|(2x+1)-5\right|<2\delta$$

$$\Leftrightarrow \left|2x-4\right|<2\delta$$

$$\Leftrightarrow \left|2\right|\left|x-2\right|<2\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x-2\right|<\frac{2\delta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|2\right|\left|x-2\right|<2\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x-2\right|<\delta$$

Jadi kesimpulannya

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=5 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta>0 \ni 0<\left|x-2\right|<\delta \Rightarrow \left|\left(\frac{2x^2-3x-2}{x-2}\right)-5\right|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

Tugas Kegiatan Belajar 8

Pada soal no 1 – 6,

Berikan definisi ε, δ yang sesuai untuk masing-masing pernyataan:

2. $\lim_{x\to a} f(x)=M$
3. $\lim_{x\to b} g(x)=C$
4. $\lim_{t\to c} h(t)=D$
5. $\lim_{t\to c} g(t)=D$
6. $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$
7. $\lim_{x\to b^-} g(x)=K$

Pada soal no 7 – 10,

Berikan definisi ε, δ yang sesuaibukti untuk masing-masing fakta berikut:

8. $\lim_{x\to 0}(2x-1)=-1$
9. $\lim_{x\to -21}(3x-1)=-64$

10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=10$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2-x}{x}\right)=-1$

B. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 8

$$TP = \frac{A}{B}\times 100\ \%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 9. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 8, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

E. Kegiatan Belajar 9

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip teorema limit.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang teorema limit.
- **Materi Pokok: T**eorema Limit, Kekontinuan

1. Uraian Materi: Teorema Limit

Kebanyakan pembaca akan setuju bahwa membuktikan adanya limit dengan menggunakan definisi ε, δ dari pasal di depan, disamping memekan waktu juga sukar. Itulah sebabnya mengapa teorema-teorema dalam pasal ini disambut dengan baik. Teorema yang pertama sangat penting. Dengan teorema ini kita dapat menangani hamper semua masalah limit yang akan kita hadapi nanti.

Teorema A

Teorema Limit Utama.

Andaikan n bilangan positif, k konstanta, dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. maka

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

3. $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, *asalkan* $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to c} [(f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$

9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ *asalkan* $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$; bilamana n genap

Hasil-hasil yang penting ini akan mudah di ingat jika kita pelajari dalam kata-kata.misalnya, pernyataan 4 diterjemahkan sebagai: *Limit suatu jumlah adalah jumlah dari limit-limit.*

Tentu saja, teorema A perlu dibuktikan. Kita tunda pekerjaan tersebut sampai akhir pasal ini, dengan pertama-tama memilih untuk memperlihatkan kepada anda bagaimana teorma besar ini digunakan.

Penerapan teorema limit utama Dalam contoh-contoh berikut, nomor-nomor yang dilingkari mengacu kepada pernyataan-pernyataan bernomor dari daftar yang diberikan sebelumnya. Setiap kesamaan dibenarkan oleh pernyataan yang di tunjukkan .

Contoh 9. 1.

Carilah $\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$

Penyelesaian

$\lim\limits_{x \to 3} 2x^4$

$= 2 \lim\limits_{x \to 3} x^4$ **....(3)**

$= 2\left[\lim\limits_{x \to 3} x^4\right]$ **....(8)**

$= 2[3]^4$ **....(2)**

$= 162$

Contoh 9. 2

Cari $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$

Penyelesaian

$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$

$= \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \qquad \textbf{....(5)}$

$= 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x \qquad \textbf{....(3)}$

$= 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x \qquad \textbf{....(8)}$

$= 3(4)^2 - 2(4) \qquad \textbf{....(2)}$

$= 40$

Contoh 9. 3.

Jika $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ dan $\lim_{x\to 3} g(x) = 8$, cari $\lim_{x\to 3}\left[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right]$

Penyelesaian

$\lim_{x\to 3}\left[f^2(x).\sqrt[3]{g(x)}\right]$

$= \lim_{x\to 3} f^2(x).\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)} \qquad \textbf{....(6)}$

$= \left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2.\sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)} \qquad \textbf{....(}8\ dan\ 9\textbf{)}$

$= [4]^2.\sqrt[3]{8}$

$=32$

Ingat bahwa funsi polinom f mempunyai bentuk

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Sedangkan fungsi rasional f adalah hasil bagi dua fungsi polinom yakni

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

Teorema B

Teorema Substitusi

Jika *f* suatu fungsi polinom atau fungsi rasional,maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Asalkan dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol.

Bukti untuk teorema B mengikuti dari penerapan teorema A secara berulang-ulang.

Perhatikan bahwa teorema B memungkinkan kita untuk mencari limit-limit untuk fungsi-fungsi polinom dan rasional cukup dengan hanya mensubstitusikan c untuk x.

Contoh 9. 4.

Cari $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

Contoh 9.5.

Cari $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^{2.}}$

Penyelesaian baik teorema B ataupun pernyataan 7 dari teorema A tidak berlaku, karena limit penyebut 0. Tetapi, karena limit pembilang adalah 11, kita lihat bahwa selama x dekat 1, kita membagi sebuah bilangan dekat 11 dengan sebuah bilangan positif dekat 0. Hasilnya sebuah bilangan besar. kenyataannya bilangan yang di hasilkan dapat dibuat besar sekehendak kita dengan membiarkan x cukup dekat ke 1. Kita katakan bahwa limitnya tidak ada

Contoh 9.6.

Cari $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6}$

Penyelesaian

Jika menggunakan ingin menggunakan teorema B maka tidak dapat diterapkan, tetapi hasil bagi mengambil bentuk tanpa arti 0/0 di t=2. Kapan saja ini terjadi, Anda harus menyederhanakan hasil bagi tersebut secara aljabar (pemfaktoran), sebelum Anda mencoba mengambil limitnya:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2+3t-10}{t^2+t-6}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+5)}{(t-2)(t+3)}=\lim_{t\to 2}\frac{(t+5)}{(t+3)}=\frac{(2+5)}{(2+3)}=\frac{7}{5}$$

Uraian Materi: Kekontinuan Fungsi

- **Kekontinuan Fungsi di satu titik**

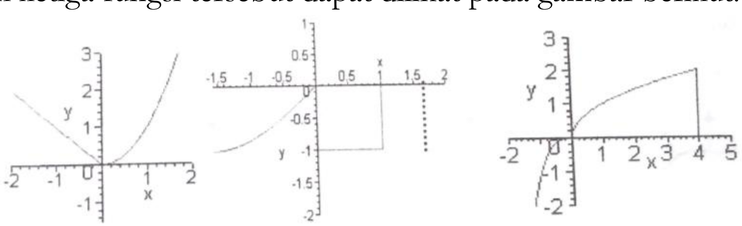
Secara intuitif konsep kekontinuan dalam matematika sama seperti pengertian dalam bahasa sehari-hari yaitu, tersambung atau berkelanjutan atau tidak terputus. Misalkan suatu fungsi dikatakan konttinu bila grafik grafik fungsi tersebut tidak terputus. Sebagai contoh dapat dilihat beberapa gejala yang terjadi dari tiga buah fungsu berikut ini, apakah kontinu di x = 0. Misalkan fungsi f, g dan h didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & ,x<0\\ x-1 & ,x=0\\ x^2 & ,x>0\end{cases};$$

$$g(x)=\begin{cases}\sin x & ,-\frac{\pi}{2}\le x<0\\ 0 & ,x=0\\ [\![x-1]\!] & ,0<x<1\end{cases};$$

$$h(x)=\begin{cases}x^3 & ,-1\le x<0\\ \sqrt{x} & ,0\le x<4\end{cases}$$

Grafik ketiga fungsi tersebut dapat dilihat pada gambar berikut:



Berdasarkan gambar, jelas fungsi f tidak kontinu di x= 0, sebab $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ dan fungsi g tidak kontinu di x= 0, sebab

$\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x) atau \lim_{x\to 0} g(x)$ tidak ada, tetapi fungsi h kontinu di x= 0, sebab $\lim_{x\to 0} h(x) = h(x)$.

Berdasarkan uraian di muka, terdapat hal penting yang harus diperhatikan dengan sungguh-sungguh yaitu pemahaman konsep limit akan menentukan tingkat pemahaman tentang konsep kekontinuan. Karena suatu fungsi f yang terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c dikatakan kontinu di x=c bila limit fungsi di x= c ada dan sama dengan nilai fungsi di x=c.

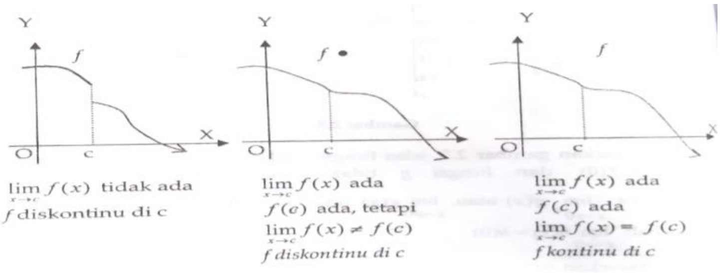
Definisi

Diketahui fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. fungsi f dikatakan kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Definisi ini mensyaratkan tiga hal yang harus dipenuhi agar suatu fungsi f kontinu di c yaitu

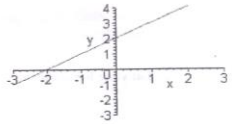
4. $\lim_{x\to c} f(x)$ ada
5. F(c) ada
6. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Bila salah satu dari ketiga hal tersebut tidak dipenuhi maka fungsi f dikatakan tidak kontinu (diskontinu)di c. Selanjutnya, perhatikan gambar dibawah ini.



Contoh 9.7.

Fungsi fndengan f(x) = x+2 kontinu di x=2, sebab $\lim_{x \to 2} (x+2) = 4 = f(2)$ .grafiknya dapat dilihat pada gambar;



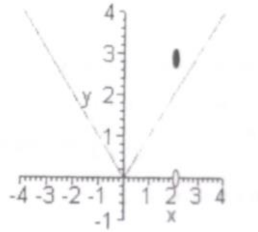
Contoh 9. 8.

Di ketahui fungsi f dengan

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , x \neq 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

Jelas fungsi f tak kontinu di x=0, sebab $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

Grafiknya dapat dilihat pada gambar .



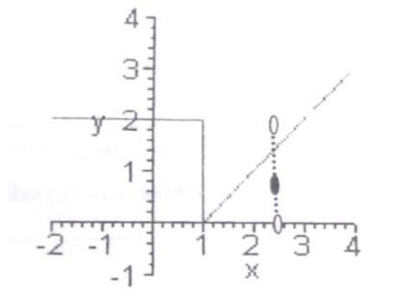
Contoh 9.9

Fungsi f dengan

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ x - 1 & , x > 1 \end{cases}$$

Tak kontinu di x=1, sebab $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada (mengapa?).

Grafik dapat dilihat sebagai berikut:



Catatan :

Pada contoh 9.8 fungsi tak kontinu di x=0, sebab $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$. Tetapi kediskontinuan ini dapat dihapuskan (dapat dijadikan kontinu) bila nilai f(0) di buat sama dengan nilai $\lim_{x\to 0} f(x)$. Ketakkontinuan semacam ini dinamakan kekontinuan yang dapat di hapuskan berbeda dengan contoh 9.8 , pada contoh 9.9 kekontinuan fungsi f di x= 1, disebabkan oleh $\lim_{x\to 1} f(x)$ tidak ada meskipun nilai f(1) ada. Ketakkontinuan semacam ini dinamakan ketakkontinuan loncat.

Contoh 9.10.

Selidiki apakah fungsi f dengan

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ,x\le 1 \\ 8-3x & ,1\le x\le 2 \\ x+3 & ,x\ge 2 \end{cases}$$

Kontinu di x=1 dan x=2

Penyelesaian:

Karena pada suatu selang terbuka yang memuat 1 dan 2, fungsi yang akan di hitung limitnya di atur oleh dua persamaan yang berbeda, maka untuk menghitung limitnya di gunakan limit-limit sepihak.

1. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+3)=5$ dan $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(8-3x)=5$

Karena $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=5$, maka $\lim_{x\to 1} f(x)$ ada.

Selanjutnya, nilai fungsi f di x= 1 adalah f(1)=5.

Karena $\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$, maka fungsi f kontinu di x=1.

2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (8 - 3x) = 2$ dan $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$

Karena $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x),$ maka $\lim_{x \to 2} f(x)$ tidak ada. Akibatnya fungsi f tak kontinu di x= 2

Kekontinuan sepihak

Pembahasan kekontinuan sepihak di motivasi oleh kekontinuan fungsi di suatu titik. Berdasarkan konsep kekontinuan fungsi di satu titik, suatu fungsi f dikatakan kontinu di c bila $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$,dan $\lim_{x \to 1} f(x)$ ada bila $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ atau $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$? oleh karena itu akan di bicarakan konsep kekontinuan sepihak yang di sajikan dalam definisi berikut.

Definisi:

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang tertututp I= [a,b].

(a). fungsi f dikatakan kontinu kiri di b bila $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

(b). fungsi f dikatakan kontinu kanan di a bila $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Contoh 9.11

Fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{2 - x}$ kontinu kiri di x= 2, sebab $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0 = f(2)$. Fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{2 - x}$ kontinu kanan di x= 2, sebab $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{2 - x} = 0 = f(2)$.

Jika fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c, f kontinu kanan dan kontinu kiri di x=c, apakah f juga kontinu di x=c?

Contoh 9.12

Diperhatikan fungsi f dengan f(x)=| x – 2 |.

Karena $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x+2) = 0$ dan $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2) = 0$ maka $\lim_{x \to 2} f(x) = 0.$ juga karena $\lim_{x \to 2} f(x) = 0 = f(2)$ maka fungsi f kontinu di x=2.

Dilain pihak dapat pula dilihat bahwa fungsi f kontinu kiri dan kanan di x=2, sebab $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$ dan $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$.

Beberapa fakta di muka memotivasi kita untuk menuliskan teorema berikut .

Teorema :

Diketahui fingsi f terdefinisi pada suatu selang terbuka I yang memuat c. fungsi f dikatakan kontinu di c jika dan hanya jika fungsi f kontinu kanan dan kontinu kiri di c.

Kekontinuan fungsi pada suatu selang

Definisi 1.

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terbuka (a,b) jika fungsi f kontinu disetiap titik pada selang (a,b).

Contoh fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ kontinu pada selang terbuka (-3,3), sebab fungsi f kontinu di setiap titik pada selang (-3,3) atau untuk setiap c $\in$(-3,3) berlaku $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Definisi 2

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup (a,b] jika fungsi f kontinu pada selang terbuka (a,b) dan kontinu kiri di b.

Contoh 9.13.

Fungsi dengan $f(x)=\sqrt{2-x}$

Kontinu pada selang (-∞,2], sebab untuk setiap c ∈ (-∞,2) berlaku $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ dan $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=0=f(2)$.

Oleh karena itu fungsi f kontinu pada selang (-∞,2) dan kontinu kiri di x=2.

Definisi 3

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang setengah terbuka atau setengah tertutup [a,b) jika fungsi f kontinu pada selang terbuka (a,b)dan kontinu kanan di a.

Contoh 9.14.

Fungsi f dengan $f(x)=\sqrt{2-x}$ kontinu pada selang (2,∞), sebab untuk setiap c $\in(2,\infty)$ berlaku $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ dan $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0=f(2)$ atau fungsi f kontinu pada selang terbuka (2,∞) dan kontinu kanan di x=2.

Definisi 4:

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang tertutup [a,b],jika fungsi f kontinu kanan di a, kontinu pada selang terbuka (a,b), dan kontinu kiri di b.

Contoh fungsi f dengan $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ kontinu pada selang tertutup [-2,2], sebab fungsi f kontinu pada selang (-2,2),kontinu kanan di -2 dan kontinu kiri di 2.

Teorema kekontinuan fungsi

Pada pasal ini akan di sajikan beberapa teorema kekontinuan fungsi yang sejalan dengan teorema-teorema limit pada pasal di atas. Teprema-teorema ini merupakan alat ampuh yang menangani atau menelaah kekontinuan fungsi di satu titik dan pada suatu selang.

Teorema

(a) Jika fungsi f dan g kontinu di c, maka fungsi f + g, f – g , f.g, dan f/g . dengan g(c) ≠0 kontinu di c

(b) Jika fungsi f dan g kontinu pada suatu selang I, maka fungsi f + g, f – g, f.g, dan f/g dengan g(c) ≠0 kontinu di c untuk semua c ∈ I

(c) Fungsi suku banyak (fungsi polinom), fungsi rasional, dan fungsi trigonometri kontinu pada daerah definisi.

(d) Jika fungsi f kontinu di c dan fungsi g kontinu di f(c) maka fungsi komposisi gof kontinu di c

Contohnya diperhatikan fungsi h dengan $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}}$. Fungsi h dapat di nyatakan sebagai fungsi komposisi (gof)(x) dengan $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ dan $g(x)=\sqrt{x}$

Berdasarkan teorema, fungsi f kontinu pada selang I = (-∞,1) ∪(1,∞). Karena f(c) >0 untuk semua c ∈ I. oleh karena itu fungsi g o f kontinu pada I. dapat pula dilihat bahwa fungsi f kontinu pada I, $R_f \subseteq R^+$ dan fungsi g kontinu pada R^+, maka fungsi g o f kontinu pada I.

Teorema:

Diberikan fungsi terdefinisi pada selang terbuka I yang memuet c, kecuali mungkin di c sendiri. Jika $\lim_{x\to c} f(x) = k$ dan g kontinu di k,maka $\lim_{x\to c}(gof)(x) = g(k)$ atau $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x))$.

Contoh 9.15˙

Hitunglah $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

Penyelesaian:

$\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$ dapat dinyatakan sebagai komposisi fungsi (gof)(x) dengan $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Karena $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{(x-1)^2} = \frac{10}{4}$ dan fungsi g kontinu di 10/4, maka

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}} = g(\frac{10}{4}) = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Teorema Nilai antara

Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan k ∊ (f(a),f(b)), maka terdapat bilangan c antara a dan b sehingga f(c)=k

Contoh pada fungsi f dengan f(x)= $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ kontinu pada selang tertutup [0,4], f(0)= - 6, dan f(4). Karena 0 antara f(0) dan f(4) maka ada 1 antara 0 dan 4, sehingga berlaku f(1)=0.

Contoh 9.16.

Tunjukkan persamaan $x^3 + 3x - 2=0$ mempunyai akar real antara 0 dan 1.

Penyelesaian:

Misalkan f(x)= x^3 +3x – 2. Fungsi f kontinu pada selang tertutup [0,1]. F(0)= - 2 dan f(1)=2. Karena 0 antara f(0) dan f(1) maka ada $c \in R$ antara 0 dan 1 yang merupakan akar dari persamaan x^3 +3x – 2 =0.

2. Tugas Kegiatan Belajar 9

Pada soal no 1 – 12, gunakan Teorema A untuk mencari tiap limit.

1. $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1)$
2. $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 - 1)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} [(2x+1)(x-3)]$
4. $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} [(2x^2+1)(7x^2+13)]$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{5-3x}$
6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4x^3+1}{7-2x^2}$
7. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{3x-5}$
8. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{5x^2} + 2x$
9. $\lim\limits_{t \to -2} (2t^3+15)^{13}$
10. $\lim\limits_{t \to -2} \sqrt{-3t^3} + 7t^2$
11. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4x^3+8x}{x+4} \right)^{1/3}$
12. $\lim\limits_{x \to 5} (2x^4 - 9x^3 + 19)^{-1/2}$

Pada soal no 13 – 22, cari limit yang ditunjuk atau nyatakan bahwa limit itu tidak ada. Dalam beberapa kasus, Anda melakukan beberapa langka aljabar sebelum mencoba menghitung limitnya.

13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$

14. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^5+7x^4-6x^3-104x^2-32x+384}{x^5+7x^4-18x^3-248x^2-608x-384}$

15. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+7x+10}{x+2}$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

18. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-14x-51}{x^2-4x-21}$

19. $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^2-ux+2u-2x}{u^2-u-6}$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+ux-x-u}{x^2+2x-3}$

21. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{2x^2-6x\pi+4\pi^2}{x^2-\pi}$

22. $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{(u+2)(u^2-u-6)}{u^2+4u+4}$

Pada soal no 23 – 25, cari limit tersebut jika $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-1$

23. $\lim\limits_{x\to -a} \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$

24. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x)-3g(x)}{f(x)+g(x)}$

25. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}\left[f(x)+3\right]$

Selidiki apakah fungsi-fungsi dalam soal nomor 1 sampai dengan nomor 5 kontinu di c yang di berikan, berikan penjelasan secukupnya.

26. F(x)= $6x^2 + x + 1$ c=1

27. $f(x)=\dfrac{2}{x^2-2x}$ c=0 dan c=2

28. $f(x)=\sqrt{2x-3}$ c=2

29. $f(x)=|4x-1|$ c= - 2

30. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\neq 3 \\ 3 & ,x=3 \end{cases}$ c=3

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 9

$$TP=\frac{A}{B}\times 100\ \%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 10. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 9, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

4. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

5. Bacaan Yang Dianjurkan

Endang Dedi, 2005. Kalkulus I. Universitas Negeri Malang. Malang: UM Press.

BAB III

Turunan

Pendahuluan

Pada bab ini akan dibahas sebuah konsep yang sangat pundametal dalam kalkulus, yaitu konsep turunan serta beberapa hal yang berkaitan dengannya. Untuk memahami konsep turunan ini, kita harus menyiapkan diri dan memingat kembali dengan baik pemahaman tentang fungsi dan limit, karena pada dasarnya pengerjaan yang berkaitan tentang turunan selalu berkaitan dengan pengerjaan limit.

Terdapat dua topic yang dapat mengantarkan kita pada pemahaman mengenai konsep turunan, topic pertama adalah masalah gradient garis singgung, dan topic kedua adalah masalah kecepatan sesaat dalam gerak lurus suatu benda. Kedua masalah tersebut nampaknya tidak berhubungan sama sekali,tapi pada gilirannya akan diketahui bahwa keduanya merupakan perwujudan dari sebuah pemikiran yang serupa.

Untuk lebih jelasnya, sekarang kita telaah kedua masalah itu satu persatu.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

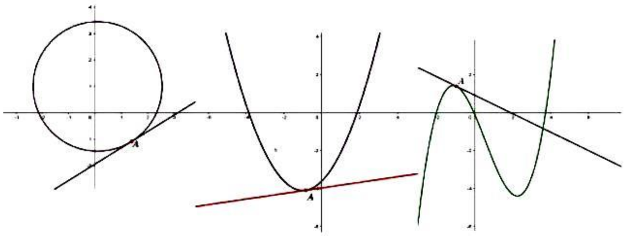
- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep turunan, dan prinsip turunan.

- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep-konsep turunan.
- **Materi Pokok:** Garis Singguung, Turunan, Aturan Pencarian Turunan, Turunan Sinus dan Cosinus, Aturan Rantai dan Aturan Pangkat

A. **Kegiatan Belajar 10**

1. **Uraian Materi Garis Singgung**

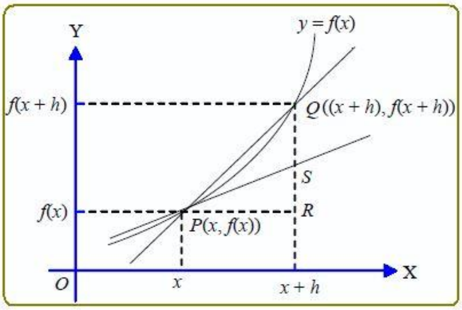
Garis singgung sebuah kurva y = f(x) didefinisikan sebagai garis yang menyinggung kurva dititik tertentu. Perhatikan gambar:



Pada gambar di atas, garis l adalah garis yang menyinggung suatu kurva dititik A.

Gradien garis singgung pada kurva

Perhatikan gambar



Andaikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka yang memuat x, kurva fungsi f melalui titk P(x, f(x)) dan titik Q(x +h, f(x +h)), dari grafik fungsi f diatas kita katakan:

- PQ disebut tali busur
- Garis yang melalui P dan Q, yaitu garis k disebut garis secant(secant line)

- Garis singgung pada kurva f dititik P, yaitu garis l disebut garis tangen (tangent line)

Gradient (kemiringan/tanjakan/slope) tali busur PQ, dinotasikan dengan m_{PQ} dan gradient garis secant m_k keduanya sama yaitu:

$$m_{PQ} = m_k = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sekarang andaikan dititik P dianggap tetap dan titik Qbergerak sepanjang kurva f mendekati titk P,maka terjadi kondisi berikut:

- Q semakin dekat ke P
- h semakin dekat ke 0
- garis k semakin dekat ke garis l
- gradien garis k semakin dekat ke gradient garis l

Misalkan gradien garis singgung di titk P adalah m_l, maka secara limit

Dapat ditulis :

$$m_l = \lim_{h\to 0} m_k = \lim_{h\to 0} m_{PQ} \quad \text{atau} \quad m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\sec}$$

Dari paparan diatas dapat didefinisikan gradient garis singgung dititk tertentu pada kurva f sebagai berikut.

Definisi :

Andaikan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat x, gradien (kemiringan) garis singgung pada kerva f di titk (x, f(x)) adalah : $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ asal limit ini ada

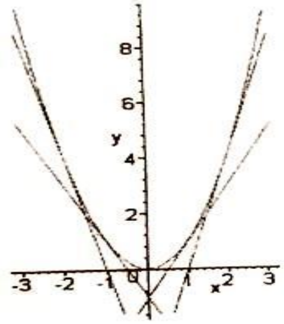
Selanjutnya didefinisikan persamaan garis singgung kurva f di titk (x, f(x)) dengan gradient m sebagai berikut:

Definisi:

Misalkan m adalah gradient garis singgung pada kurva f di titik (x_1,(f(x_1)) maka persamaan garis singgung paddda kurva f di titik tersebut adalah: $y - f(a) = m(x - x_1)$

Contoh 10. 1

Tentukan gradient persamaan garis singgung pada kurva $f(x)=x^2$ di titik (-2,4), (-1,1), (1,1) dan (2,4) berturut-turut adalah $m_1, m_2, m_3, m_4,\ dan\ m_5$ maka:



$$m_1 = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -4 + h$$

$$= -4$$

$$m_2 = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) \ - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -2 + h$$

$$= -2$$

$$m_3 = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 - (0)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h$$

$$= 0$$

$$m_4 = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2 + h$$

$$= 2$$

$$m_5 = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} 4 + h$

$=4$

Contoh 10. 2.

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva f(x) = x^2 di titik (2,4)

Penyelesaian:

Gradient garis singgung pada kurva f(x)= x^2 di titik (2, 4) adalah m = 4.

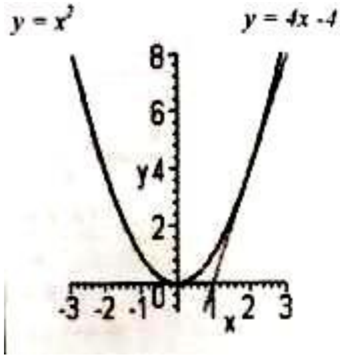
Sehingga persamaan garis singgung kurva dititik (2,4) adalah

$y - f(2) = m(x-2)$

$y - 4 = 4(x-2)$

$y = 4x - 8 + 4$

$y = 4x - 4$

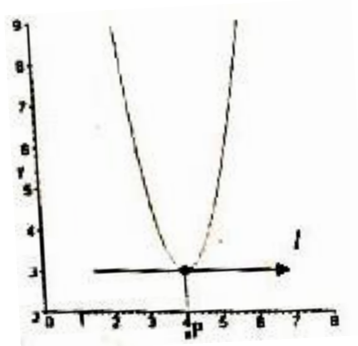


Sekarang perhatikan jika gradient garis singgung pada kutva f di titik (a,(f(a)) adalah m=0, atau $m = m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = 0$ maka persamaan garis singgungnya adalah:

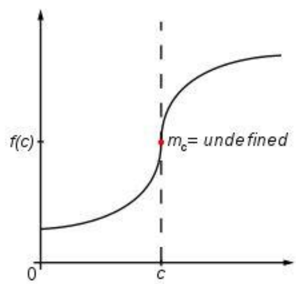
$y - f(a) = m(x-a)$

$y = 0(x-a) + f(a)$

$y = f(a)$



Merupakan persamaan garis yang sejajar dengan sumbu X(garis horizontal)



Pada saat lain dapat ditemukan $m = m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\sec} = \infty$ atau $m = m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\sec} = -\infty$ yang mengakibatkan garis singgungnya di titik P(a, f(a))adalah vertical atau sejajar dengan sumbu Y.

Dari kasus di atas dapat di susun definisi berikut:

Definisi 3

Misalkan f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat a, juka m adalah gradient garis singgung pada kurva f dititik (a,f(a)) dimana $m = m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\sec}$ dan l adalah garis singgungnya dititik P.

L horizontal jika dan hanya jika $m = m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} m_{\sec} = 0$ dan

L vertical jika dan hanya jika $|m| = |m_{\tan}| = \left|\lim\limits_{h \to 0} m_{\sec}\right| = \infty$

Contoh 10. 3.

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 3x - 4$ di titik (-3,-4)

Penyelesaian:

Gradient garis singgung pada kurva di titik (-3,-4) adalah:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-3+h)^2 + 3(-3+h) - 4 - (-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-3+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -3 + h$$

$$= -3$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

$$y - f(-3) = -3(x+3)$$

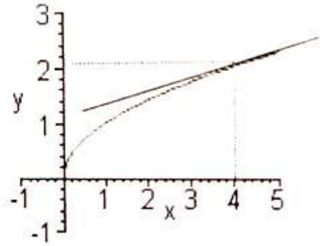
$$y = -3x - 9 - 4$$

$$y = -3x - 11$$

Contoh 10. 4:

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = \sqrt{x}$ di titik (4,2)

Penyelesaian:



Gradient garis singgung pada kurva f di titik (4,2) adalah:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Jadi persamaan garis singgungnya pada kurva f di titik (4,2) adalah:

$$y - f(4) = m(x-2)$$

$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{4}(x-2) + f(2)$$

$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{4}x + 1$$

Garis normal

garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap sebuah garis singgung di suatu titik pada kurva. Dua buah garis dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika hasil kali gradiennya sama dengan -1, jadi jika sebuah garis singgung pada kurva f di titik (a,f(a))mempunyai gradient m≠0, maka gradient garis normalnya adalah – 1/m, dengan kata lain:

$$m_{\mathbf{tan}} \cdot m_N = -1 (m_N = gradien\ garis\ normal)$$

Persamaan garis normal kurva f di titik (a,(f(a)) adalah:

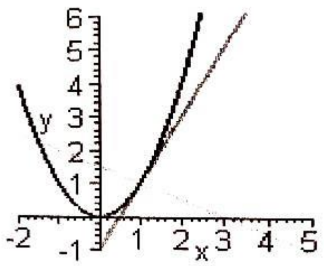
$$y - f(a) = m_N(x-a) = -\tfrac{1}{m_{\mathbf{tan}}}(x-a)$$

Contoh 10. 4.
Tentukan persamaan garis normal kurva $y = x^2$ di titik (1, 1)
Penyelesaian :
Gradient persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2$ di titik (1, 1) adalah m = 2, dan persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x - 1$, gradient persamaan garis normal di titik (1, 1) adalah $m_N = -\frac{1}{m_{\tan}} = -\frac{1}{2}$.
Jadi persamaan garis normalnya adalah:

$$y - f(1) = m_N(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-1)+1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



Masalah kecepatan sesaat

Perhatikan contoh berikut. Misalakan sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan gerak S = t^2 + 2; (menyatakan eaktu dalam detik), dan S (t) menyatakan jarak dalam meter yaitu posisi benda pada saat t. pertanyaannya, berapa kacepatan benda pada saat t tertentu?

Kita amati pergerakan benda pada selang waktu t = 1 sampai dengan t = 3. Jarak atau posisi benda dari mulai bergerak sampai pada saat t = 1 detik dan pada saat t = 3 detik.

S(1)= 1^2+2=3 meter

S(3) = 3^2+2=11 meter

Jadi pada interval t = 1 sampai dengan t = 3 benda telah menenpuh jarak S (3) – S(1) = 11 – 3 = 8 meter dengan waktu tempuh: 3 – 1 = 2 detik

Selama bergerak kadang-kadang benda berkecepatan tinggi atau kecepatannya rendah, bahkan mungkin berhenti, kecepatan rata-rata dalam suatu selang waktu tersebut adalah:

$$kecepatan\ \ rata-rata = \frac{jarak\ \ yang\ di\,tempuh}{waktu\ tempuh}$$

Jadi, kecepatanrata-rata dalam selang waktu t = 1 sampai dengan t = 3 detik adalah:

$$kecepatan\ \ rata-rata = V_{rata-rata} = \frac{S(3)-S(1)}{3-1}$$

$$V_{rata-rata} = \frac{8}{2}\,meter/detik$$

Selanjutnya, jika waktu yang di tempuh benda adalah h detik, maka kecepatan rata-rata pada selang waktu t=1 s.d t=1+h, adalah:

$$\begin{aligned} kecepatan\ \ rata-rata &= \frac{jarak\ \ yang\ di\,tempuh}{waktu\ tempuh} \\ &= \frac{(1+h)^2+2-(1+2)}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h} \\ &= 2+h\ \ meter/detik \end{aligned}$$

Jika h cukup dekat ke 0, maka secara limit diperoleh ‘kecepatan sesaat’ benda (V) pada saat t=1,yaitu

$$V = \lim_{h\to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h\to 0} \frac{S(1+h)-S(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+2-(1+2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2+h$$
$$= 2 \quad meter/detik$$

Demikian pula kecepatan sesaat benda pada saat t=2 adalah

$$V = \lim_{h\to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h\to 0} \frac{S(2+h)-S(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+2-(2+2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4+h$$
$$= 24 \quad meter/detik$$

Dari paparan di atas dapat di definisikan kecepatan sesaat benda yang bergerak sepanjang garis koordinat yang posisinya pada saat t di tentukan oleh S=f(t) sebagai berikut:

Definisi 3

Misalkan sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus, jika posisi benda pada saat t di tantukan oleh S=f(t) maka kecepatan rata-rata benda selama selang waktu t=a, sampai t=a+h adalah

$$kecepatan\ \ rata-rata = V_{rata-rata} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Dan kecepatan sesaat benda pada saat t=a adalah

$$V = \lim_{h\to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Contoh 10. 5.

Sebuah mobil bergerak lurus sepanjang sumbuX, misalkan posisinya (dalam meter) pada waktu t(detik)ditentukan oleh f(t)=5t²+100, tentukan kecepatan mobil pada saat t= 3 detik

Penyelesaian :

Kecepatan sesaat mobil pada saat t=3 detik adalah:

$$V = \lim_{h \to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(3+h)^2 + 100 - 5(3)^2 + 100}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{30h + 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 30 + 5h$$

$$= 30$$

Jadi kecepatan sesaat benda pada saat t=3 adalah 30 m/detik.

Contoh 10. 6

Sejenis virus berkembang biak, sehingga dalam t jam massanya bertambah sebesar $2t^2 - 1$ gram.

a. Tentukan massa virus bila ia berkembang biak selama selang waktu $1 \le t \le 1{,}5$
b. Berapa kecepatan rata-rata perkembangan virus selama selang waktu $1 \le t \le 1{,}5$
c. Berapa kecepatan perkembang biakan pada saat t= 1,2 detik

Penyelesaian :

$f(t) = 2t^2 - 1, 1 \le t \le 1{,}5$

a. Massa virus yang berkembang selama selang waktu 1≤ t ≤ 1,5, adalah :

$$f(1{,}5) - f(1) = 2(1{,}5)^2 - 1 - (2(1)^2 - 1)$$

$$= 4{,}5 - 1 = 3{,}5\ gram$$

b. Kecepata rata-rata perkembang biakan virus dalam selang waktu tersebut adalah:

$$V_{rata-rata} = \frac{f(1,5) - f(1)}{1,5 - 1}$$

$$= \frac{3,5}{0,5} = 7 \ gram/detik$$

c. kecepatan perkembang biakan pada saat t=1,2 detik adalah

$$V = \lim_{h \to 0} V_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(1,2+h)^2 - 1 - (2(1,2)^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4,8h + 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4,8 + 5h$$

$$= 4,8 \ gram/detik$$

Kecepatan sering disebut sebagai laju, yang lebih tepat adalah bahwa kecepatan merupakan salah satu bentuk laju perubahan (jarak terhadap waktu). Bentuk laju perubahan yang lain diantarnya adalah laju perubahan laju perubahan volume terhadap tinggi, massa terhadap jarak, muatan listrik terhadap waktu, dan lain-lain. Perlu di ingat bahwa segala peristiwa selalu berkaitan demgan waktu,jadi selalu dapat di buat sebuah laju perubahan terhadap waktu. Pada bagian akhir bab ini akan di bahas mengenai laju yang berkaitan sebagai telaahan lanjut mengenai laju perubahan.sampai di sini kita dapat mengamati bahwa gradient garis singgung dan kecepatan sesaat mempunyai bentuk yang serupa sebagai limit dari laju perubahan:

$$gradien\ garis\ \mathbf{sin}\,ggung: \quad m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$kecepa\mathbf{tan}\ sesaat \qquad : \quad V = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dengan demikian jelas bahwa gradient garis dan kecepatan sesaat merupakan tafsiran dari sebuah pemikiran yang serupa, yang disebut sebagai turunan, dalam hal ini gradient sebai tafsiran geometris, dan kecepatan sesaat sebagai tafsiran fisis.

Contoh 10. 7.

Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat dan s, jarak berarah dalam sentimeter yang di ukur dari titik asal ke titik yang dicapai setelah t detik, diberikan oleh $s=\sqrt{5t+1}$.

Hitunglah:

a. Berapa jauh partikel tersebut bergerak setelah t=7detik?

b. Berapa kecepatan rata-rata partikel pada selang 2 ≤ t ≤ 3?

c. Cari kecepatan sesaat pada akhir t= 3 detik?

Penyelesaian:

a. $s=s(7)=\sqrt{5.7+1}=\sqrt{35+1}=\sqrt{36}=6\,sentimeter$

b. Kecepatan rata-rata partikel pada selang 2 ≤ t ≤ 3

$$v_{rata-rata}=\frac{\sqrt{5.3+1}-\sqrt{5.2+1}}{3-2}=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{11}}{1}\approx 4-3{,}32=0{,}68cm/detik$$

c. Kecepatan sesaat pada akhir t=3 detik

$$v=\lim_{h\to 0} v_{rata-rata}=\lim_{h\to 0}\frac{s(3+h)-s(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5(3+h)+1}-\sqrt{5(3)+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h}.\frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4}=\lim_{h\to 0}\frac{16+5h-16}{h(\sqrt{16+5h}+4)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{16+5h}+4}=\frac{5}{8}cm/detik$$

contoh 7: untuk fungsi penawaran $S(p)=\frac{1}{4}p^2$ dan fungsi permintaan D(p) = 12 – 2p.

Tentukan:

a. Harga kesetimbangan p_0 diamana $S(p_0)=D(p_0)$.

b. Kemiringan kurva penawaran pada titik kesetimbangan $(p_0,S(p_0))$.

c. Kemiringan kurva permintaan pada titik $(p_0,D(p_0))$

Penyelesaian:

a. $S(p_0) = D(p_0)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} p_0^{\ 2} = 12 - 2p_0$

$\Leftrightarrow p_0^{\ 2} - 48 + 8p_0 = 0$

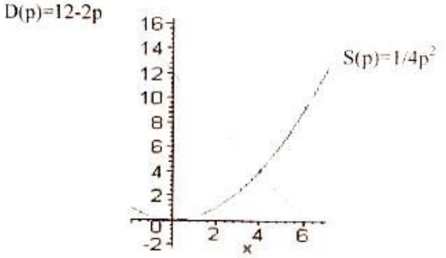
$\Leftrightarrow (p_0 + 12)(p_0 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow p_0 = -12 \ atau \ p_0 = 4$

Karena tidak mungkin negatif maka

$p_0 = 4 \ \ dan \ S(p_0) = \frac{1}{4} p_0^{\ 2} = \frac{1}{4}.4^2 = 4$

Jadi titik keseimbangan : $(p_0, S(p_0)) = (4,4)$.



b. Kemiringan kurva penawaran pada titik $(p_0, S(p_0))$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{S(p_0 + h) - S(p_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{4}(p_0 + h)^2 - \frac{1}{4} p_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{4}(p_0^{\ 2} + 2p_0 h + h^2) - \frac{1}{4} p_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{4} p_0^{\ 2} + \frac{1}{2} p_0 h + \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{4} p_0^{\ 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} p_0 h + \frac{1}{4} h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(\frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{4} h)}{h} = \lim_{h \to 0} (\frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{4} h) = \frac{1}{2} p_0 = \frac{1}{2}.4 = 2$$

c. Kemiringan kurva permintaan pada titik $(p_0, D(p_0))$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{D(p_0 + h) - D(p_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12 - 2(p_0 + h) - [12 - 2p_0]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12 - 2p_0 - 2h - 12 + p_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{2h}{h} = -2$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 10

Untuk soal nomor 1 – 10, tentukan gradien garis singgung pada kurva f di titik yang yang diberikan.

1. $f(x) = 3x^2$, (1, 3)
2. $f(x) = x^2$, (-1, 3)
3. $f(x) = x^2 + 2x$, (2, 12)
4. $f(x) = x^2 - 2x + 1$, (1, 0)
5. $f(x) = 3 - 2x - x^2$, (-1, 4)
6. $f(x) = (x+1)^2 - (2-x)^2$, (2, 9)
7. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, (1,6)
8. $f(x) = 3 - 4x^2$, (¼, 2)
9. $f(x) = 2x^2 + x - 1$, (0, –1)
10. $f(x) = 10 - x^2$, (–1, 3)
11. $f(x) = 10 - 2x^2$, (2, 2)

Untuk soal nomor 12 – 17 carilah semua dari kutva $y = f(x)$ dimana garis singgungnya adalah horizontal

12. $f(x) = 10 - x^2$
13. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
14. $f(x) = 10 - x^2$
15. $f(x) = x(50 - x)$
16. $f(x) = x^2 - 4x$
17. $f(x) = x - (\frac{x}{10})^2$

Untuk soal nomor 18 – 22 tentukan persamaan garis singgung pada kurva *f* di titik yang diberikan.

18. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, (1, 0)

19. $f(x) = x^2 - 6x$, $(-1, -4)$
20. $f(x) = 1 - x^2$, $(-2, 9)$
21. $f(x) = 2x(x+3)$, $(\frac{1}{2}, 7/2)$
22. $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $(1, -10)$

Tentukan persamaan garis normal yang bersesuaian dengan garis singgung pada kurva di soal nomor 23–26

23. $f(x) = 1 - x^2$, $(-2, 9)$
24. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $(1, 0)$
25. $f(x) = x^2 - 6x$, $(-1, -4)$
26. $f(x) = 2x^2 - 3x$, $(\frac{1}{2}, 7/2)$
27. Buktikan bahwa garis singgung pada kurva $y = x^2$ di titik (x_0, y_0) berpotongan dengan sumbu X di titik $(\frac{1}{2}x_0, 0)$
28. Carilah gradient garis singgung pada kurva

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, x \le 1 \\ 2x + 1, x > 1 \end{cases}$$

di titik $(-1, 3)$ dan $(2, 5)$

29. Carilah gradient garis singgung pada kurva $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Di titik $(2, 2/3)$

30. Sebuah bisnis berhasil baik sedemikian sehingga keuntungan total (terakumulasi) setelah t tahun adalah $1000t^2$ rupiah.

a. Berapa besar keuntungan selama tahun ketiga (yaitu, antara t = 2)?
b. Berapa laju rata-rata keuntungan marjinal selama tengah tahun ketiga (yaitu, antara t = 2 dan t = 2,5)?
c. Berapa laju keuntungan sesaat (keuntungan marjinal)pada t = 2?

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 10

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\,\%$$

Keterangan:
TP=Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 11. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 10, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

B. Kegiatan Belajar 11

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip turunan.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang turunan.
- **Materi Pokok:** Turunan

2. **Uraian Materi Turunan**

Kita telah melihat bahwa kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat merupakan manifestasi dari pemikiran dasar yang sama. Laju pertumbuhan organisme (biologi), keuntungan marjinal (ekonomi), kepadatan kawat (fisika), dan laju pemisahan (kimia) adalah versi-versi lain dari konsep yang sama. Pengertian matematis yang baik menyarankan agar kita menelaah konsep ini terlepas dari kosa kata yang khusus dan terapan yang beraneka raga mini. Kita memilih nama netral turunan. Tambahkan kata itu pada fungsi dan limit sebagai salah satu kunci dalam kalkulus.

Definisi

Turunan fungsi *f* adalah fungsi lain *f* ' (dibaca "*f* aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \text{asalkan limit ini ada}$$

Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa f terdiferensialkan di c. pencarian terunan disebut **pendiferensilan**, bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut **kalkulus diferensial**. Pencarian turunan kita ilustrasikan dengan beberapa contoh.

Contoh 11.1

Andaikan *f(x) = x – 1,* carilah *f '(1)*

Penyelesaian

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)-1]-[(1)-1]}{h}$$

$$f(4) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} (1) = 1$$

Contoh 11.2

Andaikan *f(x) = 13x – 6,* carilah *f '(4)*

Penyelesaian

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h)-6]-[13(4)-6]}{h}$$

$$f(4) = \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} (13) = 13$$

Contoh 11.3

Andaikan *f(x) = x³ + 7x,* carilah *f '(c)*

Penyelesaian

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{[(c+h)^3 - 7(c+h)] - [c^3 + 7c]}{h}$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{3c^2h + 3ch^2 + h^3 + 7h}{h}$$

$$f'(c) = 3c^2 + 7$$

Contoh 11.4

Andaikan $f(x) = \frac{1}{x}$, carilah *f '(x)*

Penyelesaian

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{h}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{x - (x+h)}{h} \cdot \frac{1}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} \right]$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{-1}{(x+h)x} \right] = \frac{-1}{x^2}$$

Contoh 11.5

Andaikan *f(x)* $= x^2 + 1$, *tentukan nilai turunan pertama fungsi f di* $x = -2$

Penyelesaian

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - ((-2)^2 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 4h + h^2 + 1 - (4+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-4 + h)$$

$$= -4$$

3. Tugas Kegiatan

Contoh 11.6

Andaikan *f(x) = x² +5,tentukan nilai turunan pertama fungsi f di x=2*
Penyelesaian

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+5-(2^2+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h+h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4+h$$

$$= 4$$

Contoh 11.7

Tentukan f'(x) jika $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}.\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}.\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{(\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}},x>0$$

Contoh 11.8. tentukan f'(x) jika $f(x)=\sqrt{x+1}\quad ,x\geq -1$

Penyelesaian:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+1-x-1}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1})}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Dari definisi turunan: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Jika x= a+h, maka bentuk di atas menjadi:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Bentuk terakhir ini dapat dimodifikasi menjadi bentuk lain yang setara,

Misalkan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$, dan seterusnya.

Contoh 11.9.

Tentukan f'(t) jika $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

Penyelesaian :

$$f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \lim_{x \to t} \frac{\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{3}{t-2}}{x - t}$$

$$= \lim_{x \to t} \frac{3(t-2) - 3(x-2)}{(x-2)(x-t)} \cdot \frac{1}{x-t}$$

$$= \lim_{x \to t} \frac{3t - 6 - 3x + 6}{(x-2)(t-2)(x-t)}$$

$$= \lim_{x \to t} \frac{-3(x-t)}{(x-2)(t-2)(x-t)}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(t-2)^2}$$

4. Tugas Belajar 11

Dalam soal—soal 1 – 22 , gunakan definisi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk mencari turunan yang ditunjuk

5. $f(x) = 2x \Rightarrow f'(1)$
6. $f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(2)$
7. $f(x) = (2x)^2 \Rightarrow f'(2)$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow f'(4)$
9. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(4)$
10. $f(x) = 2x+1 \Rightarrow f'(x)$
11. $f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x)$
12. $f(x) = 3x^2+4 \Rightarrow f'(x)$
13. $f(x) = x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)$
14. $f(x) = x^2-3x \Rightarrow f'(x)$
15. $f(x) = ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)$
16. $f(x) = x^3+5x \Rightarrow f'(x)$
17. $f(x) = x^3+2x^2+1 \Rightarrow f'(x)$
18. $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x)$
19. $f(x) = x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)$
20. $f(x) = \dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(x)$
21. $f(x) = \dfrac{x}{x-5} \Rightarrow f'(x)$
22. $f(x) = \dfrac{x+3}{x} \Rightarrow f'(x)$
23. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)$

24. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4} \Rightarrow f'(x)$

25. $f(x) = \dfrac{6}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)$

26. $f(x) = \sqrt{3x} \Rightarrow f'(x)$

27. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} \Rightarrow f'(x)$

28. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow f'(x)$

29. $f(x) = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow f'(x)$

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 11

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\,\%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 12. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 11, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

C. Kegiatan Belajar 12

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip aturan pencarian turunan.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang aturan pencarian turunan.
- **Materi Pokok:** Aturan Pencarian Turunan

1. Uraian Materi Aturan Pencarian Turunan

Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan, yakni dengan menyusun hasil bagi selisih

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Dan menghitung limitnya dapat memekan waktu dan membosankan. Kita akan mengembangkan alat yang akan memungkinkan kita untuk memperpendek proses yang berkepanjangan ini. Alat tersebut nyatanya akan memungkinkan kita untuk mencari turunan semua fungsi yang nampaknya rumit dengan cepat.

Ingat kembali bahwa turunan suatu fungsi *f* adalah fungsi lain *f*'. misalnya, jika $f(x) = x^2$ adalah rumus untuk *f*, maka $f'(x) = 2x$ adalah rumus untuk f'. Pengambilan turunan dari f (pendiferensialan f) adalah pengoperasian dari f untuk menghasilkan f'. Sering kali kita menggunakan huruf D_x untuk menunjukkan operasi ini.

Jadi, kita menuliskan $D_x f = f'$; $D_x f(x) = f'(x)$; $D_x(x^2) = 2x$. Semua teorema di bawah dinyatakan dalam cara penulisan fungsional dan dalam cara penulisan operator D_x.

Aturan Konstanta dan Aturan Pangkat gratik fungsi konstanta $f(x)$=k merupakan sebuah garis mendatar, sehingga mempunyai kemiringan nol di setiap tempat. Ini merupakan suatu cara untuk memahami teorema pertama kita.

Teorema Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x)$= k dengan k suatu konstanta, maka untuk sembarang x, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow D_x(k) = 0$

Bukti

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Grafik $f(x) = x$ merupakan sebuah garis yang melalui titik asal dengan kemiringan 1;

sehingga seharusnya kita mengharapkan turunan fungsi ini adalah 1 untuk semua x.

Teorema Aturan fungsi identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x)= 1 \Leftrightarrow D_x(x) = 1$

Bukti

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Sebelum menyatakan teorema kita berikutnya, kita ingatkan kembali sesuatu dari aljabar: bagaimana memangkatkan suatu binomial.

$(a+b)^2 = a^2 +2ab +b^2$

$(a+b)^3 = a^3 +3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 =a^4 +4a^3b +6a^2b^2 + 4ab^3 +b^4$

.

.

.

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} +b^n$

Teorema Aturan Pangkat

Jika $f(x)= x^n$, dengan n bilangan bulat positif,

maka $f'(x) = nx^{n-1} \Leftrightarrow D_x(x^n) = nx^{n-1}$

Bukti

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\ldots\ldots+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]}{h}$$

Di dalam kurung siku, semua suku kecuali yang pertama mempunyai sebagai h sebagai factor. Jadi, masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila h mendekati nol. Maka,

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

Perhatikan bahwa

$D_x(x^3) = 3x^2$

$D_x(x^9) = 9x^8$

$D_x(x^{100}) = 100x^{99}$

D_x adalah operator linear operator D_x berfungsi sangat baik apabila di terapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

Teorema Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k.f'(x) \Leftrightarrow D_x[k.\,f(x)] = k\,.\,D_x f(x)$

Dengan kata-kata, ini mengatakan bahwa suatu pengali konstanta k dapat di sebrangkan melewati operator D_x.

Bukti

Andaikan $F(x) = k.f(x)$ maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k.f(x+h)-k.f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} k.\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k.\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= k.f'(x)$$

Langkah sebelum yang terakhir adalah kritis. Kita dapat menggeser k melewati tanda limit menurut teorema limit utama.

Contoh-contoh yang mengilustrasikan hasil ini adalah

$D_x(-7x^3) = -7D_x(x^3) = -7\cdot 3x^2 = -21x^2$

Dan

$$D_x(\tfrac{4}{3}x^9) = \tfrac{4}{3}D_x(x^9) = \tfrac{4}{3}.9x^8 = 12x^8$$

Teorema Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \Leftrightarrow D_x[f(x)+g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

Dalam sebuah kalimat, hal ini mengatakan bahwa turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.

Bukti

Andaikan $F(x)=f(x)+g(x)$. maka

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

Langkah sebelum yang terakhir adalah kritis. Ini dibenarkan dengan melihat pada teorema limit utama.

Sembarang operator L, dengan sifat-sifat yang dinyatakan dalam teorema D dan E disebut linear; yakni L adalah suatu **operator linear** jika:

1. $L(kf)= kL(f)$, k adalah konstanta;
2. $L(f+g)=L(f)+L(g)$.

Operator linear akan muncul berulang-ulang dalam buku ini; D_x secara khas merupakan sebuah contoh penting. Operator linear selalu memenuhi aturan selisih $L(f-g)= L(f) - L(g)$ yang dinyatakan berikut untuk D.

Teorema Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fingsi-fungsi yang terdiferensialkan,

maka $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

$\Leftrightarrow D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$

Bukti

$D_x[f(x) - g(x)] = D_x[f(x)+ (-1)g(x)]$

$= D_x f(x) + D_x[(-1)g(x)]$

$= D_x f(x) + (-1)D_x g(x)$

$= D_x f(x) - D_x g(x)$

Contoh 12. 1.

Cari turunan dari $5x^2+7x-6$ dan $4x^6-3x^5-10x^2+5x+16$.

Penyelesaian

$D_x(5x^2+7x-6)=D_x(5x^2+7x)-D_x(6)$

$=D_x(5x^2)+D_x(7x)-D_x(6)$

$=5D_x(x^2)+7D_x(x)-D_x(6)$

$=5\cdot 2x+7\cdot 1-0$

$=10x+7$

Untuk mencari turunan-turunan berikutnya, kita perhatikan bahwa teorema-teorema pada jumlah dan selisih meluas sampai sejumlah berhingga suku. Jadi,

$D_x(4x^6-3x^5-10x^2+5x+16)$

$=D_x(4x^6)-D_x(3x^5)-D_x(10x^2)+D_x(5x)+D_x(16)$

$=4D_x(x^6)-3D_x(x^5)-10D(x^2)+5D_x(x)+D_x(16)$

$=4(6x^5)-3(5x^4)-10(2x)+5(1)+0$

$=24x^5-15x^4-20x+5$

Metode pada contoh 1 memungkinkan kita untuk mencari turunan sembarang polynomial. Jika anda mengetahui Aturan Pangkat dan melakukan apa yang datang secara alamiah, anda hampir memperoleh hasil yang benar. Jika anda dapat menulis jawaban tanpa sembarang langkah intermediate (antara), itu pun baik.

Aturan Hasil Kali dan Hasil Bagi sekarang kita siap untuk suatu kejutan. Turunan dari suatu hasil kali fungsi tidak sama dengan hasil kali dari turunan fungsi-fungsi.

Teorema Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

$\Leftrightarrow D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$

Ini harus di hafalkan dalam kata-kata sebagai berikut:turunan hasil kali dua fungsi adalah fungsi pertama dikalikan turunan fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turuna fungsi pertama.

Bukti andaikan $F(x) = f(x)g(x)$ maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h).\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x).\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

Penurunan yang baru saja diberikan mengandalkan pada dua hal. Pertama, taktik penambahan dan pengurangan pada hal yang sama, yakni $f(x+h)g(x)$. kedua, pada akhirnya kita menggunakan fakta bahwa

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Ini hanyalah suatu penerapan teorema, yang mengatakan bahwa keterdiferensialan pada suatu titik.

Contoh 12.2.

Cari turunan $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$ menggunakan aturan hasil kali. Periksa jawaban dengan mengerjakan soal itu secara lain.

Penyelesaian

$$D_x[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)] = (3x^2 - 5)D_x(2x^4 - x) + (2x^4 - 5)D_x(3x^2 - 5)$$
$$= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + (2x^4 - x)(6x)$$
$$= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Untuk memeriksa, pertama kita kalikan dan kemudian ambil turunan.

$$(3x^2 - 5)(2x^4 - x) = 6x^6 - 10x^4 - 3x^3 + 5x$$

Jadi,

$$D_x[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)] = D_x(6x^6) - D_x(10x^4) - D_x(3x^3) + D_x(5x)$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Teorema Aturan Hasil Bagi

Andaikan f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan $g(x) \neq 0$. Maka,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Yakni,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Kami sangat menyarankan agar anda menghafalkan ini dalam kata-kata, sebagai berikut:turunan suatu hasil bagi adalah sam dengan penyebut dikali turunan pembilang dikurangi pembilang dikali tturunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut.

Bukti

Andaikan $F(x) = f(x)/g(x)$ maka

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$=\left[g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\right]\frac{1}{g(x)g(x)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Contoh 12. 3.

Cari turunan $\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$

Penyelesaian

$$D_x\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right]=\frac{(x^2+7)D_x(3x-5)-(3x-5)D_x(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$$

$$=\frac{(x^2+7)(3)-(3x-5)(2x)}{(x^2+7)^2}$$

$$=\frac{-3x^2+10x+21}{(x^2+7)^2}$$

Contoh 12. 4.

Cari $D_x y$ jika $y=\frac{2}{x^4+1}+\frac{3}{x}$

Penyelesaian

$$D_x y = D_x\left(\frac{2}{x^4+1}\right) + D_x\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \frac{(x^4+1)D_x(2) - 2D_x(x^4+1)}{(x^4+1)^2} + \frac{xD_x(3) - 3D_x(x)}{x^2}$$

$$= \frac{(x^4+1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4+1)} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}$$

Contoh 12. 5.

Tunjukkan bahwa aturan pangkat berlaku untuk pangkat bulat negative;yakni,

$D_x (x^{-n}) = - nx^{-n-1}$

Penyelesaian

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n.0 - 1.nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Kita lihat sebagai bagian dari contoh 4 bahwa $D_x(3/x) = - 3x^2$. Sekarang kita telah memiliki cara lain untuk hal yang sama.

$$D_x\left(\frac{3}{x}\right) = D_x(3x^{-1}) = 3D_x(x^{-1}) = 3(-1)x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 12

Dalam soal-soal 1 – 44, carilah $D_x y$ menggunakan aturan –aturan pencarian turunan.

1. $y=2x^2$
2. $y=3x^3$
3. $y=\pi x^2$
4. $y=\pi x^3$
5. $y=2x^{-2}$
6. $y= - 3x^{-4}$
7. $y=\pi/x$

8. $y = \alpha/x^3$
9. $y = 100/x^5$
10. $y = \dfrac{3\alpha}{4x^5}$
11. $y = x^2+2x$
12. $y = 3x^4+x^3$
13. $y = x^4+x^3+x^2+x+1$
14. $y = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2+\pi x+\pi^2$
15. $y = \pi x^7 - 2x^5 - 5x^{-2}$
16. $y = x^{12}+5x^{-2} - \pi x^{-10}$
17. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-4}$
18. $y = 2x^{-6}+x^{-1}$
19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x}$
20. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$
21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$
22. $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$
23. $y = x(x^2+1)$
24. $y = 3x(x^3-1)$
25. $y = (2x+1)^2$
26. $y = (-3x+2)^2$
27. $y = (x^2+2)(x^3+1)$
28. $y = (x^4 - 1)(x^2+1)$
29. $y = (x^2+17)(x^3 - 3x+1)$
30. $y = (x^4+2x)(x^3+2x^2+1)$
31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x+1)$
32. $y = (3x^2+2x)(x^4 - 3x+1)$
33. $y = \dfrac{1}{3x^2+1}$

34. $y = \dfrac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

36. $y = \dfrac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

38. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$

39. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

40. $y = \dfrac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

42. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. Jika f(0) = 4, $f'(0) = -1$, g(0) = –3 dan g'(0) = 5.
    Carilah: (a) (f.g)'(0);
    (b) (f+g)'(0);
    (c) (f/g)'(0).

44. Gunakan aturan hasil kali untuk menuujukkan bahwa
    $D_x[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot D_x f(x)$.

45. Cari persamaan garis singgung pada $y=x^2 - 2x+2$ didtik (1,1).

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 12

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 13. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 12, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

D. Kegiatan Belajar 13

Petunjuk Belajar

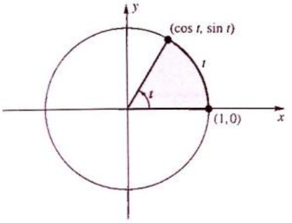
1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip turunan sinus dan cosinus.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang turunan sinus dan cosinus.
- **Materi Pokok:** Turunan Sinus dan Cosinus

1. Uraian Materi Turunan Sinus dan Cosinus

Dunia modern kita berjalan di atas roda. Pertanyaan-pertanyaan tentang roda yang berputar dan kecepatan titik padanya secara tidak terelakkan menuju ke pengkajian sinus dan cosinus, serta turunan-turunannya. Untuk persiapan pengkajian tentang materi ini, akan sangat baik jika kita menelaah gambar berikut



Gambar di atas akan mengingatkan kita pada definisi fungsi-fungsi sinus dan cosinus. Dalam penjelasan berikut ini, t harus di bayangkan sebagai bilangan yang mengukur panjang suatu busur pada lingkaran satuan, atau secara setara, sebagai bilangan radian dalam sudut yang berpadanan. Jadi, f(t) = sin t dan g(t) = cos t adalah fungsi-fungsi yang mempunyai daerah asal dan daerah hasil berupa bilangan real. Kita dapat meninjau masalah pencarian turunan-turunannya.

Beberapa Rumus Turunan

Kita memilih untuk menggunakan *x* dari pada t sebagai peubah dasar kita. Untuk mencari D_x(sin *x*), kita bersandar pada definisi turunan dan menggunakan identitas tambahan untuk sin (*x*+h)

$$D_x(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(- six \frac{1-\cosh}{h} + \cos x \frac{\sinh}{h} \right)$$

$$= (-\sin x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cosh}{h} \right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h} \right]$$

Untuk mengakhiri penurunan kita, kita mempunyai dua limit untuk dihitung. Hasil kalkulator disedikan pada tabel berikut:

H	$\frac{1-\cosh}{h}$	$\frac{\sinh}{h}$
1,0	0,45970	0,84147
0,5	0,24483	0,95885
0,1	0,04996	0,99833
0,01	0,00500	0,99998
.	.	.
.	.	.
.	.	.
0	?	?
.	.	.
.	.	.
.	.	.
–0,01	–0,00500	0,99998
–0,1	–0,04996	0,99833
–0,5	–0,24483	0,95885

–1,0	–0,45970	0,84147

Tabel di atas memberikan gambaran secara intuisi, sehingga menujukkan bahwa:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

Jadi,

$D_x(\sin x) = (-\sin x).0 + (\cos x).\ 1 = \cos x$

Demikian pula,

$$D_x(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h+\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$D_x(\cos x)=\lim_{h\to 0}\left(-\cos\frac{1-\cos h}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$=(-\cos x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right]-(\sin x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right]$$

$$=(-\cos x)\cdot 0-(\sin x)\cdot 1$$

$$=-\sin x$$

Kita dapat ringkas hasil-hasil ini dalam sebuah teorema berikut.

Teorema Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

Fungsi–fungsi f(x) = sin x dan g(x) = cos x keduanya terdiferensialkan; Sehingga diperoleh

$D_x(\sin x) = \cos x$

$D_x(\cos x) = -\sin x$

Contoh 13.1.

Cari $D_x(3 \sin x - 2 \cos x)$.

Penyelesaian

$D_x(3 \sin x - 2 \cos x) = 3 D_x(\sin x) - 2 D_x(\cos x)$

$= 3 \cos x + 2 \sin x$

Contoh 13.2.

Cari $D_x(\tan x)$

Penyelesaian

$$D_x(\tan x) = D_x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

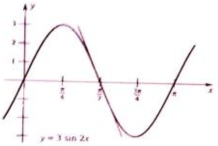
$$= \frac{\cos x\, D_x(\sin x) - \sin x\, D_x(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \qquad =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Contoh 13. 3.

Cari persamaan garis singgung pada grafik y=3 sin 2x di titik (½π, 0).



Penyelesaian

Kita memerlukan tueunan dari sin 2x; sayangnya pada saat ini kita hanya tahu bagaiman mencari turunan dari sin x. akan tetapi, sin 2x = 2 sin x cos x. jadi,

D_x (3 sin 2x)= D_x (6 sin x cos x)

=6 D_x(sin x cos x)

=6 [sin x D_x(cos x) + cos x D_x(sin x)]

=6 [(sin x) (- sin x) + cos x cos x]

=6[$\cos^2$ x – $\sin^2$ x]

=6 cos 2x

Pada x = π/2, turunan ini bernilai – 6 ,yang merupakan kemiringan garis singgung yang di inginkan. Persamaan garis ini adalah

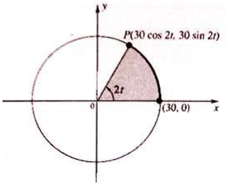
$$y - 0 = -6\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Contoh 13. 4.

Perhatikan kincir ria yang jari-jarinya 30 dm,berputar berlawanan arah perputaran jarum jam dengan kecepatan sudut 2 radian/detik. Seberapa cepat dudukan pada pelek naik (dalam arah tegak) pada saat itu berada 15 dm di aras garis mendatar yang melalui pusat kincir?

Penyelesaian

Kita dapat memisalkan bahwa kincir berpusat di titik asal dan bahwa dudukan p berada di (30,0)pada saat t=0 seperti pada gambar di bawah ini:



Jadi pada saat t, P telah bergerak melalui sudut 2t radian sehingga mempunyai koordinat (30 cos 2t, 30 sin 2t). laju P naik adalah turunan koordinat tegak 30 sin 2t di ukur pada nilai t yang sesuai. Menurut contoh 13. 3

$D_x(30 \sin 2t) = 60 \cos 2t$

Nilai t yang sesuai untuk penghitungan turunan ini adalah t= π/12 karena 30 sin(2 · π/2) = 15. Kita simpulkan bahwa pada t=π/12, dudukan P naik pada

$$60\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 60\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 51{,}96 \;\; dm/\det ik$$

Pembuktian Dua Pernyataa Limit

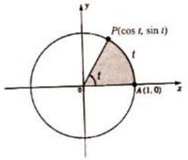
Segala sesuatu yang telah kita lakukan dalam subbab ini tergantung pada dua pernyataan limit,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \quad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Pernyataan ini memerlukan bukti.

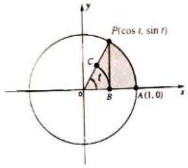
Bukti

Tinjau diagram (yang sekarang sudah dikenal) pada gambar berikut:



perhatikan bahwa apabila t→0, titik P bergarak ke arah (1, 0) sehingga $\lim_{t \to 0} \cos t = 1 \quad \lim_{t \to 0} \sin t = 0$

Selanjutnya, untuk $-\pi/2<t<\pi/2$, $t\neq0$, gambarkanlah ruas garis tegak BP dan busur melingkar BC seperti pada gambar berikut:



Jika t<0 daerah yang di gelapkan akan di cerminkan terhadap sumbu x. Sehingga Luas (juring OBC) ≤ luas (ΔOBP) ≤ luas (juring OAP)

Dari rumus ½ bh (luas segitiga) dan ½ $r^2|t|$(luas juring) diperoleh $\frac{1}{2}(\cos t)^2|t| \leq \frac{1}{2}\cos t|\sin t| \leq \frac{1}{2}(1)^2|t|$

Atau setelah mengalikan dengan 2 dan membagi dengan bilangan positif $|t|\cos t$ dan mendapatkan (sin t)/t adalah positif,

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{\cos t}$$

Ketaksamaan ganda ini hanya memerlukan Teorema Apit.

Apabila kita menerapkannya, kita peroleh

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Sebagai yang pertama dari hasil yang kita klaim.

Hasil yng kedua secara mudah menyusul dari yang pertama

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$
$$=\lim_{t\to o}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\lim_{t\to 0}\sin t}{\lim_{t\to 0}(1+\cos t)}$$
$$=1\cdot 0/2=0$$

Walaupun penggunaan utama dua pernyataan limit ini adalah untuk membuktikan rumus-rumus turunan, kita dapat juga menggunakannya untuk menhhitung limit-limit lain.

Contoh 13. 5.

Cari limit-limit berikut

(a) $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}$ $\quad (b)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$

Penyelesaian

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t}$$

(a) $=\lim_{t\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}$

$$=\frac{0}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}$$

(b) $$= \frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}$$

$$= \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}$$

Pada satu langkah sebelum yang terakhir, kita menggunakan kenyataan bahwa apabila x→0 maka 5x→0.

Jadi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 13

Dalam soal-soal 1 – 12, carilah $D_x y$

1. y= 2 sin x +3 cos x

2. y= $\sin^2$x

3. y=$\sin^2$x + $\cos^2$x

4. y=1 – $\cos^2$x

5. y=sec x= 1/cos x

6. y=csc x = 1/sin x

7. $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

8. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

9. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

10. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$

11. y=x^2 cos x

12. $y = \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2 + 1}$

13. Cari persamaan garis singgung pada y= cos x di x=1

14. Cari persamaan garis singgung pada y= cot x di x=π/4

15. Tinjau kincir ria dari contoh 4. Pada laju berapa dudukan pada pelek bergerak secara mendatar pada saat t=π/4 detik (yakni pada saat dudukan mencapai puncak kincir).

16. Sebuah kincir ria berjati-jari 20 desimeter berputar berlawanan arah jarum jam pada kecepatan sudut sebesar 1 radian/detik. Satu dudkan pada pelek berada di (20,0) pada saat t=0

    (a) berapa koordinatnya pada saat t=π/6

    (b) seberapa cepat dudukan itu naik (secara tegak)pada saat t=π/6?

    (c) sebsrapa cepat dudukan itu naik (secara tegak)pada saat naik dengan laju yang tercepat.

Dalam soal 17 – 22 , ikiuti prosedur dari contoh 5 untuk mencari tiap limit.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

18. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin 3\theta}{2\theta}$

19. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 3\theta}{\tan \theta}$

20. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\sin \ 2\theta}$

21. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cot \pi\theta \sin \theta}{2 \sec \theta}$

22. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(\sin 3t)^2}{2t}$

23. Perhatikan bahwa kurva $y = \sqrt{2} \sin x$ dan $y = \sqrt{2} \cos x$ saling berpotongan tegak lurus pada sebuah titik tertentu debgan $0<x<\pi/2$

24. pada saat t detik, pusat sebuah pelampung gabus berada sejauh 2 sin t sentimeter di atas (atau dibawah) permukaan air. Berapa kecepatan pelampung pada saat t=0, π/2, dan π?

25. Gunakan definisi turunan untuk memperlihatkan bahwa D_x (sin x^2)= 2 cos x^2.

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 13

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 14. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 13, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

E. Kegiatan Belajar 14

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip aturan rantai.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang aturan rantai.
- **Materi Pokok:** Aturan Rantai

2. Uraian Materi Aturan Rantai

Pada pasal sebelumnya talah di bahas bagaimana menentukan. Turunan dari fungsi polinimial dan fungsi rasional. Tetapi seringkali kita harus menurunkan fungsi berpangkat tertentu, misalnya $y = [f(x)]^3$

Dengan mengunakan aturan hasil kali tertentu saja $y' = \frac{dy}{dx}$ dapat kita peroleh secara mudah, yaitu

$$\frac{dy}{dx} = y' = D[f(x).f(x).f(x)]$$

$$= f'(x).f(x).f(x) + f(x).f'(xc).f(x) + f(x).f(x).f'(x)$$

$$= 3[f(x)]^2.f'(x)$$

Tidak seperti $D(x^3)=3x^2$, dalam $D(f(x))^3$ terdapat penambahan factor f '(x) yang asalnya dapat di jelaskan dengan menuliskan

$y=[f(x)]^3$ dalam bentuk y = u^3 dan u= f(x), dari bentuk ini memberikan:

$$y=u^3 \ maka \ \frac{dy}{du}=D[u]^3=3u^2$$

Dan $u=f(x) \ maka \ \frac{du}{dx}=D[f(x)]=f'(x),$

Dari kedua penurunan maka di dapat hubungan berikut:

$$\frac{dy}{dx}=3[f(x)]^2.f'(x)$$

$$=3u^2.f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Persamaan $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ ini dinamakan aturan rantai, yang berlaku untuk dua fungsi terdeferensial y = g(u) dan u = f(x).

Bentuk lain dari penulisan aturan rantai untuk kedua fungsi diatas adalah sebagai berikut

$$D_x y=D_u y.D_x u$$

Contoh 14. 1

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari y= $(3x+5)^{17}$

Penyelesaian :

Bila fungsi berpangkat 17 ini di uraikan akan terdiri dari 18 suku dan beberapa koefisiennya terdiri dari 14 digit, akan sangat panjang jika di turunkan dengan cara hasil kali biasa. Tetapi dengan menggunakan aturan rantai kita tulis:

y= g(u)=u^{17} dan u = $f(x)$= $3x$ +5 maka

$$\frac{dy}{dx}=17u^{16} \quad dan \ \frac{du}{dx}=3$$

Sehingga di peroleh

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$= (17u^{16})3$

$= 17(3x+5)^{16}.3$

$= 51(3x+5)^{16}$

Secara teoritis aturan rantai dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 1.

Andaikan bahwa terdeferensialkan di x dan g terdeferensialkan di $f(x)$, maka fungsi komposisi $h = g_o f$ yang didefinisikan dengan $h(x) = g(f(x))$ terdeferensialkan di a dan turunannya adalah

$h'(x) = D[g(f(x))] = g'(f(x)).f'(x)$

Bukti:

Misalkan diberikan fungsi yang terdeferensialkan y = g(u) dan u= $f(x)$ atau $y= g(f(x))$, kita akan mengitung $\dfrac{dy}{dx}$

$y= g(u)$ dan $u= f(x)$ memberikan $\Delta y = g(u+\Delta u) - g(u),$

$\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$ dan $u + \Delta x = f(x+\Delta x$

$\dfrac{dy}{dx} = g'(u) = g'(f(x))$ dan $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$ sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x) - g(f(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} . \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g)u)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Karena Δx$\to$0 dan u adalah fungsi dari x maka Δu$\to$0

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$atau\ \ h'(x) = D[g(f(x))] = g'(f(x)).f'(x)$

Contoh 14. 2.

Jika $f(x)=x^3$ dan $g(x)=2x+1$ maka $f'(x)=3x^2$ dan $g'(x)=2$

$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^3=8x^3+6x^2+6x+1$

Sehingga $(f \circ g)'(x)=24x^2+12x+6=6(4x^2+2x+1)=6(2x+1)^2$ atau

$(f \circ g)(x)=f(g(x))$ maka

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x)).g'(x) \\
&= 3[g(x)]^2.g'(x) \\
&= 3(2x+1)^2.2 \\
&= 6(2x+1)^1
\end{aligned}
$$

Contoh 14. 3.

Jika $h(x)=g(f(x))$ dimana f dan g terdeferensialkan dan $f(2)=17$, $f'(2)=-3$, $g'(17)=5$ maka menurut aturan rantai $h'(2)=g'(f(2)).f'(2)=g'(17).f'(2)=5(-3)=-15$

Contoh 14. 4.

Jika $y=\sin(x^2+5x-3)$ tentukan $\frac{dy}{dx}$

Penyelesaian:

Misalkan $y=\sin u$ dan $u=x^2+5x-3$, maka

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \cos u.(2x+5) \\
&= [\cos(x^2+5x-3)](2x+5)
\end{aligned}
$$

Contoh 14. 5

Tentukan $D_t y$ jika $y=\cos(\sin t)$

Penyelesaian

Misalkan $y=\cos u$ dan $u=\sin t$, maka

$$
\begin{aligned}
D_t y &= D_u y.D_t u \\
&= -\sin u.\cos t \\
&= [-\sin(\sin t)].\cos t
\end{aligned}
$$

Contoh 14. 6

Untuk mencari turunan dari fungsi F(x)=sin{cos(3–2x)}. Kita dapat menyusun fungsi komposisi F(x)= $h \circ g \circ f$ atau $F(x) = \{g[f(x)]\}$

Dimana:

F=h(u)=sin u, u=g(v)=cos v dan v=f(x)=3–2x yang memberikan

$$\frac{dy}{du} = \frac{dF}{du} = \cos u, \; \frac{du}{dv} = -\sin v, dan \; \frac{dv}{dx} = 2$$

$$sehingga \; \frac{du}{dx} = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = \cos u(-\sin v).(2)$$

$$= 2\cos(\cos v)(\sin(3-2x))$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos\{\cos(3-2x)\}\sin(3-2x)$$

Contoh 14. 7

Tentukan fungsi turunan pertama dari f(x)=cos(sin(tan x))

Penyelesaian:

Misalkan f(u)=cos u, u(t)=sin t, dan t(x)=tan x, maka:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = -\sin(\sin(\tan(x)).\cos(\tan x).\sec^2 x$$

Aturan Pangkat yang Diperumum

dari aturan rantai

$$D[g(f(x))] = g'(f(x)).f'(x)$$

Bias kita substitusikan $f(x)$=u dan f '(x)=du/dx maka diperoleh bentuk

$$D_x g(u) = g'(u)\frac{du}{dx}$$

Sekarang misalkan g(u)=u^n dimana n bilangan bulat, karena g'(u)=nu^{n-1}, maka diperoleh

$D_x u^n = nu^{n-1}.du/dx$

Yang merupakan aturan rantai untuk fungsi berpangkat jika u= f(x) adalah suatu fungsi yang terdefernsialkan, maka

$$D_x u^n = D_x[f(x)]^n$$
$$= n[f(x)]^{n-1} . f'(x), n-1 \geq 0$$

Bila n-1<0 harusnya disyaratkan f(x)≠0. Persamaan terakhir merupakan aturan pangkat yang di perumum yang secara persis dapat di tuliskan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema

Juka r adalah bilangan rasional, maka

$D_x[f(x)]^r = r[f(x)]^{r-1} \cdot f'(x)$ terdeferensial.

Contoh 14. 8

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y= (3x^2 +2x^2-5)^{25}$

penyelesaian :

Misalkan $y= u^{25}$, dan $u=3x^4+2x^3-5$

Maka $y' = \frac{dy}{dx} = 25u^{24}$ dan $u' = \frac{du}{dx} = 12x^3 = 6x^2$

Sehingga menurut aturan rantai,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= 25u^{24}(12x^3 + 16x^2)$$
$$= 25(3x^4 + 2x^3 - 5)^{24}(12x^3 + 6x^2)$$

Contoh 14. 9

Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut:

a. $y=(x-\sin x)^3$

b. $y=\cos^2(x^{3)}$

Penyelesaian:

a. $D_x y= D(x\text{-}\sin x)^3=3(x\text{-}\sin x)^2(1\text{-}\cos x)$

b. $D_x y=D(\cos^2(x^3))=2\cos x^3\ 3x^2=6x^2\cos x^3$

Contoh 14. 9

Carilah $D(\sqrt{4-x^2})$

Penyelesaian:

$$D(\sqrt{4-x^2} = D(4-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}.D(4-x^2)$$

$$= \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Contoh 10. 10

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ $jika\ \ y = \left[5x + \sqrt[3]{(3x-1)^4}\right]^{10}$

Penyelesaian:

Misalkan y=u^{10} dan u=5x+(3x-1)$^{4/3}$

Maka $\frac{dy}{dx} = 10u^9$ dan $\frac{du}{dx} = \left(5 + 4\sqrt[3]{(3x-1)^4}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 .D\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 \left(5 + \tfrac{4}{3}(3x-1)^{\frac{1}{3}}.3\right)$$

$$= 10\left(5x + (3x-1)^{\frac{4}{3}}\right)^9 .\left(5 + 4\sqrt[3]{(3x-1)^4}\right)$$

Contoh 14. 11

Sebuah obyek bergerak dibidang sehingga koordinatnya setelah t detik adalah (2 cos t, 3 sin t) di ukur dalam kaki.

a. Perlihatkan bahwa obyek tersebut bergerak mengikuti jalur elips

b. Dapatkan ekspresi jarak obyak tersebut dari titik asal pada saat t.

c. Seberapa cepat obyak tersebut bergerak menjauhi titik asal pada t=π/4

Penyelesaian :

a. Diketahui pada saat t, koordinat-x obyek : $x = 2 \cos t$, dan koordinat-y obyek $y = 3 \sin t$. akan diperlihatkan bahwa obyek tersebut mengikuti jalur elips.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{4\cos^2 t}{4} + \frac{9\sin^2 t}{9} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

(persamaan sebuah elips)

Jadi obyek tersebut bergerak mengikuti jalur elips

b. Jarak obyek tersebut dari titik asal pada saat t memenuhi persamaan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}$$

c. Laju obyek tersebut bergerak menjauhi titik asal pada saat t adalah $D_t r$. misalkan $u = x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 9\sin^2 t$,maka

$$D_t r = D_u r(u).D_t u = \sqrt{u}.(4.2\cos t - \sin t + 9.2\sin t \cos t)$$

$$= \frac{-8\cos t.\sin t + 18\cos t \sin t}{2\sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}} = \frac{10\cos t \sin t}{2\sqrt{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}}$$

Pada saat $t = \pi/2$

$$D_t r(\pi/4) = \frac{10\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)}{2\sqrt{4\cos^2(\pi/4) + 9\sin^2(\pi/4)}} = \frac{10.(1/\sqrt{2})^2}{2\sqrt{4(1/\sqrt{2})^2 + 9(1/\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{10.1/2}{2\sqrt{2 + 9/2}} \approx \frac{5}{15} = 0{,}98 \; kaki/\mathbf{det}\,ik$$

Tugas Kegiatan Belajar 14

Untuk soal no 1 – 5 tuliskan fungsi komposisi yang sesuai dengan fungsi berikut:

1. $F(x) = (x+10)^5$
2. $G(x) = \sin^2 x$
3. $H(x) = \cos(x^3)$
4. $Y(x) = \sqrt{(2x^3 + 5x)}$
5. $H(x) = \tan(\sin x^2)$

Untuk soal no 6 – 26 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari setiap fungsi berikut:

6. $y = x \sin \frac{1}{x}$
7. $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$

8. $y=\cos(\cos(\cos 2x))$

9. $y=(\sqrt{x^2+1})(\sin(x^3))$

10. $F(x)=\cos(x^2+5x-3)$

11. $H(x)=\cos(\cos(\cos x))$

12. $B(t)=(1-\sin t)(3+\cos t)$

13. $c(t)=\dfrac{1+\cos 2x}{2-\sin x}$

14. $F(x)=(x^2+3x-10)^6$

15. $y=\sqrt{3+\tan^2(2x)}$

16. $G(x)=\tan^3(5+\sqrt{x})$

17. $h(x)=\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$

18. $A(t)=(t^2+3t-4)^3(5-2t)^3$

19. $K(t)=\tan^2(\sin^2 t)$

20. $y=(x^2+3x-1)^4$

21. $y=(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^5$

22. $y=(2x^5-3x^4)^3$

23. $L(u)=\tan^2(\sin^2 u)$

24. $y=(\cos^3 x)^{10}$

25. $y=(\sin^4 x)^{11}$

26. $y=\left(\sqrt{x^3+4x^2+20}\right)^7$

Carilah persamaangaris singgung pada kurva berikut:

27. $y=\sin(x^3)$, di titik(0,0)

28. $y=\left(\dfrac{1+x}{2-x^2}\right)^2$, di titik(1,4)

29. $V=\cos(\cos x)$, di titik(π,1)

30. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, di titik(1,1)

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 14

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:

TP= Tingkat Penguasaan

A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan

B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 15. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 14, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Kegiatan Belajar 15

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

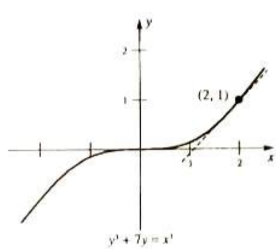
Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu maenjelaskan konsep dan prinsip turunan implisit dan eksplisit.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan sifat dan aturan tentang turunan implisit dan eksplisit.
- **Materi Pokok:** Turunan Impilisit dan Eksplisit

1. Uraian Materi Turunan Impilisit dan Eksplisit

Pendeferensialan implisit

Dengan demikian, anda seharusnya mampu memeriksa bahwa grafik dari $y^3 + = 7y\ x^3$



Tampak seperti apa yang di perlihatkan dalam gambar. Tentu saja titik (2, 1) terletak pada grafik, dan tampaknya terdapat sebuah garis singgung yang terumuskan dengan baik pada titik tersebut. Bagaimana kita akan mencari kemiringan garis singgung ini?

Anda dapat menjawab, hitung saja dy/dx pada titik ini. Akan tetapi, itulah kesukarannya;kita tidak tahu bagaimana mencari dy/dx dalam situasi ini.

Elemen baru dalam masalah ini adalah bahwa kita menghadapi sebuah persamaan yang secara eksplisit tidak dapat di pecahkan untuk y. Apakah mungkin mencari dy/dx dalam kedaan seperti ini? Ya. Diferensialkan kedua ruas persamaan.

$$y^3 + 7y = x^3$$

Terhadap x dan samakan hasil-hasilnya. Dalam melakukan ini, kita anggap bahwa persamaan yang diberikan memang menentukan y sebagai suatu fungsi x (hanya saja kita tidak tahu bagaimana mencarinya secara eksplisit). Jadi setelah menggunakan aturan rantai pada suku pertama, kita peroleh

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Yang terakhir dapat di pecahkan untuk dy/dx sebagai berikut,

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Perhatikan bahwa ungkapan kita untuk dy/dx melibatkan x dan y, suatu kenyataan yang sering menyulitkan. Akan tetapi, jika kita hanya ingin mencari kemiringan pada suatu titik yang kedua koordinatnya diketahui, tidak ada kesukaran. Pada (2, 1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Kemiringan adalah 6/5.

Metode yang baru di ilustrsikan untuk mencari dy/dx tanpa terlebih dahulu menyelesaikan secara jelas persamaan yang diberikan untuk y dalam bentuk x disebut **pendeferensialan implisit**. Akan tetapi, apakah metode tersebut sah –apakah ia memberikan jawaban yang benar?.

Sebuah contoh yang dapat di periksa untuk memberikan bukti guna kebenaran metode tersebut, perhatikan contoh berikut, yang dapat di kerjakan dalam dua cara.

Contoh 15. 1

Cari dy/dx jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

Penyelesaian

METODE 1

Kita dapat menyelesaiakan persamaan yang diberikan untuk y secara eksplisit sebagai berikut,

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$= \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

METODE 2. Pendeferensialan implisit.

Kita samakan turunan – turunan kedua ruas dari

$4x^2y - 3y = x^3 - 1$

Setelah menggunaka aturan hasil kali pada suku pertama, kita peroleh

$$4x^2 . \frac{dy}{dx} + y.8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Walaupun jawaban ini kelihatannya berlainan dengan hasil metode 1, kedua turunan tersebut ekuivalen. Untuk melihat ini, substitusikan $y = (x^3-1)/(4x^2-3)$ kedalam ungkapan untuk dy/dx yang baru saja kita peroleh.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8xy}{4x^2-3}=\frac{3x^2-8x\dfrac{x^3-1}{4x^2-3}4}{4x^2-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^4-9x^2-8x^4+8x}{(4x^2-3)^2}=\frac{4x^4-9x^2+8x}{(4x^2-3)^2}$$

Beberapa kesukaran yang tak terlihat jika sebuah persamaan dalam *x* dan *y* menentukan fungsi *y* = *f*(*x*) dan jika fuungsi ini terdeferensialkan, maka metode pendeferensialan implisit akan menghasilkan ungkapan yang benar untuk *dy*/*dx*. Akan tetapi, perhatikan terdapat dua "jika" besar dalam pernyataan ini.

Pertama perhatikan persamaan

$x^2 + y^2 = -1$

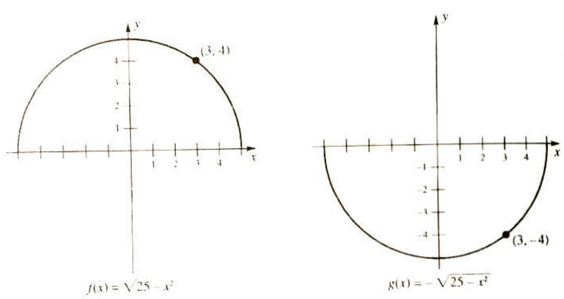
Persamaan ini tidak mempunyai penyelesaian dank arena itu tidak menentukan suatu fungsi.

Sebaliknya, $x^2 + y^2 = 25$

Menentukan fungsi-fungsi $y = f(x) = \sqrt{25-x^2}$

dan fungsi $y = g(x) = -\sqrt{25-x^2}$.

Grafik fungsi-fungsi tersebut diperlihatkan dalm gambar berikut:



Untunglah, kedua fungsi ini terdiferensialkan pada (-5, 5).

Pertama perhatikan *f*. fungsi ini memenuhi

$$x^2+[f(x)]^2=25$$

Apabila kita diferensialkan secara implisit dan diselesaikan untuk f'(x), kita peroleh

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Perlakuan serupa yang lengkap terhadap g(x) menghasilkan

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Untuk keperluan praktis, kita dapat memperoleh kedua hasil ini secara serempak dengan pendiferensialan secara implisit dari $x^2 + y^2 = 25$. Ini memberikan

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & jika\ y = f(x) \\ \dfrac{-x}{-\sqrt{25 - x^2}} & jika\ y = g(x) \end{cases}$$

Secara wajar, hasil-hasilnya identik dengan yang diperoleh di atas.

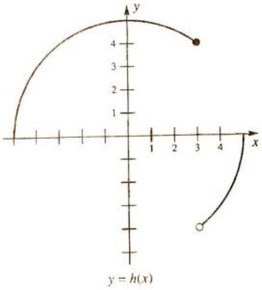
Perhatikan bahwa seringkali cukup untuk mengetahui $dy/dx = -x/y$ agar dapat menerapkan hasil-hasil kita. Andaikan kita ingin mengetahui kemiringan garis singgung pada lingkaran $x^2+y^2 = 25$ apabila $x = 3$. Nilai-nilai yang berpadanan adalah 4 dan –4.
Kemiringan di (3, 4) dan (3, –4), yang masing-masing diperoleh dengan mensubstitusikan dalam $-x/y$, adalah –3/4 dan ¾.
Untuk keadaan yang sulit, kita tunjukkan bahwa

$$x^2 + y^2 = 25$$

Menentukan banyak fungsi lain. Misalnya, tinjau fungsi h yang didefinisikan oleh

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & jika\ -5 \le x \le 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} & jika\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Fungsi ini memenuhi $x^2 + y^2 = 25$ karena $x^2 + [h(x)]^2 = 25$. Akan tetapi, fungsi ini bahkan tidak kontinu di $x = 3$ sehingga tentu saja tidak mempunyai turunan disana.



Dalam contoh-contoh berikut, kita anggap bahwa persamaan yang diberikan menentukan satu atau lebih fungsi-fungsi terdiferensialkan yang turunan-turunannya dapat dicari dengan pendiferensialan implisit. Perhatikan bahwa dalam tiap kasus, kita mulai dengan mengambil turunan tiap ruas persamaan yang diberikan terhadap peubah yang sesuai. Kemudian kita gunakan aturan rantai seperti yang diperlukan.

Contoh 15. 2.

Cari dy/dx jika $x^2 + 5y^3 = x + 9$.

Penyelesaian

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

Contoh 15. 3.

Cari $D_t y$ jika $t^3 + t^2 y - 10y^4 = 0$.

Penyelesaian

$D_t(t^3+t^2y - 10y^4)= D_t(0)$

$3t^2+t^2D_ty + y(2t) - 40y^3D_ty=0$

$D_ty(t^2 - 40y^3)= - 3t^2 - 2ty$

$$D_t y = \frac{3t^2 + 2ty}{t^2 - 40y^3}$$

Contoh 15. 4.

Cari persamaan garis singgung pada kurva

$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$, di titik (0, 1)

Penyelesaian untuk menyederhanakan, kita gunakan notasi y' untuk dy/dx. Apabila kita mendiferensialkan kadua ruas dan menyamakan hasilnya, kita peroleh

$3y^2y' - x(2yy') - y^2 - (\sin xy)(xy' + y) = 0$

$y'(3y^2 - 2xy - x \sin xy)=y^2 + y \sin xy$

$$y' = \frac{y^2 + y\sin xy}{3y^2 - 2xy - x\sin xy}$$

Di (0,1), $y'= 1/3$. Jadi, persamaan garis singgung di (0, 1) adalah

$$y - 1 = 1/3(x - 0)$$

Aturan pangkat.

Kita telah pelajari bahwa $D_x(x^n)= nx^{n-1}$, dengan n bilangan bulat sebarang. Sekarang kita perluas untuk kasus dengan n berupa bilangan rasional sembarang.

Teorema **Aturan pangkat**

Andaikan r bilangan rasional sembarang. Maka

$D_x(x^r) = rx^{r-1}$

Bukti oleh karena r rasional, maka r dapat di tuliskan sebagai p/q, dengan p dan q bilangan bulat dan q>0. Andaikan

$y=x^r = x^{p/q}$

Maka

$y^q = x^p$

Dan dengan pendiferensialan implisit,

$qy^{q-1} D_x y = px^{p-1}$

Jadi,

$$D_x y = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p-1+p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Kita telah memperoleh hasil yang di kehendaki, tetapi—secara jujur—kita harus menunjukkan kekurangan dalam argumentasi kita. Dalam langkah pendiferensialan implisit kita anggap bahwa $D_x y$ ada—yaitu, bahwa $y = x^{p/q}$ terdifeerensialkan. Kita pindahkan yang lengkap ke lampiran .

Contoh 15. 5.

Cari $D_x y$ jika $y = 2x^{11/3} + 4x^{3/4} - 6x^{2/3}$.

penyelesaian pertama kali kita tulis

$D_x y = 2D_x(x^{11/3}) + 4D_x(x^{3/4}) - 6D_x(x^{-2/3})$

Kemudian, menggunakan aturan yang baru saja di buktikan,

$$D_x y = 2.\tfrac{11}{3}x^{8/3} + 4.\tfrac{3}{4}x^{-1/4} - 6(-\tfrac{2}{3})x^{-5/3}$$

$$= \tfrac{22}{3}x^{8/3} + 3x^{-1/4} + 4x^{-5/3}$$

Contoh 15. 6.

Jika $y = \sqrt{t^4 - 3t + 17}$, cari dy/dx.

Penyelesaian pikirkan ini sebagai

$y = u^{1/2}$ dan $u = t^4 - 3t + 17$

Dan terapkan aturan rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$= \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right)(4t^3 - 3)$$
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(4t^3 - 3)$$
$$= \frac{4t^3 - 3}{2\sqrt{t^4 - 3t + 17}}$$

2. Tugas Kegiatan Belajar 15

Dengan menganggap bahwa tiap persamaan dalam soal-soal 1 – 12 mendefinisikan sebuah fungsi x terdiferensialkan, cari $D_x y$ menggunakan pendiferensialan implisit.

1. $y^2 - x^2 = 1$

2. $9x^2 + 4y^2 = 36$

3. $xy = 1$

4. $x^2 + \alpha^2 y^2 = 4\alpha^2$, dengan α suatu konstanta

5. $xy^2 = x - 8$

6. $x^2 + 2x^2 y + 3xy = 0$

7. $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

8. $x^2 y = 1 + y^2 x$

9. $\sqrt{(5xy)} + 2y = y^2 + xy^3$

10. $x\sqrt{y+1} = xy + 1$

11. $xy + \sin(xy) = 1$

12. $\cos(xy^2) = y^2 + x$

Dalam soal-soal 13 – 18, cari persamaan garis singgung di titik yang di tunjuk.

13. $x^3y + y^3x = 30$; (1,3)

14. $x^2y^2 + 4xy = 12y$; (2,1)

15. $\sin(xy) = y$; $(\pi/2,1)$

16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$; (1, 0)

17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$; (1, -1)

18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5$; (4, 1)

Dalam soal-soal 19 – 32, cari dy/dx.

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$

20. $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$

21. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

22. $y = \sqrt[4]{2x+1}$

23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$

24. $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$

25. $y = \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$

26. $y = (3x - 9)^{-5/3}$

27. $y = \sqrt{x^2 + \sin x}$

28. $y = \sqrt{x^2 \cos x}$

29. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 \sin x}}$

30. $y = \sqrt[4]{1 + \sin 5x}$

31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x}$

32. $y = \sqrt{\tan^2 x + \sin^2 x}$

33. Jika $s^2t + t^3 = 1$, cari ds/dt dan dt/ds

34. Jika $y = \sin(x^2) + 2x^3$, cari dx/dy.

35. Sketsakan grafik lingkaran $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$ dan kemudian cari persamaan- persamaan garis singgung yang melalui titik asal.

36. Cari persamaan garis normal (garis tegak lurus pada garis singgung) pada kurva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ di (3,1).

37. Andaikan $xy + y^3 = 2$. Pendiferensialan implisit dua kali terhadap x masing-masing menghasilkan:

(a). $xy' + y + 3y^2 y' = 0$;

(b). $xy'' + y' + y' + 3y^2y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Selesaiakan (a) untuk y' dan substitusikan (b), kemudian selesaikan untuk y''.

38. Cari y'' jika $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$.

39. Cari y'' di(2 , 1) jika $2x^2y - 4y^3 = 4$.

40. Gunakan pendiferensialan implisit dua kali untuk mencari y'' di (3,4) jika $x^2 + y^2 = 25$.

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 15

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP=Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda lanjutkan kegiatan belajar 16. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 15, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

G. **Kegiatan Belajar 16**

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri dan periksalah tingkat penguasaan Anda. Ulangi pengerjaan tugas yang tersedia sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menjelaskan konsep penggunaan turunan.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini mahasiswa mampu menggunakan definisi untuk menyelesaikan kasus-kasus penggunaan turunan.
- **Materi Pokok:** Penggunaan Turunan

1. Uraian Materi Penggunaan Turunan

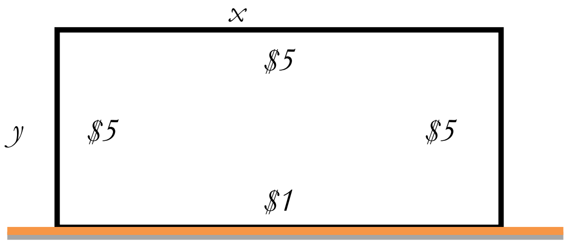
Pada baagian ini kita akan membahas penggunaan konsep turunan yang telah dibahas dibagian sebelumnya. Pengertian nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu fungsi dalam interval tertutup dan hubungannya dengan turunan pertama dari fungsi itu sendiri, akan dibahas diawal. Sedangkan bagian selanjutnya akan dibahas pada komponen-komponen yang diperlukan dalam mensketsa grafik suatu fungsi, seperti naik turunannya grafik dsn kecekungan darigrafik.

- **Maksimum dan Minimum dari Fungsi pada Interval Tertutup**

Didalam terapan, kita sering berhadapan dengan masalah mencari nilai, aksimum (terbesar) atau minimum dari suatu besaran. Sebagai cntoh, kita perhatikan msalah berikut:

"Ahmad bermaksud membangun kandang hewan pada suatu lahan persegi panjang yang salah satu sisinya dibatasi oleh dinding tembok. Apabila biaya yang dibutuhkan untuk membangun tiga sisi lainnya adalah $5 per meter,

sedangkan biaya untuk mengecet dinding tembok adalah \$1 per meter, dan jumlah uang yang dimiliki untuk membangun kandang hewan itu \$180 tentukan ukuran kandang hewan agar memperoleh luas yang sebsar mungkin".



Gambar di atas merupakan sketsa dari masalah di atas. Luas daerah kandang hewan, A =f*(x)* diberikan sebagai fungsi dari panjang x oleh

$$f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x),\ 0 \le x \le 30 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dari sini, pertanyaan luas daerah terbesar yang mungkin dari kandang hewan itu ekivalen dengan masalah matematika mencari nilai mkasimum yang dicapai oleh fungsi $f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x)$ pada interval tertutup [0 , 30]. Untuk memahami konsep nilai mkasimum atau nilai minimum dari suatu fungsi pada interval tertutup, perhatikan definidi berikut ini.

- **Definisi Nilai Minimum dan Maksimum**

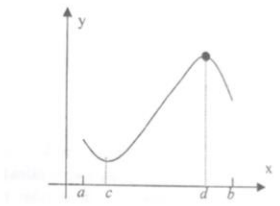
Jika c dalam interval terutup [a, b], maka f(c) dikatakan nilai minimum dari f(x) pada [a, b] jika f(c) ≤ f(x) untuk semua x dalam [a, b].

Jika d dalam interval tertutup [a , b], maka f(d) dikatakan nilai maksimum dari f(x) pada [a , b] jika f(x) ≤ f(d) untuk semua x dalam [a, b].

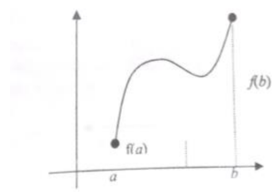
Berdasarkan definisi di atas, jika f(c) adalah nilai minimum dan f(d) nilai maksimum dari f(x) pada [a , b] maka

f(c) ≤ f(x) ≤ f(d)..(2)

untuk semua nilai x dalam [a,b]. Secara geometri, (c, f(c)) merupakan titik terendah dan (d,f(d)) titik tertinggi pada kurva y= f(x), seperti yang di ilustrasikan dalam gambar berikut.



f(c) merupakan nilai minimum & f(d) nilai maksimum dari f(x) pada [a,b]



Nilai maksimum dan minimum terjadi di titik ujung interval [a , b]

- **Teorema sifat nilai minimum dan maksimum:**

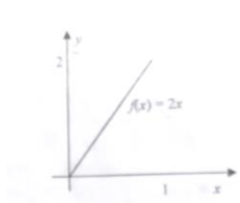
Jika fungsi kontinu pada interval tertutup [a,b], maka terdapat nilai c dan d dalam [a,b] sehingga f(c) adalah nilai minimum dan f(d) nilai maksimum dari f pada [a,b].
Kekontinuan dari fungsi pada masalah kandang hewan di atas,

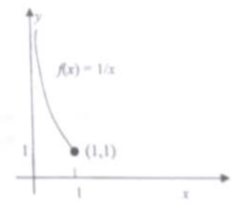
$$f(x) = \frac{3}{5}x(30 - x)$$

Pada interval tertutup [0, 30] menjamin bahwa nilai maksimumnya ada dan dicapai di suatu titik dalam interval [0, 30].
Sekarang misalkan fungsi f terdefinisi pada interval I. Contoh 1 dan 2 di bawah ini menunjukkan bahwa jika f tidak kontinu atau I tidak tertutup, maka f bisa gagal mencapai nilai maksimum dan minimum di titik I. Oleh karena itu kedua syarat dalam teorema 1 itu merupakan syarat perlu.

Contoh 16. 1.
Misalkan fungsi kontinu f(x) = 2x terdefinisi hanya untuk setengah interval buka $0 \leq x < 1$. Dari grafik yang di tunjukkan dalam gambar 4.4 jelas bahwa f mancapai nilai minimum 0 di x= 0. Tetapi f(x) = 2x

tidak mencapai nilai maksimum di setiap titik selang [0,1). Calon nilai maksimum yang mungkin adalah 2 di titik x = 1, tetapi f (1) tidak terdefinisi.





Contoh 16. 2.

Fungsi f yang di definisikan pada interval tertutup [0, 1] dengan aturan

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & jika\ 0<x\leq 1\\ 1 & jika\ x=0\end{cases}$$

Tidak kontinu pada [0, 1], sebab $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$ tidak ada. Fungsi ini benar-benar mencapai nilai minimum 1 di titik x= 1, tetapi tidak mencapainilai maksimum pada [0,1], sebab untuk setiap pemilihan bilangan positif x dan sangat dekat ke nol, 1/x dapat di buat lebih besar dari pemilihan itu.

- **Maksimum dan Minimum**

Kita telah mengetahui bahwa fungsi kontinu f benar-benar mencapai nilai maksimum dan minimum pada interval tertutup [a,b], pertanyaannya sekarang adalah:dimana tepatnya letak dari nilai-nilai ini? Kita menyelesaikan masalah kandang hewan di atas berdasarkan pada asumsi berikut, yang di motivasi oleh geometri. Fungsi $f(x)=\frac{3}{5}x(30-x)$ mencapai nilai maksimum pada [0,30] di suatu titik dalam interval itu dimana garis singgung di titik itu merupakan garis horizontal (mendatar). Teorema 2 dan 3 dalam subbab ini menyadiakan suatu dasar untuk metode yang kita gunakan disini.

Definisi:

(a) Nilai f(c) adalah nilai maksimum local dari fungsi f jika f(x) ≤ f(c) untuk semua x yang cukup dekat ke c.

(b) Nilai f(c) adalah nilai minimum local dari fungsi f jika f(x) ≥ f(c) untuk semua x yang cukup dekat ke c. nilai maksimum local atau nilai minimum local dari f biasanya disebut ekstrim local dari f.

- **Teorema maksimum dan minimum local**

Jika f terdeferensialkan di c dan terdefinisi pada suatu interval buka yang memuat c dan jika f(c) nilai maksimum local atau nilai minimum local dari f, maka f'(c) = 0.

Dengan demikian ekstrim local dari fungsi terdifaransialkan pada interval buka dapat terjadi hanya di suatu titik dimana turunannya dalah nol, sehingga garis singgung dari grafik di titik itu adalah horizontal.

Bukti teorema:

Misalkan f(c) nilai maksimum local dari f. asumsikan f'(c) ada, ini berarti bahwa limit kiri san limit kanan,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{dan} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Keduanya ada dan sama dengan f'(c).

Jika h>0, maka

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0,$$

Sebab,f(c) ≥ f(c + h) untuk semua bilangan- bilangan kecil positif dari h. apabila kita mengambil limit pada kedua ruas dari pertidaksamaan itu dan h →0, maka berdasarkan teorema apit pada limit diperoleh

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Dengan cara yang sama untuk h<0, kita memperoleh bahwa

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0,$$

Dengan demikian,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq \lim_{h \to 0^-} 0 = 0$$

Karena f'(c)≤0 dan f'(c) ≥0, maka disimpulkan bahwa f'(c)= 0.

Di x=0 bukan ekstrim meskipun turunannyaa nol di sana

Hati- hati konvers dari teorema adalah salah. Fakta bahwa f'(c)=0 tidak cukup untuk menyatakan bahwa f(c) merupakan suatu ekstrim local. Untuk contoh, perhatikan fungsi f(x)= x^3. Turunannya adalh nol di x=0. Tetapi dari gambar di atas menunjukkan bahwa f(0) bukan merupakan ekstrim likal dari f.

Dengan demikian, persamaan f'(c)=0 merupakan syarat perlu untuk f(c) menjadi nilai maksimum atau minimum lpkal untuk fungsi f yang terdeferensialkan pada suatu interval .

Ini bukan merupakan syarat cukup. Kita memberikan syarat-syarat cukup untuk maksimum dan minimum local.

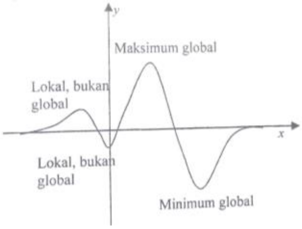
- **Maksimum dan minimum mutlak (global)**

Dalam kebanyakan masalah-masalah optimasi, kita lebih tertarik pada nilai-nilai maksimum dan minimum mitlak atau global dari suatu fungsi kontinu yang di berikan, di bandingkan dengan ekstrim local.

Definisi:

Misalkan f suatu dengan domain D. f(c) dikatakan nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum global dari f pada D jika f(c)≥f(x) untuk semua x dalam D. secara singkat, f(c) merupakan nilai terbesar dari f pada D.

Ini seharusnya jelas bagaimana minimum global dari f didefinisikan. Mengilustrasikan ekstrim local dan ekstrim global. Di satu pihak, setiap ekstrim global tentu saja merupakan local. Sedangkan di pihak lain, grafik pada gambar di bawah ini menunjukkan bahwa ekstrim local bukan merupakan ekstrim global.



Beberapa ekstrim adalah global; lainnya local

Teorema berikut mengatakan pada kita bahwa nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak dari fungsi kontinu f pada interval tutup [a,b] terjadi di salah satu dari titik-titik ujung a atau b atau di titik kritis dari f. bilangan c dalam domain dari f disebut titik kritis dari f jika salah satu dari : (a) f ' (c) =0, atau (b) f ' (c) tidak ada.

- **Teorema maksimum dan minimum mutlak**

Misalkan bahwa f(c) adalah nilai maksimum mutlak (minimum mutlak) dari suatu fungsi kontinu f pada interval tertutup [a,b]. Maka c adalah titik kritis dari f atau salah satu dari titik –titik ujung a dan b.

Bukti :

Hasil ini mengikuti dari terema di atas jika c bukan di titik ujung dari [a,b], maka f(c) adalah suatu ekstrim local dari f pada interval buka (a,b). dalam kasus ini, teorema mengakibatkan f'(c)=0, asalkan bahwa f terdiferensialkan di c.

Sebagai akibat dari teorema ini, kita dapat mencari nilai maksimum dan minimum (mutlak) dari fungsi f pada interval tertutup [a,b] sebagai berikut.

1. Mencari titik –titik kritis dari f ,titik-titik itu diperoleh dari f'(x)=0 dan f'(x) tidak ada.

2. Daftarkan nilai-nilai dari x yang menghasilkan ekstrim dari f yang mungkin: kedua titik ujung a dan b dan titik –titik kritis yang terletak dalam [a,b].
3. Evaluasi f(x) di masing-masing titik dalam daftar yang di peroleh (2)
4. Tentukan nilai f yang terkecil dan yang terbesar.

Nilai terbesar dalam langkah 4 merupakan nilai maksimum mutlak dari f, sedangkan nilai terkecil adalah minimum mutlak. Prosedur ini kita namakan metode maksimum minimum interval tertutup.

Contoh 16. 3.

Untuk pembahasan terakhir dari masalah kandang hewan, mari kita terapkan metode maksimum-minimum interval tertutup ini untuk mencari nilai maksimum dan minimum dari fungsi terdiferensialkan

$$f(x) = \tfrac{3}{5}x(30-x) = \tfrac{3}{5}(30x - x^2)$$

pada interval tertutup[0,30].

Penyelesaian :

Turunan dari f adalah $f'(x) = \tfrac{3}{5}(30-2x)$, yang sama dengan nol hanya di titik x=15 dalam [0,30]. Masukkan kedua titik-titik ujung ke dalam daftar nilai-nilai x yang hanya dapat menghasilkan ekstrim dari f, yaitu 0,15 dan 30. Kita evaluasi nilai fungsi f untuk masing-masing nilai x;

F(0) = 0 ←minimum mutlak

F(15)=135 ←maksimum mutlak

F(30)=0 ←minimum mutlak

Dengan demikian, nilai maksimum dari f (x) pada [0, 30] adalah 135 (di capai di x= 15), dan nilai minimum adalah 0 (dicapai di x=0 dan x=30).

Contoh 16. 4.

Carilah nilai maksimum dan minimum dari

$F(x) = 2x^3 – 3x^2 – 12x + 15$, pada interval tertutup [0,3].
Penyelesaian :
Turunan dari f adalah

$$F'(x) = 6x^2 – 6x – 12 = 6(x^2 – x – 2)=6(x – 2)(x+1).$$

Titik-titik kritis dari f adalah penyelesaian dari persamaan
$6(x – 2) (x+1)=0$
Dan bilangan c sehingga f'(c) tidak ada. Tidak ada nilai c untuk pernyataan terakhir, sehingga titik-titkik kritis dari f di x= -1 dan di x= 2. Karena x=-1 di luar domain dari f, maka titik kritis dari f hanya di x=2. Masukkan kedua titik-titik ujung, kedalam daftar nilai-nilai x yang hanya dapat menghasilkan ekstrim dari f; 0,2 dan 3. Kita evaluasi nilai fungsi f untuk masing-masing x:

$F(0)=15$ ←maksimum mutlak

$F(2)=-5$ ←minimum mutlak

$F(3)=6$

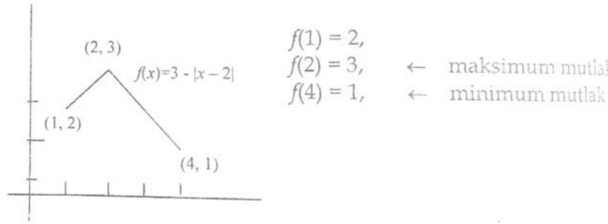
Dengan demikian, nilai maksimum dari f pada [0,3] adalah f(0)=15, dan nilai minimumnya adalah f(2)=-5.
Dalam contoh 4 fungsi f terdiferensialkan di mana-mana. Contoh 5 dan 6 di bawah ini mengilustrasikan kasus suatu ekstrim di titik kritis dimana fungsi tidak terdiferensialkan di titik itu.
Contoh 16. 5.
Carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x)=3 - |x – 2|$ pada interval [1,4].
Penyelesaian :
Jika $x\leq 2$ maka $x – 2 \leq 0$, sehingga

$$F(x)=3 – (2 – x) = x +1$$

Jika $x \geq 2$ maka $x – 2 \geq 0$, sehingga

$$F(x)= 3 – (x – 2) =5 – x .$$

Grafik dari fungsi f di tunjukkan pada gambar di bawah. Titik-titik kritis dari f pada [1,4] terjadi hanya di x = 2, sebab nilai f'(x) adalah +1 dan – 1 (dan tidak pernah nol) untuk setiap x dalam interval itu, sehingga f(2) tidak ada .(mengapa?) dengan mengevaluasi f di titik kritis ini dan di kedua titik ujung menghasilkan



Contoh 16. 6.

Carilah nilai maksimum dan minimum dari

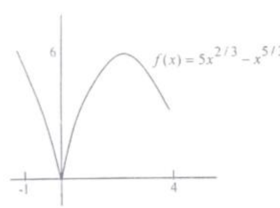
$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

pada interval tutup [- 1, 4].

Penyelesaian :

Turunan dari f menghasilkan

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x) = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$



Oleh karena itu f mempunyai dua titik kritis dalam interval itu: x=2 dimana f'(x)=0, dan x=0 dimana f' tidak ada(grafik f mempunyai garis singgung vertical di (0,0]. Apabila kita meng evaluasi f di kedua titik kritis ini dan di kedua titik ujungnya, kita mendapatkan

F(-1)=6, ←maksimum mutlak

F(0)=0, ←minimum mutlak

F(2)=(5)($2^{2/3}$) – ($2^{5/3}$)≈ 4, 76

F(4)=(5)($4^{2/3}$) – ($4^{5/3}$)≈2,52.

Dengan demikian nilai maksimum f(-1) = 6 terjadi di titik ujung. Nilai minimum f(0)=0 terjadi di suatu titik dimana f tidak terdiferensialkan.

2. Tugas Kegiatan Belajar 16

Untuk soal nomor 1 sampai dengan 10, nyatakan apakah fungsi yang diberikan mencapai nilai maksimum atau nilai minimum (atau keduanya)pada interval yang diberikan .

1. $F(x)= 1 - x$; [-1,1]
2. $F(x)=2x+1$; [-1,1]
3. $F(x)= |x|$; [-1,1]
4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; [0,1]
5. $F(x)= |x - 2|$; [1,4]
6. $F(x) = 5 - x^2$; [-1,2]
7. $F(x)= x^3+1$; [-1,1]
8. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; $[-\infty,\infty]$
9. $f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$; [2,3]
10. $f(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$; [0,1]

Untuk soal nomor 11 sampai dengan 30, carilah nilai maksimum dan nilai minimum yang dicapai oleh fungsi yang di berikan pada interval tertutup.

11. $F(x)= 3x - 2$; [-2,3]
12. $G(x)= 4 - 3x$; [-1,5]
13. $H(x)= 4 - x^2$; [1,3]
14. $F(x)= x^2+ 3$; [0,5]

15. $G(x)= (x-1)^2$; [-1,4]
16. $H(x) = x^2 + 4x + 7$; [-3,0]
17. $F(x)=x^3 - 3x$; [-2,4]
18. $G(x)=2x^3 - 9x^2 + 12x$; [0,4]
19. $f(x) = x + \frac{4}{x}$; [1,4]
20. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$
21. $F(x)= |2x-3|$; [1,2]
22. $F(x)=5+|7-3x|$; [1,5]
23. $F(x)=|x+1|+|x-1|$; [-2,2]
24. $f(x) = \frac{x}{x+1}$; [0,3]
25. $F(x)= x^{1/2} - x^{3/2}$; [0,4]
26. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+3}$; $[-2,5]$
27. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$; $[-1,8]$
.
28. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; [0,3]
29. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; $[-1,1]$
.
30. $F(x)=x(2-x)^{1/3}$; [1,3]

3. Penilaian

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 16

$$TP = \frac{A}{B} \times 100\ \%$$

Keterangan:
TP=Tingkat Penguasaan

A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Keterangan:
TP= Tingkat Penguasaan
A= Banyak soal yang berhasil diselesaikan
B= Banyak soal yang disediakan pada tugas belajar.
Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda telah menyelesaiakn materi kalkulus diferensial. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 16, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

4. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

5. Bacaan Yang Dianjurkan

Endang Dedi, 2005. Kalkulus I. Universitas Negeri Malang. Malang: UM Press.

DAFTAR PUSTAKA

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

BIODATA PENULIS

Lalu Sucipto lahir pada tanggal 22 Juni 1981 di dusun Bajok Desa Kopang Rembige Kecamatan Kopang Kabupaten Lombok Tengah Nusa Tenggara Barat. Putra dari Bapak H. Lalu Durahman (Almarhum) dan Ibu Hj. Hasanah. Istri dari Nur'aini ini telah dianugrahi tiga orang buah hati yaitu: Lalu Ahmad Azam, Lalu Akrim El-Mubaarok, Baiq Fathimah Almmeara.

Pendidikan formal diawali lulus SDN 3 Kopang lulus tahun 1993, kemudian lulus SMPN 1 Kopang tahun 1996 dan lulus SMUN 1 Kopang tahun 1999. Melanjutkan pendidikan ke IKIP Mataram mengambil Jurusan Pendidikan Matematika, lulus dan mendapat gelar Sarjana Pendidikan (S.Pd) pada Agustus 2003. Melanjutkan pendidikan Pasca Sarjana ke Universitas Negeri Malang (UM) mengambil Jurusan Pendidikan Matematika, lulus dan mendapat gelar Master Pendidikan pada 2009. Mulai menjadi tenaga pengajar/Dosen Tetap di Universitas Islam Negeri Mataram (dahulu IAIN Mataram) sejak tahun 2009.