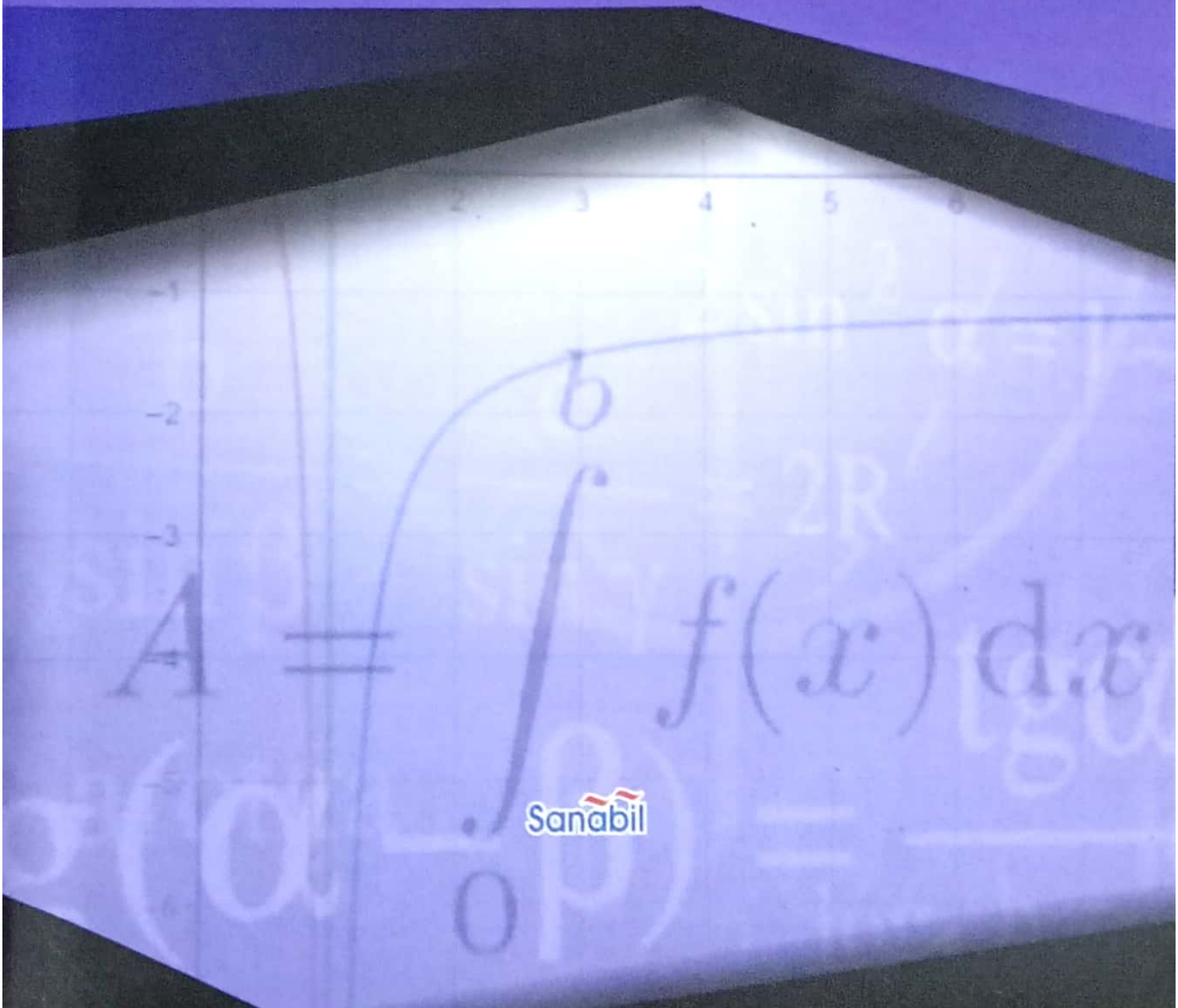
Lalu Sucipto, M.Pd.

Buku Ajar

KALKULUS INTEGRAL



Sanabil

BUKU AJAR

KALKULUS INTEGRAL

Lalu Sucipto, M.Pd

KALKULUS INTEGRAL

Sanabil

Kalkulus Integral

Penulis : Lalu Sucipto, M.Pd
Editor : Samsul Irpan, M.Pd
Layout : Tim FTK
Desain Cover : Sanabil Creative

ISBN : 978-623-7881-63-6
Cetakan 1 : November 2020

Penerbit:
Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabil.web.id

PRAKATA PENULIS

Alhamdulillah, Segala puji dipanjatkan kehadirat Allah SWT dengan limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penyusunan bahan ajar ini dengan judul "*Kalkulus Integral*" dapat diselesaikan.

Bahan ajar ini dapat diselesaikan juga karena adanya bantuan dan kerja sama yang baik dari berbagai pihak. Penulis dengan segala ketulusan menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada yang terhormat:

1. Ibu Dr. Hj. Lubna, M.Pd Selaku Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram.
2. Seluruh pimpinan di FTK dan seluruh dosen UIN Mataram, khususnya dosen Program Studi Tadris Matematika yang telah dengan tulus berdiskusi dengan penulis untuk terwujudnya bahan ajar ini.
3. Semua pihak yang penulis tidak dapat sebutkan yang telah banyak membantu penulis hingga selesai.

Penulis berdo'a semoga semua bantuan dan amal baik semua pihak yang diberikan kepada penulis mendapat balasan kebaikan yang berlipat ganda dari Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa bahn ajar ini masih banyak terdapat kekurangan dan perlu penyempurnaan, namun semoga dapat bermanfaat untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika.

Mataram, 10 Oktober 2020

Penulis

Lalu Sucipto

PENGANTAR DEKAN

Alhamdulillah, segala puji hanya milik Allah SWT. Shalawat & Salam semoga senantiasa terlimpah pada teladan agung Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari kebangkitan kelak. Berkat rahmat dan hidayah Allah SWT, program penulisan buku ajar dan referensi telah dapat dirampungkan.

Kewajiban dosen untuk menulis dan memproduksi buku, baik buku ajar maupun buku referensi sejatinya sudah diatur dalam UU Nomor 12 tahun 2012 tentang perguruan tinggi dan UU Nomor 14 tahun 2005 tentang Guru dan Dosen dan sejumlah regulasi lainnya. Pasal 12 UU No.12 tahun 2012 dengan tegas menyebutkan bahwa dosen secara perseorangan atau kelompok wajib menulis buku ajar atau buku teks yang diterbitkan oleh perguruan tinggi sebagai salah satu sumber belajar.

Kompetisi Buku Ajar dan Referensi (KOBAR) Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram tahun 2020 adalah upaya Fakultas untuk berkontribusi dalam impelementasi undang-undang di atas, dimana secara kuantitatif, grafik riset dan publikasi dosen PTKI masih harus terus ditingkatkan. Tujuan lainnya adalah meningkatkan mutu pembelajaran dengan mewujudkan suasana akademik yang kondusif dan proses pembelajaran yang efektif, efisien dengan kemudahan akses sumber belajar bagi dosen dan mahasiswa. Publikasi ini juga diharapkan men-*support* peningkatan karir dosen dalam konteks kenaikan jabatan fungsional dosen yang ujungnya berdampak pada peningkatan status dan peringkat akreditasi program studi dan perguruan tinggi.

Secara bertahap, Fakultas terus berikhtiar meningkatkan kuantitas dan kualitas penerbitan buku. Pada tahun 2019 berjumlah 10 judul buku dan meningkat cukup signifikan tahun 2020 menjadi 100 judul yang terdistribusi dalam 50 judul buku ajar dan 50 judul buku referensi. Ikhtiar Fakultas tidak berhenti pada level publikasi, namun berlanjut pada pendaftaran Hak Kekayaan Intelektual (HKI) dosen di Direktorat Jenderal Kekayaan Intelektual (DJKI) Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia RI, sehingga tahun 2020 menghasilkan 100 HKI dosen.

Kompetisi buku ajar dan referensi tahun 2020 berorientasi interkoneksi-integrasi antara agama dan sains, berspirit Horizon Ilmu UIN Mataram dengan inter-multi-transdisiplin ilmu yang mendialogkan metode dalam *Islamic studies* konvensional berkarakteristik deduktif-normatif-teologis dengan metode *humanities studies* kontemporer seperti sosiologi, antropologi, psikologi, ekonomi, hermeneutik, fenomenologi dan juga dengan metode ilmu eksakta (*natural scincies*) yang berkarakter induktif-rasional. Dari 100 judul buku, terdapat 10 judul tematik yang menjawab problem epistimologis pendidikan Islam, terutama terkait misi Kementerian Agama RI seperti moderasi Islam (Islam *washathiyah*), pendidikan inklusi, pendidikan anti korupsi, pendidikan karakter, pendidikan multikultural, etno-pedagogik, pembelajaran DARING (dalam jaringan), pendidikan & isu gender, ragam pesantren (pesisir, enterprenuer), dan tema teraktual yaitu merdeka belajar dan kampus merdeka.

Mewakili Fakultas, saya berterima kasih atas kebijakan dan dukungan Rektor UIN Mataram Prof. Dr. H Mutawali, M.Ag dan jajarannya, kepada 100 penulis yang telah berkontribusi dalam tahapan kompetisi buku tahun 2020, dan tak terlupakan juga editor dari dosen sebidang dan penerbit yang tanpa sentuhan *zauq*nya, *perfomance* buku tak akan semenarik ini. Tak ada gading yang tak retak; tentu masih ada kurang, baik dari substansi maupun teknis penulisan, di 'ruang' inilah kami harapkan saran kritis dari khalayak pembaca. Semoga agenda ini menjadi *amal jariyah* dan hadirkan keberkahan bagi sivitas akademika UIN Mataram dan ummat pada umumnya.

Mataram, 29 Oktober 2020 M
12 Rabi'ul Awal 1442 H

Dekan

Dr. Hj. Lubna, M.Pd.
NIP. 196812311993032008

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

KEMENTERIAN AGAMA RI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MATARAM
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jln Gajah Mada No.100 Jempong Baru, Mataram, Telp. (0370) 620783/620784 Fax. (0370)620784., http://www.ftk.uinmataram.ac.id/ dan email: ftk@uinmataram.ac.id

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)
(Permen Ristekdikti Nomor 44 Tahun 2015 Pasal 12)

No. Dokumen : 11		**No. Revisi:** 2	**Tanggal Penyusunan:** 3 Februari 2020
Matakuliah : Kalkulus Integral	**Semester :** 1 (*A/B/C/D)	**Bobot (SKS) :** 3	**Kode MK :** MTK 2362
Program Studi : Tadris Matematika		**Dosen Pengampu :** Lalu Sucipto	
Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL) :	- Mampu menyelesaikan masalah pembelajaran dengan memanfaatkan teknologi/aplikasi matematika untuk meningkatkan mutu pembelajaran matematika dan untuk keperluan studi lanjut. - Menguasai konsep dan prinsip ilmu matematika yang diperlukan untuk pembelajaran matematika pada satuan pendidikan dasar dan menengah. - Menguasai konsep dan prinsip matematika yang diperlukan untuk studi kejenjang berikutnya. - Menguasai konsep dan prinsip penggunaan aplikasi matematika untuk pengembangan teknologi pembelajaran matematika dan untuk keperluan studi lanjut. - Menguasai konsep dan prinsip ilmu matematika secara umum.		
Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK) :	- Mahasiswa dapat memahami semua topic yang diberikan pada matakuliah kalkulus integral - Mahasiswa dapat menerapkan pemahaman yang telah didapat untuk menyelesaikan soal-soal yang ada pada mata kuliah yang bersangkutan atau mata kuliah yang akan datang. - Mahasiswa memiliki sikap tanggungjawab dalam menyelesaikan tugas.		
Deskripsi Matakuliah :	Mata kuliah ini akan membahas tentang anti turunan (integral) tak tentu, integral tentu, teorema dasar kalkulus untuk integral, teknik pengintegralan, dan penerapkan Integral.		

(1) Minggu Ke-	(2) Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran (Kompetensi Dasar)	(3) Bahan Kajian (Materi)	(4) Metode Pembelajaran	(5) Alokasi Waktu	(6) Pengalaman Belajar Siswa (Deskripsi	(7) Kriteria Penilaian (Indikator)
1	---	Kontrak kuliah dan Test Awal	Ceramah, diskusi dan test	3 × 50 menit	**Mengamati**: wacana yang terdapat dalam pebelajaaran **Mendiskusikan**: Pertanyaan permaslahan yang muncul. **Memprediksi**: hasil diskusi kempok kecil dan membuat kesimpulan	Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
2	Menguasai konsep dan prinsip integral taktentu sebagai anti turunan	Anti Turunan	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
3	Menguasai konsep dan prinsip integral taktentu dan pengintegralan fungsi trigonometri untuk	Integral Tak-tentu	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
4	Menguasai konsep dan prinsip notasi jumlah dan sigma	Notasi Jumlah dan Sigma	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
5	Menguasai konsep dan prinsip integral tentu dan tafsiran geometrinya	Luas Poligon-poligon Dalam dan Luar	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
6	Menguasai konsep dan prinsip jumlah Riemann	Jumlah Riemann	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
7	Menguasai konsep dan prinsip integral Rieman (integral tentu)	Integral Tentu Rieman	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
8	UTS					
9	Menguasai konsep dan prinsip teorema dasar kalkulus	Teorema Dasar Kalkulus	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit	**Mengamati**: wacana yang terdapat dalam pebelajaaran	Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
10	Menguasai konsep dan prinsip bantuan dalam penghitungan integral tentu	Teknik Subtitusi	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.

(1) Minggu Ke-	(2) Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran (Kompetensi Dasar)	(3) Bahan Kajian (Materi)	(4) Metode Pembelajaran	(5) Alokasi Waktu	(6) Pengalaman Belajar Siswa (Deskripsi	(7) Kriteria Penilaian (Indikator)
11	Menguasai konsep dan prinsip pengintegralan dengan subtitusi	Integral Parsial	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit	**Mendiskusikan**: Pertanyaan permaslahan yang muncul. **Memprediksi**: hasil diskusi kempok kecil dan membuat kesimpulan	Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
12	Menguasai konsep dan prinsip subtitusi yang merasionalkan dan Pengintegralan Parsial	Subtitusi yang Merasionalkan dan Pengintegralan Parsial	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
13	Menguasai konsep dan prinsip integral tentu untuk menghitung luas daerah	Luas Daerah Suatu Kurva	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
14	Menguasai konsep dan prinsip integral tentu untuk menghitung volume dalam bidang	Volume Benda dalamBidang	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
15	Dapat menggunakan konsep dan prinsip Integral Tentu untuk menghitung Volum benda putar, Panjang Kurva	Volume Benda Putar dan Panjang Kurva	Penyajian Dosen, Tanya Jawab dan Tugas	3 × 50 menit		Sikap, Pengetahuan, keterampilan.
16	**UAS**					

DAFTAR REFERENSI

1. 1. E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara.*
2. Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.
3. Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

PENILAIAN

1. Aspek Penilaian
   a) Sikap
   b) Pengetahuan
   c) Keterampilan
2. Bobot Penilaian
   a) Bobot Nilai Harian - Quis (NH1: 15%)
   b) Bobot Nilai Harian - Tugas (NH2: 25%)
   c) Bobot Nilai Ujian Tengah Semester (UTS: 30%)
   d) Bobot Nilai Ujian Akhir Semester (UAS: 30%)
   d) Nilai Akhir (NA)

VERIFIKASI RPS

Mengetahui **Wakil Dekan 1** **Dr. Abdul Quddus, MA** NIP. 197811112005010009	**Ketua Program Studi** **Dr. Alkusaeri, M.Pd** NIP. 198008022006041002	**Mataram, 3 Februari 2020** **Dosen Pengampu** **MK** **Lalu Sucipto, M.Pd** NIP. 198106222009121004

DAFTAR ISI

PRAKATA PENULIS v
KATA PENGANTAR DEKAN.. vi
RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS) viii
DAFTAR ISI xii

BAB I
ANTI TURUNAN (INTEGRAL TAK TENTU) 1
A. Pendahuluan.. 1
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 1) 2
Anti Turunan... 2
Contoh 1.1 s/d s/d 1.11 4
C. Tugas Kegiatan 1 9
D. Rangkuman Kegiatan 1 10
E. Penilaian/Tes Formatif... 10
F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 2).. 12
Integral Tak Tentu... 12
Contoh 2.1 s/d 2.26 13
G. Tugas Kegiatan Belajar 2.. 25
H. Rangkuman Kegiatan Belajar 2.. 26
I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 2 27
J. Rujukan 29
K. Bacaan Yang Di Anjurkan.. 29

BAB II
NOTASI JUMLAH DAN SIGMA 30
A. Pendahuluan 30
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 3) 31
Contoh 3.1 s/d 3.33 33
C. Tugas Kegiatan Belajar 3 47
D. Rangkuman Kegiatan 3 48
E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 3 49
F. Rujukan 51
G. Bacaan Yang Di Anjurkan 51

BAB III
INTEGRAL TENTU 52
A. Pendahuluan 52
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 4) 53
Luas Menurut Poligon-poligon Dalam A(R) 53
Contoh 4.1 s/d 4.10 56
C. Tugas Kegiatan Belajar 4. 66
D. Rangkuman Kegiatan 4 67
E. Penilaian/Tes Formatif 4 67
F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 5) 69
Jumlah Reimann (Rp) 69
Contoh 5.1 s/d 5.11 70
G. Tugas Kegiatan Belajar 5. 79
H. Rangkuman Kegiatan Belajar 5 80
I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 5 81

J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 6) 82
Integral Tentu Riemann 82
Contoh 6.1 s/d 6.6 83
K. Tugas Kegiatan Belajar 6 91
L. Rangkuman Kegiatan Belajar 6 92
M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 6 92
N. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 7) 94
Teorema Dasar Kalkulus 94
Contoh 7.1 s/d 7.71 96
O. Tugas Kegiatan Belajar 7 104
P. Rangkuman Kegiatan Belajar 7 105
Q. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 7 106
R. Rujukan 107
S. Bacaan Yang Di Anjurkan 107

BAB IV
TEKNIK PENINTEGRALAN 108
A. Pendahuluan 108
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 8) 109
Teknik Subtitusi 109
Contoh 8.1 s/d 8.29 110
C. Tugas Kegiatan Belajar 8. 128
D. Rangkuman Kegiatan Belajar 8 130
E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 8 131
F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 9) 133
Integral Parsial 133

Contoh 9.1 s/d 9.12 134
G. Tugas Kegiatan Belajar 9 143
H. Rangkuman Kegiatan 9 144
I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 9 144
J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 10) 146
Subtitusi Yang Merasionalkan 146
Contoh 10.1 s/d 10.10 146
K. Tugas Kegiatan Belajar 10. 157
L. Rangkuman Kegiatan 10 158
M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 10 159
N. Rujukan 160
O. Bacaan Yang Di Anjurkan 160

BAB V
PENERAPAN INTEGRAL 161
A. Pendahuluan 161
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 11) 162
Luas Derah Suatu Kurva 162
Contoh 11.1 s/d 11.15 163
C. Tugas Kegiatan Belajar 11 178
E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 11 180
F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 12) 181
Volume Benda Dalam Bidang: Cakram, Cincin 181
Contoh 12.1 s/d 12.3 183
G. Tugas Kegiatan Belajar 12 184
H. Rangkuman Kegiatan 12 185

I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 12 186
J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 13).. 187
Volume Benda Putar 187
Contoh 13.1 s/d 13.3 188
K. Tugas Kegiatan Belajar 13 189
L. Rangkuman Kegiatan 13 191
M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 13 191
N. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 14)... 193
Panjang Kurva dan Bidang 193
Contoh 14.1 s/d 14.4 194
O. Tugas Kegiatan Belajar 14 197
D. Rangkuman Kegiatan 14 197
E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 14 198
R. Rujukan 199
S. Bacaan Yang Di Anjurkan 199

DAFTAR PUSTAKA 200
DAFTAR ISTILAH 201
BIODATA PENULIS 203

BAB I

ANTI TURUNAN (INTEGRAL TAK TENTU)

A. Pendahuluan

Bahan ajar ini terdiri dari dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 adalah konsep integral tak-tentu sebagai anti turunan, dan prinsip anti turunan fungsi trigonometri. Setiap kegiatan belajar memuat uraian, contoh, tugas dan latihan, rambu jawaban tugas dan latihan, rangkuman dan tes formatif.

Dalam uraian materi anti turunan ini diuraikan tentang awal mula pembahasan anti derevatif sebagai integral tak tentu, sedangkan dalam uraian materi integral tak tentu diuraikan tentang beberapa teorema yang mendasari penyelesaian kasus integral tak tentu. Secara keseluruhan materi dalam bahan ajar ini meliputi konsep integral tak-tentu sebagai anti turunan, dan notasi untuk anti turunan dan diakhiri dengan teorema integral tak tentu.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat penguasaan Anda pada tes formatif. Ulangi pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep integral tak-tentu sebagai anti turunan, dan prinsip anti turunan fungsi trigonometri.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep integral tak-tentu sebagai anti turunan, dan prinsip anti turunan fungsi trigonometri.
- **Materi Pokok:** Anti Turunan dan Integral Tak Tentu

B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 1)

Pembahasan tentang Anti Turunan pada dalam bahan ajar ini, Anda harus sudah menguasai turunan fungsi dan aturan pencarian turunan. Pada materi turunan fungsi, kita telah mempelajari tentang pemakaian turunan, syarat fungsi mempunyai turunan dan cara-cara menurunkan suatu fungsi.

Bila proses menurunkan suatu fungsi dianggap sebagai suatu operasi pada fungsi itu, maka berarti akan menghasilkan suatu fungsi baru yang disebut fungsi turunannya. Sekarang timbul problem bagaimana kita mencari fungsi asal apabila fungsi turunannya diketahui. Dalam hal ini kita harus mempunyai operasi balikan dan bila operasi ini kita kenakan pada fungsi turunan akan menghasilkan fungsi asal. Pada Kalkulus Differensial Anda telah mengkaji pendeferensialan; sehingga inversnya (balikannya) disebut *anti-pendeferensialan*.

Anti Turunan

Beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan teknik yang sistematik dalam menentukan suatu fungsi jika diketahui turunannya.

Misalkan kita harus menentukan suatu turunan pertama dari suatu fungsi:

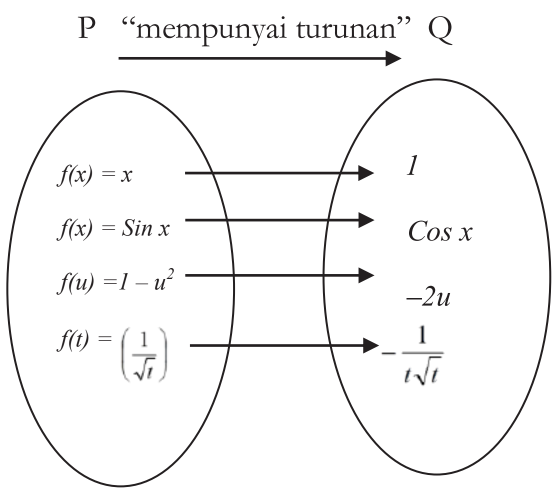
$$y = x \Rightarrow D_x(y) = 1$$

$$f(u) = 1 - u^2 \Rightarrow f'(u) = -2u$$

$$g(v) = \sin y \Rightarrow \frac{d}{dy}[g(v)] = \cos y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

Jika P dan Q adalah himpunan fungsi dan kita buat suatu relasi yang berbunyi "mempunyai turunan" dari P ke Q, maka untuk beberapa fungsi di atas dapat di ilustrasikan sebagai berikut:



Dengan memperhatikan diagram di atas kita dapat membaca:

a. x turunannya adalah 1

b. $Sin\ x$ turunannya adalah $Cos\ x$

c. $1 - u^2$ turunannya adalah $-2u$

d. $\frac{1}{\sqrt{t}}$ turunannya adalah $-\frac{1}{t\sqrt{t}}$

Dengan kalimat berbeda tetapi tidak mengubah makna ungkapan-ungkapan di atas akan senilai dengan:

a. 1 adalah turunan dari x

b. $Cos\ x$ adalah turunan dari $Sin\ x$

c. $-2u$ adalah turunan dari $1 - u^2$

d. $-\frac{1}{\sqrt{t}}$ adalah turunan dari $\frac{1}{\sqrt{t}}$

Menelaah salah satu kalimat di atas, apakah suatu fungsi yang turunannya $-2u$ apakah fungsi asalnya hanya $1 - u^2$? Jawabanya "tidak". Karena pada bab turunan ada *teorema* mengatakan bahwa: ***dua fungsi dengan turunan yang sama hanya berbeda dalam konstanta***.

Kesimpulan kita adalah jika suatu fungsi f mempunyai anti turunan, ia akan mempunyai keseluruhan famili dan setiap anggota dari famili ini dapat diperoleh dari salah satu diantara mereka dengan jalan menambahkan suatu konstanta yang cocok. Famili fungsi ini dinamakan **anti turunan umum** dari f

Definisi Anti Turunan

F adalah suatu **anti turunan** f pada suatu selang jika $F'(x) = f(x)$ pada selang itu.

Contoh 1.1.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = 226$

Penyelesaian:

$f(x) = 226 \Rightarrow F(x) = 226x + c$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'(226x+c)=\frac{d}{dx}(226x)+\frac{d}{dx}(c)=226+0=226=f(x)$$

Karena sama dengan fungsi awalnya atau $F'(x) = f(x)$ maka jawaban tersebut **benar**.

Contoh 1.2.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = 4x^3$

Penyelesaian:

$f(x)= 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + c$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(x^4+c\right)=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)+\frac{d}{dx}(c)=4x^3+0=4x^3=f(x)$$

Karena sama dengan fungsi awalnya atau $F'(x) = f(x)$ maka jawaban tersebut **benar**.

Contoh 1.3.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = x^{5/4}$

Penyelesaian:

$$f(x)= x^{5/4} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+5/4}x^{1+5/4} + c = \frac{4}{9}x^{\frac{4}{9}}+c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}+c\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}\right)+\frac{d}{dx}(c)=x^{\frac{5}{4}}+0=x^{\frac{5}{4}}=f(x)$$

Karena sama dengan fungsi awalnya atau $F'(x) = f(x)$ maka jawaban tersebut **benar**.

Contoh 1.4.

Tentukan suatu anti turunan umum F(*x*) + C fungsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} x^{1-\frac{2}{3}} + c = 3x^{\frac{1}{3}} + c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(3x^{\frac{1}{3}} + c\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}(c) = x^{-\frac{2}{3}} + 0 = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = f(x)$$

Karena sama dengan fungsi awalnya atau *F'(x) = f(x)* maka jawaban tersebut **benar**.

Contoh 1.5.

Tentukan suatu anti turunan umum F(*x*) + C fungsi $f(x) = 3x^2 - \pi x$

Penyelesaian:

$$f(x) = 3x^2 - \pi x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 + c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 + c\right) =$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + \frac{d}{dx}(c) = 3x^2 - \pi x + 0 = 3x^2 - \pi x = f(x)$$

Karena sama dengan fungsi awalnya atau *F'(x) = f(x)* maka jawaban tersebut **benar**.

Contoh 1.6.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x)+C fungsi $f(x)$= $3x^2+\sqrt{3}$

Penyelesaian:

$f(x)= 3x^2+\sqrt{3} \Rightarrow F(x)=x^3+\sqrt{3}\,x+c$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(x^3+\sqrt{3}\,x+c\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\,x\right)+\frac{d}{dx}\left(c\right)=$$
$$3x^2+\sqrt{3}+0=3x^2+\sqrt{3}=f(x)$$

Contoh 1.7.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

Penyelesaian:

$$f(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow F(x)=\frac{3}{-1}x^{-1}-\frac{2}{-2}x^{-2}+c$$

$$F(x)=-3x^{-1}+x^{-2}+c=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+c\right)=\frac{d}{dx}\left(-3x^{-1}\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)+\frac{d}{dx}\left(c\right)=\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=f(x)$$

Contoh 1.8.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x)=\dfrac{4x^6+3x^4}{x^3}$

Penyelesaian:

$$f(x)=\frac{4x^6+3x^4}{x^3}=(4x^6+3x^4)x^{-3}=4x^3+3x \Rightarrow F(x)=x^4+\frac{3}{2}x^2+c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:

$$F'\left(x^4+\frac{3}{2}x^2+c\right)=\frac{d}{dx}\left(x^4\right)+\frac{d}{dx}\left(\tfrac{3}{2}x^2\right)+\frac{d}{dx}(c)=$$

$$4x^3+3x=\frac{\left(4x^3+3x\right)x^3}{x^3}=\frac{4x^6+3x^4}{x^3}=f(x)$$

Contoh 1.9.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = 3x^2+\sqrt{3}$

Penyelesaian:

$f(x)= 3x^2+\sqrt{3} \Rightarrow F(x)=x^3+\sqrt{3}\,x+c$

Contoh 1.10.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = \dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

Penyelesaian:

$$f(x)= \frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow F(x)=\frac{3}{-1}x^{-1}-\frac{2}{-2}x^{-2}+c \Rightarrow F(x)=$$

$$-3x^{-1}+x^{-2}+c=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan:
$F'(x)=f(x)$

Contoh 1.11.

Tentukan suatu anti turunan umum F(x) + C fungsi $f(x) = \dfrac{4x^6+3x^4}{x^3}$

Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{4x^6 + 3x^4}{x^3} = (4x^6 + 3x^4)x^{-3} = 4x^3 + 3x \Rightarrow F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + c$$

untuk menguji kebenaran jawaban, kita dapat menggunakan definisi anti turunan yaitu dengan menurunkan anti turunan yang kita ajukan: $F'(x) = f(x)$

C. Tugas Kegiatan 1

Untuk memperluas wawasan Anda tentang Anti Turunan, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang operasi balikan dari sebuah turunan fungsi.

Tentukan suatu anti turunan umum $F(x) + C$ untuk masing-masing yang berikut:

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = x^2 + \pi$
3. $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $f(x) = x^2 - x$
6. $f(x) = 4x^5 - x^3$
7. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}\,x$
8. $f(x) = x^2\,(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3})$
9. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}$
10. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

D. Rangkuman Kegiatan 1

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 1 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah tentang Definisi Anti Turunan yaitu F adalah suatu anti turunan f pada suatu selang jika $F'(x) = f(x)$ pada selang itu.

E. Penilaian/Tes Formatif

1. **Skor 5**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = \pi$
2. **Skor 5**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{3}$
3. **Skor 5**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = 3x^{\frac{1}{4}}$
4. **Skor 8**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[5]{x^3}}$
5. **Skor 8**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$
6. **Skor 12**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = x^5 - \frac{2x}{\sqrt{x^3}}$
7. **Skor 12**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = 24x^6 + 4x^4 - 40x^2 + \sqrt{3}\,x$
8. **Skor 15**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = (x^{-3})(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3})$
9. **Skor 15**
   Cari anti turunan umum dari $f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^5}$
10. **Skor 15**
    Cari anti turunan umum dari $f(x) = \frac{5x^7 + 4x^5}{x^4}$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 1

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 2. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 1, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 2)

Integral Tak Tentu

Dalam kegiatan belajar ini diuraikan tentang lanjutan dari notasi anti anti turunan suatu fungsi. Kita sebelumnnya telah banyak mempelajari operasi-operasi yang balikan ('invers'). Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan: penambahan inversnya pengurangan, perkalian inversnya pembagian, pemangkatan inversnya penarikan akar, serta penarikan logaritma inversnya pencarian anti-logaritma.

Pada materi turunan fungsi, kita telah mempelajari tentang pemakaian turunan, syarat fungsi mempunyai turunan dan cara-cara menurunkan suatu fungsi. Bila proses menurunkan suatu fungsi dianggap sebagai suatu operasi pada fungsi itu, maka berarti akan menghasilkan suatu fungsi baru yang disebut fungsi turunannya. Selain dengan notasi anti turunan pada kegiatan belajar 1 di atas, berikut juga terdapat notasi lain untuk anti turunan yaitu $A_x\left(f(x)\right)$ atau $\int .f(x)\ dx$.

Karena kita telah menggunakan lambang D_x untuk operasi penentuan suatu turunan, adalah wajar menggunakan A_x untuk operasi pencarian anti turunan. Jadi $A_x\left(x^2\right)=\frac{1}{3}x^3+c$

Ini adalah notasi yang digunakan oleh beberapa penulis, dan memang dalam *notasi lebneiz* yang popular untuk notasi antiturunan adalah s yang diperpanjang, yaitu: $\int ....dx$; hal ini menunjukkan antiturunan terhadap *x*, sama seperti D_x menunjukkan turunan terhadap *x*. Perhatikan bahwa $D_x\int f(x)\ dx=f(x)$

TEOREMA ATURAN PANGKAT

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali –1, maka: $\int x^r\ dx=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+c$

Bukti:

Untuk membuktikan suatu hasil berbentuk: $\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$ kita cukup menurunkan terhadap *x*, yaitu: $D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}+c\right]=$ $\frac{1}{r+1}(r+1)\cdot x^{(r+1)-1}+0 \;=\; x^r$

Contoh 2.1:

Tentukan anti turunan umum dari $f(x)=x^{4/3}$

Penyelesaian:

$$\int x^{4/3}dx=\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+c=\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+c=\tfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$$

Contoh 2.2:

Tentukan anti turunan umum dari $f(x)=7x^{-3/4}$

Penyelesaian:

$$\int 7x^{-3/4}dx=\frac{7x^{1/4}}{\frac{1}{4}}+c=28x^{\frac{1}{4}}+c$$

Contoh 2.3:

Tentukan anti turunan umum dari $f(x)=4x^5-x^3$

Penyelesaian:

$$\int f(x)dx=\int(4x^5-x^3)dx=\frac{2}{3}x^6-\frac{1}{4}x^4+c$$

Contoh 2.4:

Tentukan anti turunan umum dari $f(x)=x^{100}+x^{99}$

Penyelesaian:

$$\int f(x)dx = \int (x^{100} + x^{99})dx = \frac{1}{101}x^{101} + \frac{1}{100}x^{100} + c$$

Contoh 10

Tentukan anti turunan umum dari $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}\ x$

Penyelesaian:

$$\int f(x)dx = \int (27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}\ x)dx$$
$$= \frac{27}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{45}{4}x^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + c$$

TEOREMA INTEGRAL TAK-TENTU FUNGSI SINUS DAN COSINUS

$$\int \sin\ x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin\ x + c$$

Bukti:

Cukup perhatikan bahwa $D_x(-\cos x + c) = D_x(-\cos x) + D_x(c) = \sin x + 0 = \sin x$ dan

untuk $D_x(\sin x + c) = D_x(\sin x) + D_x(c) = \cos x + 0 = \cos x$

Contoh 2.5:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int 2\ \sin x\,dx$

Penyelesaian:

$$\int 2\sin\ x\,dx$$
$$= 2\int \sin\ x\,dx$$
$$= 2\cdot(-\cos x) + c$$
$$= -2\cos x + c$$

Contoh 2.6:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int(\sin\ t - \cos\ t)\,dt$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
&\int(\sin\ t - \cos\ t)\,dt \\
&= \int(\sin\ t)\,dt - \int(\cos\ t)\,dt \\
&= -\cos\ t + c_1 - \sin t + c_2 \\
&= -(\cos\ t + \sin t) + c
\end{aligned}$$

Contoh 2.7:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int(\cos\ 3x - 3\ \sin\ x)\,dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
&\int(\cos 3x - 3\sin\ x)\,dx \\
&= \int\cos 3x\ \ dx - 3\int\sin\ x\ \ dx \\
&= \frac{1}{3}\sin\ 3x + c_1 - 3(-\cos x) + c_2 \\
&= \frac{1}{3}\sin\ 3x + \cos x + C
\end{aligned}$$

Contoh 2.8:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int(t^2 - 2\ \cos\ t)\,dt$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
&\int(t^2 - 2\ \cos\ t)\,dt \\
&= \int t^2\ \ dt - 2\int\cos t\ \ dt \\
&= \frac{1}{3}t^2 + c_1 - 2(\sin t) + c_2 \\
&= \frac{1}{3}t^2 - 2\sin t + c
\end{aligned}$$

Contoh 2.9:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int 3 \sin \ (2x - \pi)\, dx$

Penyelesaian

$$\int 3 \ \sin \ (2x - \pi)\, dx$$
$$= 3\int \sin \ (2x - \pi)\, dx$$
$$= \frac{3}{2}[-\cos(2x - \pi)] + c$$
$$= -\frac{3}{2}\cos(2x - \pi) + c$$

Untuk selanjutnya istilah anti turunan **F**, kita ganti menggunkan **integral tak-tentu** $\left(\int ....dx\right)$. Notasi $\int f(x) \ dx$, dimana tanda $\int$ dinamakan **simbol integral**; *f(x)* dinamakan **integran**.

TEOREMA KELINEARAN INTEGRAL TAK-TENTU
Andaikan *f* dan *g* mempunyai anti turunan (integral tak-tentu) dan Andaikan *k* suatu konstanta. Maka:
a. $\int .k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$;
b. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$;
c. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$.

Bukti:

Untuk memperlihatkan (i) dan (ii), kita cukup mendeferensialkan ruas kanan dan amati kita memperoleh integran ruas kiri.

a. $D_x\left[k\int f(x)\, dx\right] = k\, D_x \int f(x)\, dx = k\, f(x)$

b. $D_x\left[\int f(x) \ dx + \int g(x)dx\right] = D_x \int f(x)\, dx + D_x \int g(x)\, dx = f(x) + g(x)$

c. $D_x\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)dx\right] = D_x \int f(x)\,dx - D_x \int g(x)\,dx = f(x) - g(x)$

Contoh 2.10:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int \left(3x^2 + 4x\right)dx$

Penyelesaian:

$$\int \left(3x^2 + 4x\right)dx`$$

$$= \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx$$

$$= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx$$

$$= \int \left(3x^2 + 4x\right)dx$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) + 4\left(\frac{x^2}{2} + c_2\right)$$

$$= x^3 + 2x^2 + (3c_1 + 4c_2)$$

$$= x^3 + 2x^2 + C$$

Contoh 2.11:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)dt$

Penyelesaian

$$\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right)dt$$

$$= \int \left(t^{-2} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$= \int t^{-2}\,dt + \int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

Contoh 2.12:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int (2\cos x - \pi x)\, dx$

Penyelesaian

$$\int (2\cos x - \pi x)\, dx$$
$$= 2\int \cos x \, dx - \pi \int x \, dx$$
$$= 2\sin x + c_1 - \pi(\frac{x^2}{2}) + c_2$$
$$= 2\sin x - \frac{\pi}{2} x^2 + c$$

Contoh 2.13:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int (2\sin^2 x + 2\cos^2 x)\, dx$

Penyelesaian

$$\int (2\sin^2 x + 2\cos^2 x)\, dx$$
$$= 2\int (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx$$
$$= 2\int (1)\, dx$$
$$= 2x + c$$

Contoh 2.14:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$

Penyelesaian

$$\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$$

$$= \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)\, dx$$

$$= \int (\sin^2 x + \cos^2 + 2\sin x \cos x)\, dx$$

$$= \int (1 + \sin 2x)\, dx = \int dx + \int \sin 2x\, dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

TEOREMA INTEGRAL TAK-TENTU FUNGSI PANGKAT YANG DIPER-UMUM

Andaikan g suatu fungsi yang dapat dideferensialkan dan r adalah sebarang bilangan rasional kecuali –1, maka:

$$\int [g(x)]^r g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + c$$

Bukti:

Untuk membuktikan dengan menggunakan definisi di atas, yaitu dengan menurunkan ruas kanan, dan ruas kiri menghasilkan fungsi integran-nya.

$$D_x\left(\frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + c\right) = \left(\frac{(r+1).[g(x)]^{(r+1)-1}}{(r+1)}.g'(x)\right) + (0) \quad = [g(x)]^r g'(x)$$

Contoh 2.15:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)dx$

Penyelesain:

Diketahui $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3)dx$

Misalkan g(x) = x^4 + 3x maka g'(x) = 4x^3 + 3, sehingga menurut teorema di atas dapat digunakan seperti berikut:

$$\int \left(x^4+3x\right)^{30}\left(4x^3+3\right)dx$$

$$=\int \left[g(x)\right]^{30} g'(x)dx$$

$$=\frac{\left[g(x)\right]^{31}}{31}+c$$

$$=\frac{\left(x^4+3x\right)^{31}}{31}+C$$

Contoh 2.16:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int \sin^{10} x.\cos x\,dx$

Penyelesain:

Diketahui $\int \sin^{10} x.\cos x\,dx$

Andaikan h(x) = sin x, maka h'(x) = cos x

sehingga menurut teorema di atas dapat digunakan seperti berikut:

$$\int \sin^{10} x.\cos x\,dx$$

$$=\int \left[g(x)\right]^{10} g'(x)dx$$

$$=\frac{\sin^{11} x}{11}+C$$

Contoh 2.17:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int \left(x^3+6x\right)^{5}\left(6x^2+12\right)dx$

Penyelesain:

Diketahui $\int \left(x^3+6x\right)^{5}\left(6x^2+12\right)dx$

Andaikan u = $x^3 + 6x$, maka du = $3x^2 + 6$ dx atau 2 du = $(6x^2 + 12)$ dx sehingga menurut teorema di atas dapat digunakan seperti berikut:

$$\int \left(x^3 + 6x\right)^5 \left(6x^2 + 12\right) dx$$

$$= \int u^5 \, 2 \, du$$

$$= 2\int u^5 \, du$$

$$= 2\left[\frac{u^6}{6} + c\right]$$

$$= \frac{u^6}{3} + c$$

$$= \frac{\left(x^3 + 6x\right)^6}{3} + C$$

Contoh 2.18:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int \cos^4 2x(-2\sin 2x)\,dx$

Penyelesain:

Diketahui $\int \cos^4 2x(-2\sin 2x)\,dx$

Andaikan g(x) = $\cos 2x$ maka g'(x) = $-2\sin 2x$ dx

$$\int \cos^4 2x(-2\sin 2x)\,dx$$

$$= \int \left[g\left(x\right)\right]^4 g'\left(x\right) dx$$

$$= \frac{\cos^5 2x}{5} + C$$

Contoh 2.19:

Tentukan Penyelesaian dari: $\int\left(\frac{x^2}{2}+3\right)^2 x^2\,dx$

Penyelesain:

Diketahui $\int\left(\frac{x^2}{2}+3\right)^2 x^2\,dx$

Andaikan g(x) = $\frac{x^2}{2}+3$ maka g'(x) = x dx $\qquad \int\left(\frac{x^2}{2}+3\right)^2 x^2\,dx$

$\neq \int [g(x)]^2 g'(x)dx$

(karena g'(x) $\neq$ x^2 dx, maka teorema di atas ***tidak dapat digunakan***, sehingga menggunakan metode lain)

Untuk menyelesaikan kasus diatas maka kita jabarkan integral berikut:

$$\int\left(\frac{x^2}{2}+3\right)^2 x^2\,dx$$

$$=\int\left(\frac{x^4}{4}+3x^2+9\right)x^2\,dx$$

$$=\int\left(\frac{x^6}{4}+3x^4+9x^2\right)dx$$

$$=\frac{x^7}{28}+\frac{3x^5}{5}+3x^3+C$$

Contoh 2.20:

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$\int(\sqrt{2}\,x+1)^3\,\sqrt{2}dx$

Penyelesaian:

Jika u = $\sqrt{2}\,x+1$ maka du = $\sqrt{2}\,dx$

$$\int(\sqrt{2}\,x+1)^3\,\sqrt{2}dx=\int u^3\;du=\frac{u^4}{4}+c=\frac{(\sqrt{2}\,x+1)^4}{4}+c$$

Contoh 2.21

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int(\pi\,x^3+1)^4\cdot 3\pi x^2dx$$

Penyelesaian:

Jika u = $\pi\,x^3+1$ maka du = $3\pi x^2\,dx$

$$\int(\pi\,x^3+1)^4\cdot 3\pi x^2\,dx=\int u^4\;du=\frac{u^5}{5}+c=\frac{(\pi\,x^3+1)^5}{5}+c$$

Contoh 2.22

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int(5\,x^2+1)(5\,x^3+3x+6)^6\,dx$$

Penyelesaian:

Jika u = $5\,x^3+3x+6$` maka $\dfrac{1}{3}$ du = $(5\,x^2+1)\,dx$`

$$\int(5\,x^2+1)(5\,x^3+3x+6)^6\,dx=\frac{1}{3}\int u^6\;du=\frac{3\;u^7}{7}+c=\frac{3(5\,x^3+3x+6)^7}{7}+c$$

Contoh 2.23

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int(5\,x^2+1)\sqrt{5\,x^3+3x-2}\;dx$$

Penyelesaian:

Jika u = $5x^3 + 3x - 2$ maka $\frac{1}{3}$ du = $(5x^2 + 1)\,dx$`

$$\int (5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\,\frac{2\,u^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2\sqrt{(5x^3+3x-2)^3}}{9} + c$$

Contoh 2.24

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2-5}}\,dx$$

Penyelesaian:

Jika u = $2x^2 - 5$ maka $\frac{3}{4}$ du = $4x\,dx$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{2x^2-5}}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{3}{4}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{2x^2-5}}{2} + c$$

Contoh 2.25

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx$$

Penyelesaian:

Ingat bahwa: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x) + c = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

Contoh 2.26

Cari solusi dari integral-integral berikut:

$$\int \sin^2 x\, dx$$

Penyelesaian:

Ingat: $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ **dan** $\sin x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}[\cos\ 2x - \cos\ 0]$

$$\int \sin x \cdot \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\int [\cos\ 2x - \cos\ 0]\, dx = -\frac{1}{2}\int \cos\ 2x\, dx + \frac{1}{2}\int dx$$

$$\int \sin x \cdot \sin x\, dx = -\frac{1}{4}\sin\ 2x + c_1 + \frac{1}{2}x + c_2 = -\frac{\sin\ 2x}{4} + \frac{x}{2} + c$$

G. Tugas Kegiatan Belajar 2.

Untuk memperluas wawasan Anda tentang Anti Turunan, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang integral tak tentu dari sebuah turunan fungsi.

A. Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu berikut:

1. $\int \left(x^4 + x^2\right) dx$
2. $\int (x+1)^3 dx$
3. $\int \frac{2}{3t\sqrt{t}}\, dt$
4. $\int \frac{(z+1)^4}{\sqrt{z}}\, dz$
5. $\int \left(\sin^2 3\theta - 2\sin 3\theta . \cos 3\theta + \cos^2 3\theta\right) d\theta$
6. $\int (\pi x + 1)^3 \pi\, dx$

7. $\int (4x^2+2)(8x^3+12x-9)^9\, dx$

8. $\int 9t\, \sqrt[5]{7t^2-11}\, dt$

9. $\int \cos^3\left[(x^2+\pi)^4\right]\sin\left[(x^2+\pi)^4\right](x^2+\pi)^3\, x\, dx$

10. Buktikan
   a. $\int [f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)]dx = f(x)\cdot g(x) + C$
   b. $\int \left[\dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}\right]dx = \dfrac{f(x)}{g(x)} + C$

H. Rangkuman Kegiatan Belajar 2

Berdasarkan paparan Kegiatan Belajar 2 ini maka garis besar bahan yang dibahas tentang

1. Notasi lebneiz untuk notasi antiturunan adalah $\int ....dx$; hal ini menunjukkan antiturunan terhadap x
2. Teorema Aturan Pangkat berbunyi Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka: $\int x^r\, dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$
3. Teorema integral tak-tentu fungsi sinu $\int \sin\, x\, dx = -\cos x + c$ dan fungsi cosinus $\int \cos x\, dx = \sin\, x + c$
4. Teorema kelinearan integral tak-tentu
   - $\int .k\, f(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$;
   - $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$;

- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

dimana *f* dan *g* mempunyai anti turunan (integral tak-tentu) dan Andaikan *k* suatu konstanta. Maka:

5. Teorema integral tak-tentu fungsi pangkat yang diperumum

$\int [g(x)]^r g'(x)\,dx = \dfrac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + c$ dimana *g* suatu fungsi yang dapat dideferensialkan dan r adalah sebarang bilangan rasional kecuali –1.

I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 2

1. Skor 5

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int (x^5 + x^4)dx$

2. Skor 5

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int (x+1)^4 dx$

3. Skor 5

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int \dfrac{3}{4x\sqrt{x}}dx$

4. Skor 8

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int \dfrac{(x+1)^5}{\sqrt{x}}dx$

5. Skor 10

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int (\cos^2 3x + \sin^2 3x - 2\cos 3x.\sin 3x)dx$

6. Skor 10

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int \pi(\pi x+1)^4\, dx$

7. Skor 12

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int \left(8x^3+12x-9\right)^{10}\left(4x^2+2\right)dx$

8. Skor 15

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu $\int 7x\,\sqrt[7]{7x^2-7}\,dx$

9. Skor 15

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu

$$\int \cos^3\left[\left(2x^2+1\right)^4\right]\sin\left[\left(2x^2+1\right)^4\right]\left(2x^2+1\right)^3 4x\ dx$$

10. Skor 15

Tentukan penyelesaian dari integral tak-tentu

$$\int x\left(x^2-7\right)^3 \sin^3\left[\left(x^2-7\right)^4\right]\cos\left[\left(x^2-7\right)^4\right]dx$$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 2

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100}\times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan Belajar 3. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 2, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

J. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, *Calculus with Analitic Geometry*, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, *Calculus with Analitic Geometry*, Prentice Hall, Upper Saddle River.

K. Bacaan Yang Di Anjurkan

Sulaiman R, 2008. *Matematika Dasar 2 (Integral dan Aplikasinya)*. Universitas Negeri Surabaya. Surabaya: Unesa University Press.

BAB II

NOTASI JUMLAH DAN SIGMA

A. Pendahuluan

Bahan ajar ini terdiri satu kegiatan belajar. Kegiatan belajar 3 tentang Notasi Jumlah dan Sigma. Untuk memahami materi dalam materi ini, Anda harus sudah menguasai tentang barisan. Setiap kegiatan belajar memuat uraian, contoh, tugas dan latihan, rambu jawaban tugas dan latihan, rangkuman dan tes formatif.

Sebelum membahas sigma dan sifat-sifatnya, terlebih dahulu kita menguraikan sedikit tentang barisan. Pada fungsi yang daerah asalnya berupa selang riil menggunakan huruf yang dekat dengan abjad akhir untuk memberi nama peubah seperti *s, t, u, v, w, x, y, z* yang mengambil nilai pada peubah selang garis riil. Sedangkan apabila mengambil huruf yang dekat dengan abjad tengah yakni i, *j, k, l , m, n* hal ini menggambarkan fungsi tersebut daerah asalnya adalah bilangan bulat positif. Sehingga sebuah fungsi yang yang daerah asalnya terdiri dari bilangan bulat positif atau suatu himpunan bagian dari bilangan bulat disebut **barisan.**

Menuliskan beberapa nilai dalam barisan yang pertama diikuti oleh titik-titik, misalkan seperti: 1, 2, 3, 4, 5, … atau 1, 4, 9, 16, 25, … atau $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots = \{ a_n \}$

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.

3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat penguasaan Anda pada tes formatif. Ulangi pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep notasi jumlah sigma, notasi sigma dan notasi jumlah khusus.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep notasi jumlah sigma, notasi sigma dan notasi jumlah khusus.
- **Materi Pokok:** Notasi Jumlah dan Sigma

B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 3)

Notasi Jumlah dan Sigma

Kita Sering melakukan penjumlahan beberapa bilangan, misakan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$. Untuk mempersingkat penulisan penjumlahan tersebut kadangkala kita hanya menulis dengan $1 + 2 + 3 + \dots + 10$. Tentunya penulisan itu memperhatikan pola tertentu dan dapat diamati polanya dari beberapa suku saja.

Jika jumlah $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 100^2$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n$, maka dapat kita tunjukkan jumlah bentuk di atas kita dapat tuliskan sebagai: $\sum_{i=1}^{100} i^2$ dan $\sum_{j=1}^{n} a_j$

Dalam notasi $\sum$ (baca "**sigma**"; simbol huruf besar Sigma Yunani) menyatakan kepada kita untuk menjumlahkan semua bilangan berbentuk seperti yang ditunjukkan seraya *indeks i, j, k, l , m, n* berjalan melalui bilangan bulat positif, mulai dengan bilangan bulat yang diperlihatkan di bawah $\sum$ dan berakhir dengan bilangan bulat yang di atas tanda tersebut, sehingga:

$$\sum_{i=3}^{5}(i+1)^2 = (3+1)^2 + (4+1)^2 + (5+1)^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{i^2+1} = \frac{i}{1^2+1} + \frac{i}{2^2+1} + \frac{i}{3^2+1} + \frac{i}{4^2+1}$$

Dan, untuk $m \le n$ perhatikan**:**

$$\sum_{i=m}^{n} C(i) = C(m) + C(m+1) + C(m+2) + \ldots + C(n-2) + C(n-1) + C(n)$$

Jika semua c_1 dalam $\sum_{i=1}^{n} c_i$ mempunyai nilai sama, katakana c, maka sebagai suatu hasil telaah di atas kita membuat kesepakatan berikut:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c}$$

Sebagai contoh beberapa kasus $\sum_{i=1}^{4} 2 = 4(2) = 8$ atau

$$\sum_{i=1}^{100}(-2) = 100(-2) = -200$$

Sifat-sifat Sigma berlaku juga operator linier, yaitu seperti pada teorema berikut:

Teorema kelinearan Sigma

Andaikan $\{a_1\}$ dan $\{b_1\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta. Maka:

a. $\sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$;

b. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Bukti:

a) $\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$

$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n)$

$= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \ldots + a_n + b_n$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots + (a_n - b_n)$

$= a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \ldots + a_n - b_n$

$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_n$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Menentukan nilai dari sigma

Contoh 3.1:

Hitung $\sum_{i=1}^{6} i^2$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 41$$

Contoh 3.2:

Hitung $\sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j+1}$

Penyelesaian

$$\sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \frac{1}{6+1} + \frac{1}{7+1}$$

$$\sum_{j=1}^{7} \frac{1}{j+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{17.316}{1.080}$$

Contoh 3.4:

Hitung $\sum_{k=1}^{8} (k+1)^2$

Penyelesaian

$$\sum_{k=1}^{8} (k+1)^2 = (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2 + (k+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{8} (k+1)^2 = (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 + (5+1)^2 + (6+1)^2 + (7+1)^2 + (8+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{8} (k+1)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2$$

$$\sum_{k=1}^{8} (k+1)^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = 271$$

Contoh 3.5:

Jika diketahui $\sum_{i=1}^{10} n_i = 10$ dan $\sum_{i=1}^{10} m_i = 13$ maka tentukan penyelesaian dari $\sum_{i=1}^{10}(2n_i - 3m_i + 4)$

Penyelesaian

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{10} n_i = 10 \\ &\sum_{i=1}^{10} m_i = 13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10}(2n_i - 3m_i + 4) = 2\sum_{i=1}^{10} n_i - 3\sum_{i=1}^{10} m_i + \sum_{i=1}^{10}(4)$$

$$= 2(10) - 3(13) + 10(4) = 99$$

Contoh 3.6:

Lakukan penukaran peubah dalam indeks $\sum_{l=3}^{19} l(l-2);\ k = l-2$, selanjutnya hitung nilai sigmanya.

Penyelesaian

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=3}^{5} l(l-2);\ k = l-2 \\ &k = l-2 \Rightarrow l = k+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{5}(k+2)k, \quad \text{Sehingga :}$$

$$\sum_{k=1}^{5}(k+2)k = (1+2)1 + (2+2)2 + (3+2)3 + (4+2)4 + (5+2)5$$

$$\sum_{k=1}^{5}(k+2)k = (3)1 + (4)2 + (5)3 + (6)4 + (7)5$$

$$\sum_{k=1}^{5}(k+2)k = 3 + 8 + 15 + 24 + 35 = 85$$

Jumlah Berjatuhan

Diberikan sigma pada ruas kiri, kemudian kita mencoba menjabarkan sehingga tidak lagi berbentuk notasi sigma. Kemudian perhatikan hasil aljabar dalam ruas kanan apakah sesuai dengan kasus-kasus berikut:

Contoh 3.7:

Tujukkkan benar bahwa: $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

Penyelesaian:

Dengan melakukan pencoretan secara sistematis pada penerapan kelinieran dapat digunakan untuk menunjukkan kasus berikut, berikut:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= -a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + a_4 - \ldots - a_n + a_{n+1} \\ &= a_{n+1} - a_1\end{aligned}$$

Contoh 3.8:

Tujukkkan benar bahwa: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1$

Penyelesaian:

Dengan melakukan pencoretan secara sistematis pada penerapan kelinieran dapat digunakan untuk menunjukkan kasus berikut, berikut:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2 - i^2] &= (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \ldots + ((n+1)^2 - n^2) \\ &= -1^2 + 2^2 - 2^2 + 3^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - n^2 + (n+1)^2 \\ &= (n+1)^2 - 1\end{aligned}$$

Jumlah Khusus pada Sigma.

Dalam bagian berikut, kita akan perlu meninjau jumlah dari n bilangan positif yang pertama seperti halnya jumlah kuadrat-kuadratnya, pangkat tiganya, dan seterusnya. Untuk mempermudah menentukan hasil akhir diberikan beberapa rumus-rumus yang istimewa berikut:

Contoh 3.9:

Buktikan bahwa benar untuk:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bukti:

Untuk membuktikan Rumus (a), kita mulai dengan kesamaan $(i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1$, kemudian jumlahkan kedua ruas dan terapkan rumus jumlah berjatuhan serta gunakan kelinieararan di ruas kanan. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan uraian di bawah:

$$(i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] = \sum_{i=1}^{n} (2i + 1)$$

$$(n + 1)^2 - 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (1)$$

$$n^2 + 2n = 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

Contoh 3.10:

Tentukan Penyelesaian dari: $\sum_{i=1}^{10} i$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10(10+1)}{2} = \frac{110}{2} = 55\,.$$

Contoh 3.11:

Tentukan Penyelesaian dari: $\sum_{i=1}^{10} i^2$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10(10+1)(20+1)}{6} = \frac{110(21)}{6} = \frac{2310}{6} = 385$$

Contoh 3.12:

Tentukan Penyelesaian dari: $\sum_{i=1}^{10} i^3$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{110^2}{2^2}\right] = \frac{12.100}{4} = 3.025$$

Contoh 3.13:

Tentukan Penyelesaian dari: $\sum_{i=1}^{10} i^4$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{10} i^4 = \frac{10(10+1)(10^3 + 9(10)^2 + 10 - 1)}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^4 = \frac{10(11)(1.000+9(100)+9)}{30} = \frac{110+1.900+9}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^4 = \frac{2.019}{30} = 67,3$$

Contoh 3.14:

Hitung: $\sum_{i=1}^{10}(1-i+i^2-i^3+i^4)$

Penyelesaian: Diketahui $\sum_{i=1}^{10} i = 55$; $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$

$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{12.100}{4}$ $\sum_{i=1}^{10} i^4 = \frac{2.019}{30}$, sehingga :

$$\sum_{i=1}^{10}(1-i+i^2-i^3+i^4) = \sum_{i=1}^{10} 1 - \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} i^2 - \sum_{i=1}^{10} i^3 + \sum_{i=1}^{10} + i^4$$

$$= 10 - 55 + 385 - \frac{12.100}{4} + \frac{2.019}{30}$$

$$= \frac{300 - 1.650 + 11.550 - 90.750 + 2.019}{30} = -\frac{78.531}{30}$$

Contoh 3.15:

Tunjukkan bahwa: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] = (n+1)^3 - 1$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] = (2^3-1^3)+(3^3-2^3)+(4^3-3^3)+\ldots+((n+1)^3-n^3)$$

$$= -1^3 + 2^3 - 2^3 + 3^3 - 3^3 + 4^3 - \ldots - n^3 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

Contoh 3.16:

Tunjukkan bahwa: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = (n+1)^4 - 1$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \ldots + ((n+1)^4 - n^4)$$
$$= -1^4 + 2^4 - 2^4 + 3^4 - 3^4 + 4^4 - \ldots - n^4 + (n+1)^4$$
$$= (n+1)^4 - 1$$

Tunjukkan bahwa: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1$

Contoh 3.17:

Tunjukkan bahwa: $\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^5 - i^5] = (n+1)^5 - 1$

Penyelesaian:

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^5 - i^5] = (2^5 - 1^5) + (3^5 - 2^5) + (4^5 - 3^5) + \ldots + ((n+1)^5 - n^5)$$
$$= -1^5 + 2^5 - 2^5 + 3^5 - 3^5 + 4^5 - \ldots - n^5 + (n+1)^5$$
$$= (n+1)^5 - 1$$

Contoh 3.18:

Hitung: $\sum_{i=1}^{10}[(i+1)^2 - i^2]$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{10}[(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1 = (10+1)^2 - 1 = 11^2 - 1 = 121 - 1 = 120$$

Contoh 3.19:

Hitung: $\sum_{i=1}^{10}[(i+1)^3 - i^3]$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{10}[(i+1)^3 - i^3] = (n+1)^3 - 1 = (10+1)^3 - 1 = 11^3 - 1 = 1.331 - 1 = 1.330$$

Contoh 3.20:

$$Buktikan: \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Penyelesaian

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1)$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(1)$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$2n^3 + 6n^2 + 6n = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3n^2 + 3n + 2n$$

$$\frac{2n^3 + 6n^3 + 6n}{6} = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Contoh 3.21:

$$Buktikan: \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Penyelesaian

$$(i + 1)^4 - i^4 \quad = \quad 4i^3 + 6i^2 + 4i\ 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = \sum_{i=1}^{n}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1)$$

$$(n + 1)^4 - 1 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}(1)$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + n(2n+1)(n+1) + 2[n(n+1)] + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 2n^3 + 5n^2 + 4n$$

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Contoh 3.22:

Tambahkan kedua kesamaan di bawah ini, selesaikan untuk S dan degan cara tersebut memberikan pembuktian $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

S = 1 + 2 + 3 + 4 + …+(n-2) + (n-1) + n

S = n + (n-1)+ (n-2) +…+ 3 + 2 +1 + n

Penyelesaian:

S = 1 + 2 + 3 + 4 + …+ (n-2) + (n-1) + n

S = n + (n-1)+ (n-2) + (n-2) +…+ 2 + 1 + n

2S = (n+1)+ (n+1)+ (n+1)+ (n+1)+…+ (n+1)+ (n+1)+ (n+1)

$$2\mathrm{S} = \mathrm{n}[(\mathrm{n}+1)]; \quad \text{andaikan} \quad S = \sum_{i=1}^{n} i \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Contoh 3.23:

Cari Suatu rumus untuk $\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k-5)$

Penyelesaian

$$\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k-5) = \sum_{kn=1}^{n}(k^2-3k-10) = \sum_{kn=1}^{n}k^2 - 3\sum_{kn=1}^{n}k - \sum_{kn=1}^{n}(10)$$

$$= \sum_{kn=1}^{n}k^2 - 3\sum_{kn=1}^{n}k - \sum_{kn=1}^{n}(10) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1}{2} - 10(n)$$

$$= \frac{n(2n^2+3n+1-9n-9-60)}{6} = \frac{n(n^2-3n-34)}{6}$$

Contoh 3.23:

Cari Suatu rumus untuk $\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{m+2}{m-5}\right]$

Penyelesaian

$$\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{m^2+2}{m-5}\right]=\frac{\sum_{m=1}^{n}(m^2+2)}{\sum_{m=1}^{n}(m-5)}=\frac{\sum_{m=1}^{n}m^2+\sum_{m=1}^{n}(2)}{\sum_{m=1}^{n}m-\sum_{m=1}^{n}(5)}`$$

$$=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(n)}{\frac{n(n-1)}{2}-5(n)}=\frac{\frac{2n^3+3n^2+13n}{6}}{\frac{n^2-11n}{2}}$$

$$=\left(\frac{2n^3+3n^2+13n}{6}\right)\left(\frac{2}{n^2-11n}\right)=\frac{2n^3+3n^2+13n}{3n^2-33n}=\frac{2n^2+3n+13}{3n-33}$$

Contoh 3.24:

Cari nilai dari sigma $\sum_{i=1}^{6}(-1)^i\,2^{i-2}$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{6}(-1)^i\,2^{i-2}=(-1)^1\,2^{1-2}+(-1)^2\,2^{2-2}+(-1)^3\,2^{3-2}+\ldots+(-1)^6\,2^{6-2}$$

$$=(-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)+(1)(1)+(-1)(2)+(1)(4)+(-1)(8)+(1)(16)$$

$$=-\tfrac{1}{2}+1+(-2)+(4)+(-8)+(16)=\frac{-1+11}{2}=5$$

Contoh 3.25:

Cari nilai dari sigma $\sum_{j=1}^{7}\frac{(-1)^j\,2^j}{j+1}$

Penyelesaian

$$\sum_{j=1}^{5}\frac{(-1)^j\,2^j}{j+1}=\frac{(-1)^1\,2^1}{1+1}+\frac{(-1)^2\,2^2}{2+1}+\frac{(-1)^3\,2^3}{3+1}+\ldots+\frac{(-1)^5\,2^5}{7+1}$$

$$=\frac{(-1)(2)}{2}+\frac{(1)(4)}{3}+\frac{(-1)(8)}{4}+\frac{(1)(16)}{5}+\frac{(-1)(32)}{6}$$

$$= \frac{(-2)}{2} + \frac{4}{3} + \frac{(-8)}{4} + \frac{16}{5} + \frac{(-32)}{6}$$

$$= -1 + \frac{4}{3} - 2 + \frac{16}{5} - \frac{32}{6} = \frac{-30+40-30+96-160}{30} = -\frac{42}{15}$$

Contoh 3.26:

Cari nilai dari sigma $\sum_{k=1}^{6} k \cos(k\pi)$

Penyelesaian

$$\sum_{k=1}^{6} k \cos(k\pi) = (1)\cos(1\cdot\pi) + (2)\cos(2\cdot\pi) + (3)\cos(3\cdot\pi) + ... + (6)\cos(6\cdot\pi)$$

$$= \cos(\pi) + 2\cos(2\pi) + 3\cos(3\pi) + 4\cos(4\pi) + 5\cos(5\pi) + 6\cos(6\pi)$$

$$= (-1) + 2(1) + 3(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4\ (1) + 5(-1) + 6\ (1)$$

$$= -1 + 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4 - 5 + 6 = \frac{-2+4+3\sqrt{3}+8-10+12}{2} = 6 + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 3.27:

Tuliskan jumlah berikut: $1+2+3+4+...+41$ dalam penulisan sigma

Penyelesaian

$$1+2+3+4+...+41 = \sum_{i=1}^{41} i$$

Contoh 3.28:

Tuliskan jumlah berikut: $2+4+6+8+...+100$ dalam penulisan sigma

Penyelesaian

$$2+4+6+8+...+100 = \sum_{j=1}^{50} 2j$$

Contoh 3.29:

Tuliskan jumlah berikut: $1+3+5+7+...+101$ dalam penulisan sigma

Penyelesaian

$$1+3+5+7+...+101=\sum_{k=1}^{51}(2k-1)$$

Contoh 3.30:

Tuliskan jumlah berikut: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{100}$ dalam penulisan sigma.

Penyelesaian

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{100}=\sum_{l=1}^{100}\left[\frac{(-1)^{l+1}}{l}\right]$$

Contoh 3.31:

Tuliskan jumlah berikut: $a_{-1}+a_0+a_1+a_3+a_5+...+a_{1001}$ dalam penulisan sigma.

Penyelesaian

$$a_{-1}+a_0+a_1+a_3+a_5+...+a_{1001}=\sum_{k=1}^{1003}a_{k-2}$$

Contoh 3.32:

Jika diketahui $\sum_{i=1}^{10}n_i=40$ dan $\sum_{i=1}^{10}m_i=50$ maka tentukan penyelesaian dari $\sum_{i=1}^{10}(n_i+m_i)$

Penyelesaian

$$\sum_{i=1}^{10}(n_i+m_i)=\sum_{i=1}^{10}n_i+\sum_{i=1}^{10}m_i=40+50=90$$

Contoh 3.33:

Jika diketahui $\sum_{i=1}^{10} a_i = 40$ dan $\sum_{i=1}^{10} b_i = 50$ maka tentukan penyelesaian dari $\sum_{j=0}^{9}(a_{j+1} - b_{j+1})$

Penyelesaian: Andaikan: $i = j+1$ maka

$$\sum_{j=0}^{9}(a_{i+1} - b_{i+1}) = \sum_{i=1}^{10}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{10}(a_i) - \sum_{i=1}^{10}(b_i) = 40 - 50 = -10$$

Jadi $f(x_i) = x_i + 3 = \left(-2 + i.\frac{5}{n}\right) + 3 = 1 + \frac{5}{n} i$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + \tfrac{5}{n} i\right]\frac{5}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{5}{n} + \frac{25}{n^2} i\right]$$

$$= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}[1] + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

C. Tugas Kegiatan Belajar 3

Untuk memperluas wawasan Anda tentang notasi sigma, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Pada soal-soal 1 – 4, cari nilai dari jumlah yang ditunjukkan.

1. $\sum_{k=1}^{5}(3k - 1)$

2. $\sum_{k=1}^{6}(2k^2)$

3. $\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2$

4. $\sum_{k=1}^{6} k \sin \frac{(k\pi)}{2}$

Pada soal-soal 5 – 8, tuliskan jumlah yang ditunjukkan dalam penulisan sigma.

5. 1 + 2 + 3 + 4 + . . . 98

6. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{99}$

7. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...-\frac{1}{50}$

8. $f(k_1)+f(k_{-1})+f(k_1)+f(k_{-1})+f(k_1)++f(k_{-1})$

Pada soal-soal 9 – 10, cari nilai dari jumlah yang ditunjukkan.

9. Hitung: $\sum_{i=3}^{20}\left[\frac{1}{(i+1)^2}-\frac{1}{i^2}\right]$

10. Hitung: $\sum_{i=1}^{10}[2^i-2^{i-1}]$

D. Rangkuman Kegiatan 3

Berdasarkan paparan Kegaitan Belajar 3 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

1. Kesepakatan dalam sigma dengan fungsi konstan $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$

2. Teorema kelinearan sigma

- $\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$;
- $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

diamana $\{a_1\}$ dan $\{b_1\}$ menyatakan dua barisan dan c suatu konstanta. Maka:

3. Rumus jumlah berjatuhan $\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$

4. Rumus jumlah khusus

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 3

1. **Skor 5**

   Cari nilai dari jumlah $\sum_{k=1}^{3} (22k^2 + 6k - 1981)$

2. **Skor 5**

   Cari nilai dari jumlah $\sum_{k=1}^{5} \left[\frac{2}{k+1} - \frac{1}{2-k}\right]$

3. **Skor 5**

   Cari nilai dari jumlah $\sum_{k=1}^{8} \left[\frac{(-1)^m}{m}\left(2^{m-1}\right)\right]$

4. **Skor 6**

   Cari nilai dari jumlah $\sum_{k=1}^{5} \frac{\cos(k\pi)}{2k}$

5. **Skor 6**

   Tuliskan jumlah yang ditunjukkan dalam penulisan sigma dari $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \ldots + a_{100}$

6. **Skor 8**

   Tuliskan jumlah yang ditunjukkan dalam penulisan sigma dari $f(k_1) + f(k_2) + f(k_3) + \ldots + f(k_n)$

7. **Skor 15**

   Tuliskan jumlah yang ditunjukkan dalam penulisan sigma dari 1 + 0 – 1 – 2 – 3 – 4 + . . . – 40

8. **Skor 15**

   Tuliskan jumlah yang ditunjukkan dalam penulisan sigma dari $2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2$

9. **Skor 15**

   Cari nilai dari $\sum_{i=1}^{20} [(i+1)^4 - i^4]$

10. **Skor 20**

    $$Buktikan: \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1}{30}$$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 3.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar 4. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 3, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara.*

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

G. Bacaan Yang Di Anjurkan

Besari Ismail, 2007. Matematika 1. Institut Teknologi Bandung. Bandung: Ermico

BAB III

INTEGRAL TENTU

A. Pendahuluan

Bahan ajar ini terdiri dari empat kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 tentang luas poligon-poligon dalam dan luar, kegiatan belajar 2 tentang jumlah Riemann, kegiatan belajar 3 tentang integral tentu riemann dan kegiatan belajar 4 tentang Teorema Dasar Kalkulus. Setiap kegiatan belajar memuat uraian, contoh, tugas dan latihan, rangkuman dan tes formatif.

Dalam uraian materi integral tentu ini diuraikan tentang membuat suatu perumusan umum dari taksiran luas suatu daerah yang dibatasi oleh suatu lengkungan. Pada pembicaraan mengenai fungsi di kalkulus differensial, kita telah menyinggung mengenai partisi selang. Karena dalam mendefinisikan konsep integral tentu ini akan kita pakai dan memegang peranan yang cukup penting.

Kompetensi umum. Dan kompetensi khusus.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat penguasaan Anda pada tes formatif. Ulangi pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep luas poligon-poligon dalam dan luar, konsep jumlah Riemann, konsep integral tentu riemann dan konsep teorema dasar kalkulus.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan konsep luas poligon-poligon dalam dan luar, konsep jumlah Riemann, konsep integral tentu riemann dan konsep teorema dasar kalkulus.

Materi Pokok: luas poligon-poligon dalam dan luar, jumlah Riemann, integral tentu riemann dan Teorema Dasar Kalkulus.

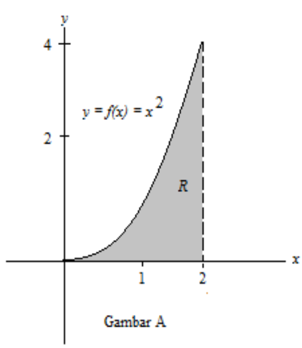
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 4)

Luas Menurut Poligon-poligon Dalam A(*R*)

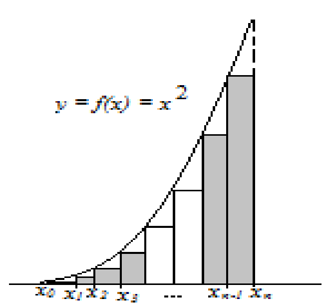
Pandang daerah *R* yang dibatasi oleh parabola $y = f(x) = x^2$, sumbu x, dan garis tegak $x = 2$ (**gambar A**). Kemudian R sebagai daerah di bawah kurva $y = x^2$ diantara $x = 0$ dan $x = 2$, sehingga pada akhirnya kita menghitung luas A(*R*). Selanjtnya partisi selang [0, 2] menjadi n selang bagian (**gambar B**), masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{2}{n}$.

Jadi,

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 1.\Delta x = \tfrac{2}{n}$$
$$x_2 = 2..\Delta x = 2.\tfrac{2}{n}$$
$$x_3 = 3.\Delta x = 3.\tfrac{2}{n}$$
$$\ldots$$
$$x_i = i.\Delta x = \tfrac{2}{n} i$$
$$\ldots$$
$$x_{n-1} = (n-1).\Delta x = \tfrac{2(n-1)}{n}$$
$$x_n = n..\Delta x = n.\left(\tfrac{2}{n}\right) = 2$$



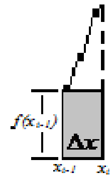
Gambar A



Gambar B

Karena $f(x) = x^2$, maka

$$f(x_0) = (x_0)^2 = (0)^2$$
$$f(x_1) = (x_1)^2 = \left(\tfrac{2}{n}\right)^2$$
$$f(x_2) = (x_2)^2 = \left(2.\tfrac{2}{n}\right)^2$$
$$f(x_3) = (x_3)^2 = \left(3.\tfrac{2}{n}\right)^2$$
$$\ldots$$
$$f(x_{n-1}) = (x_{n-1})^2 = \left(\tfrac{2(n-1)}{n}\right)^2$$



Luas $f(x_{i-1})\,\Delta x$

Pandang segi empat khas dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_{i-1}) = (x_i)^2 = \left(\tfrac{2i}{n}\right)^2$ maka luasnya adalah $f(x_{i-1})\Delta x$.

Sehingga Luas A(R_n) dapat dihitung,

$$A(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_{i-1})\Delta x$$

$$A(R_n) = (0)^2\,\tfrac{2}{n} + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2\tfrac{2}{n} + \left(2\tfrac{2}{n}\right)^2\tfrac{2}{n} + \left(3\tfrac{2}{n}\right)^2\tfrac{2}{n} + \ldots + \left(\tfrac{2(n-1)}{n}\right)^2\tfrac{2}{n}$$

$$A(R_n) = \left[(0)^2 + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \left(2\tfrac{2}{n}\right)^2 + \left(3\tfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{2(n-1)}{n}\right)^2\right]\tfrac{2}{n}$$

$$A(R_n) = \left[(0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n-1)^2\right]\left(\tfrac{2}{n}\right)^2.\left(\tfrac{2}{n}\right)$$

$$A(R_n) = \left[(0)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n-1)^2\right]\left(\tfrac{2}{n}\right)^3$$

$$A(R_n) = \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]\frac{8}{n^3}$$

$$A(R_n) = \left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right]\frac{8}{6}$$

$$A(R_n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Kita simpulkan bahwa:

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Luas Menurut Poligon--Poligon Luar A(*S*)

Untuk meyakinkan luas daerah di atas A(R)= $\frac{8}{3}$, kita dapat memberikan cara lain yaitu dengan pendekatan poligon luar.
Pandang daerah *R* yang dibatasi oleh parabol y = *f*(*x*) = x^2, sumbu x, dan garis tegak *x* = 2 (**gambar C**). Kemudian R sebagai daerah di bawah kurva y = x^2 diantara *x* = 0 dan *x* = 2, sehingga pada akhirnya kita menghitung luas A(*S*). selanjutnya partisi selang [0, 2] menjadi n selang bagian (**gambar D**), masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{2}{n}$.

Jadi,

$x_1 = 1.\Delta x = \frac{2}{n}$

$x_2 = 2..\Delta x = 2.\frac{2}{n}$

$x_3 = 3.\Delta x = 3.\frac{2}{n}$

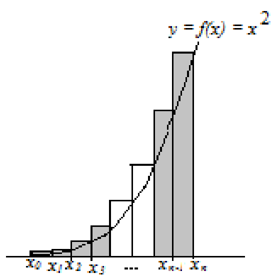
...

$x_i = i.\Delta x = \frac{2}{n} i$

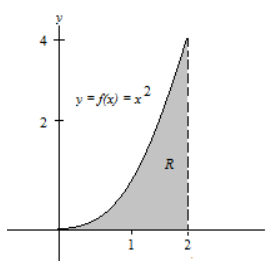
...

$x_{n-1} = (n-1).\Delta x \quad n$

$x_n = n..\Delta x = n.\left(\frac{2}{n}\right) = 2$



Gambar D



Gambar C

Karena $f(x) = x^2$, maka

$f(x_1) = (x_1)^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2$

$f(x_2) = (x_2)^2 = \left(2.\frac{2}{n}\right)^2$

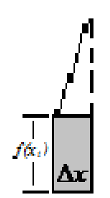
$f(x_3) = (x_3)^2 = \left(3.\frac{2}{n}\right)^2$

...

$f(x_i) = (x_i)^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2$

....

$f(x_n) = (x_n)^2 = \left(n\frac{2}{n}\right)^2$



Luas $f(x_i)$ Δx

Kemudian pandang segi empat khas dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_1) = (x_i)^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2$ maka luasnya adalah $f(x_i)\Delta x$.

Sehingga Luas A(S_n) dapat dihitung,

$$A(S_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$

$$A(S_n) = \left(\tfrac{2}{n}\right)^2 \tfrac{2}{n} + \left(2\tfrac{2}{n}\right)^2 \tfrac{2}{n} + \left(3\tfrac{2}{n}\right)^2 \tfrac{2}{n} + \ldots + \left(\tfrac{2(n-1)}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{2n}{n}\right)^2 \tfrac{2}{n}$$

$$A(S_n) = \left[\left(\tfrac{2}{n}\right)^2 + \left(2\tfrac{2}{n}\right)^2 + \left(3\tfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{2(n-1)}{n}\right)^2 + \left(\tfrac{2n}{n}\right)^2\right]\tfrac{2}{n}$$

$$A(S_n) = \left[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right]\left(\tfrac{2}{n}\right)^2.\left(\tfrac{2}{n}\right)$$

$$A(S_n) = \left[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right]\left(\tfrac{2}{n}\right)^3$$

$$A(S_n) = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\frac{8}{n^3}$$

$$A(S_n) = \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right]\frac{8}{6} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

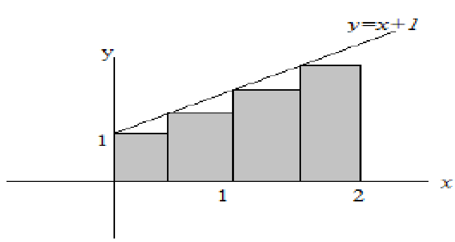
Kita simpulkan bahwa:

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} A(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Menentukan luas daerah pada polygon berhingga

Contoh 4.1:

Tentukan luas poligon dalam dari gambar berikut:



Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$f(x) = x + 1$

$x_0 = 0 \qquad \Rightarrow f(x_0) = 0 + 1 = 1$

$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \Rightarrow f(x_2) = 1 + 1 = 2$

$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow f(x_3) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

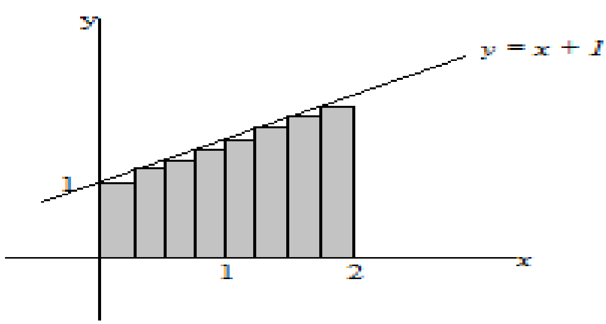
$$A(R_4) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$

$$A(R_4) = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\Delta x$$

$$A(R_4) = [\tfrac{2}{2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{2} + \tfrac{5}{2}]\tfrac{1}{2} = \tfrac{14}{4} = 7$$

Contoh 4.2:

Tentukan luas poligon dalam dari gambar berikut:



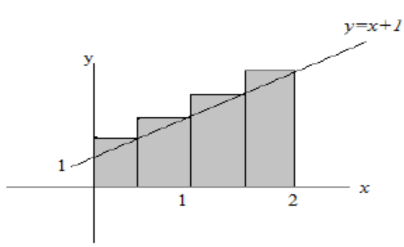
Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_8 - x_0}{8} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$
$$f(x) = x + 1$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow f(x_0) = 0 + 1 = 1$$
$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$
$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow f(x_2) = \frac{2}{4} + 1 = \frac{6}{4}$$
$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow f(x_3) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$
$$x_5 = x_0 + 5.\Delta x = 0 + 5.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow f(x_4) = 1 + 1 = 2$$
$$x_6 = x_0 + 6.\Delta x = 0 + 6.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow f(x_5) = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$
$$x_7 = x_0 + 7.\Delta x = 0 + 7.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow f(x_6) = \frac{6}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$
$$x_8 = x_0 + 8.\Delta x = 0 + 8.\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \quad \Rightarrow f(x_7) = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$$

$$A(R_8) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_7)\Delta x$$
$$A(R_8) = [\tfrac{4}{4} + \tfrac{5}{4} + \tfrac{6}{4} + \tfrac{7}{4} + \tfrac{8}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{10}{4} + \tfrac{11}{4}]\tfrac{1}{4} = \tfrac{60}{16} = \tfrac{15}{4}$$

Contoh 4.3:

Tentukan luas poligon luar dari gambar berikut:



Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$
$$f(x) = x + 1$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow f(x_2) = 1 + 1 = 2$$
$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow f(x_3) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$
$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow f(x_4) = 2 + 1 = 3$$

$$A(S_4) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$
$$A(S_4) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]\Delta x$$
$$A(S_4) = [\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{2} + \tfrac{5}{2} + \tfrac{6}{2}]\tfrac{1}{2} = \tfrac{18}{4} = \tfrac{9}{2}$$

Contoh 4.4:

Cari daerah di bawah kurva y = $f(x) = x + 2$, sumbu x, pada selang [0, 1], kemudian dibagi menjadi n bagian selang yang sama. Hitung luas polygon luarnya.

Penyelesaian:

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{n} = \tfrac{1-0}{n} = \tfrac{1}{n}$$
$$x_1 = 1.\Delta x = \tfrac{1}{n}$$
$$x_2 = 2..\Delta x = 2.\tfrac{1}{n}$$
$$x_3 = 3.\Delta x = 3.\tfrac{1}{n}$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$x_i = i.\Delta x = \tfrac{1}{n} i$$
$$\ldots$$
$$x_{n-1} = (n-1).\Delta x = \tfrac{(n-1)}{n}$$
$$x_n = n..\Delta x = n.\left(\tfrac{1}{n}\right) = 2$$

Karena $f(x) = x + 2$, maka

$$f(x_1) = (x_1) + 2 = \left(\tfrac{1}{n}\right) + 2$$
$$f(x_2) = (x_2) + 2 = \left(2.\tfrac{1}{n}\right) + 2$$
$$f(x_3) = (x_3) + 2 = \left(3.\tfrac{1}{n}\right) + 2$$

...

$$f(x_i) = (x_i) + 2 = \left(\tfrac{i}{n}\right) + 2$$

....

$$f(x_n) = (x_n) + 2 = \left(n\tfrac{1}{n}\right) + 2$$

Kemudian pandang segi empat khas dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_1) = (x_i) + 2 = \left(\tfrac{i}{n}\right) + 2$ maka luasnya adalah $f(x_i)\Delta x$.

Sehingga Luas Poligon luar atau A(S_n) dapat dihitung,

$$A(S_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x$$

$$A(S_n) = [\left(\tfrac{1}{n}\right) + 2]\tfrac{1}{n} + [\left(2\tfrac{1}{n}\right) + 2]\tfrac{1}{n} + ... + [\left(n\tfrac{1}{n}\right) + 2]\tfrac{1}{n}$$

$$A(S_n) = \left([\left(1\tfrac{1+2n}{n}\right)] + [\left(2\tfrac{1+2n}{n}\right)] + ... + [n\left(\tfrac{1+2n}{n}\right)]\right)\tfrac{1}{n}$$

$$A(S_n) = [(1) + (2) + (3) + ... + (n-1) + n][\tfrac{1+2n}{n^2}]$$

$$A(S_n) = [1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n]\left(\tfrac{1+2n}{n^2}\right)$$

$$A(S_n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\left[\frac{1+2n}{n^2}\right] = \left[\frac{n^2 + n}{2}\right]\left[\frac{1+2n}{n^2}\right]$$

$$A(S_n) = \left[\frac{n^2 + n + 4n^2}{2n^2}\right] = \left[\frac{5n^2 + n}{2n^2}\right] = \frac{5}{2} + \frac{1}{2n}$$

Kita simpulkan bahwa:

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} A(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$$

Contoh 4.5:

Cari daerah di bawah kurva y = *f*(*x*) $f(x) = x + 2$ sumbu x, pada selang [0, 1], kemudian dibagi menjadi n bagian selang yang sama. Hitung luas polygon dalamnya.

Penyelesaian:

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$x_0 = 0$

$x_1 = 1.\Delta x = \frac{1}{n}$

$x_2 = 2..\Delta x = 2.\frac{1}{n}$

$x_3 = 3.\Delta x = 3.\frac{1}{n}$

...

$x_i = i.\Delta x = \frac{1}{n} i$

...

$x_{n-1} = (n-1).\Delta x = \frac{(n-1)}{n}$

Karena $f(x) = x + 2$, maka

$f(x_0) = (x_1) + 2 = 0 + 2$

$f(x_1) = (x_1) + 2 = \left(\frac{1}{n}\right) + 2$

$f(x_2) = (x_2) + 2 = \left(2.\frac{1}{n}\right) + 2$

$f(x_3) = (x_3) + 2 = \left(3.\frac{1}{n}\right) + 2$

...

$f(x_i) = (x_i) + 2 = \left(\frac{i}{n}\right) + 2$

....

$f(x_{n-1}) = (x_{n-1}) + 2 = \left([n-1]\frac{1}{n}\right) + 2$

Kemudian pandang segi empat khas dengan alas $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x_1) = (x_i) + 2 = \left(\frac{i}{n}\right) + 2$ maka luasnya adalah $f(x_i)\Delta x$.

Sehingga Luas Poligon dalam atau A(R_n) dapat dihitung,

$$A(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$$
$$A(R_n) = [(0\cdot\tfrac{1}{n}) + 2]\tfrac{1}{n} + [(1\cdot\tfrac{1}{n}) + 2]\tfrac{1}{n} + \ldots + [([n-1]\tfrac{1}{n}) + 2]\tfrac{1}{n}$$

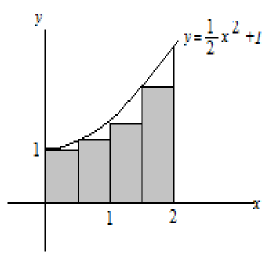
$$A(R_n) = \left[\frac{5}{2} + \frac{n}{2n^2}\right]$$

Kita simpulkan bahwa:

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2} + \frac{n}{2n^2}\right) \approx \frac{5}{2}$$

Contoh 4.6:

Tentukan luas poligon dalam dari gambar berikut:



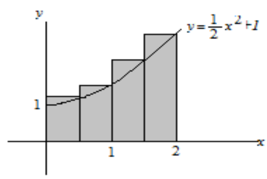
Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$
$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 1$$
$$x_0 = 0 \qquad \Rightarrow f(x_0) = \tfrac{1}{2}(0)^2 + 1 = 1$$
$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow f(x_1) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 + 1 = \frac{9}{8}$$
$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \Rightarrow f(x_2) = \tfrac{1}{2}(1)^2 + 1 = \tfrac{3}{2}$$
$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow f(x_3) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^2 + 1 = \frac{17}{8}$$
$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$A(R_4) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$
$$A(R_4) = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\Delta x$$
$$A(R_4) = [\tfrac{8}{8} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{12}{8} + \tfrac{17}{8}]\tfrac{1}{2} = \tfrac{23}{8}$$

Contoh 4.7:

Tentukan luas poligon luar dari gambar berikut:



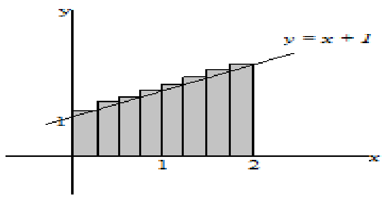
Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$
$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 1$$
$$x_0 = 0$$
$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x_1) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 + 1 = \frac{9}{8}$$
$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow f(x_2) = \tfrac{1}{2}(1)^2 + 1 = \frac{3}{2}$$
$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow f(x_3) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^2 + 1 = \frac{17}{8}$$
$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow f(x_4) = \tfrac{1}{2}(2)^2 + 1 = 3$$

$$A(S_4) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$
$$A(S_4) = [\tfrac{9}{8} + \tfrac{12}{8} + \tfrac{17}{8} + \tfrac{24}{8}]\tfrac{1}{2} = \tfrac{31}{8}$$

Contoh 4.8:

Tentukan luas poligon luar dari gambar berikut:



Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_8 - x_0}{8} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = x + 1$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f(x_2) = \frac{2}{4} + 1 = \frac{6}{4}$$

$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow f(x_3) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 0 + 4.\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow f(x_4) = 1 + 1 = 2$$

$$x_5 = x_0 + 5.\Delta x = 0 + 5.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow f(x_5) = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

$$x_6 = x_0 + 6.\Delta x = 0 + 6.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow f(x_6) = \frac{6}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$x_7 = x_0 + 7.\Delta x = 0 + 7.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow f(x_7) = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$$

$$x_8 = x_0 + 8.\Delta x = 0 + 8.\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \quad \Rightarrow f(x_7) = 2 + 1 = 3$$

$$A(S_8) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_8)\Delta x$$

$$A(S_8) = \left[\tfrac{5}{4} + \tfrac{6}{4} + \tfrac{7}{4} + \tfrac{8}{4} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{10}{4} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{12}{4}\right]\tfrac{1}{4} = \tfrac{68}{16} = \tfrac{17}{4}$$

Contoh 4.9:

Grafik fungsi $f(x) = x + 1$ yang diberikan pada selang [-1,2] kemudian dibagi menjadi 3 bagian selang yang sama. Hitung luas polygon dalamnya.

Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_3 - x_0}{3} = \frac{2-(-1)}{3} = 1$$

$$f(x) = x + 1$$

$$x_0 = -1 \qquad \Rightarrow f(x_0) = -1 + 1 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = -1 + 1.(1) = 0 \qquad \Rightarrow f(x_1) = 0 + 1 = 1$$

$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = -1 + 2.(1) = 1 \qquad \Rightarrow f(x_2) = 1 + 1 = 2$$

$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = -1 + 3.(1) = 2 \qquad \Rightarrow f(x_3) = 2 + 1 = 3$$

$$A(R_4) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x$$

$$A(R_4) = [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)]\Delta x \;\; A(R_4) = [0 + 1 + 2 + 3]1 = 6$$

Contoh 4.10:

Grafik fungsi $f(x) = 3x - 1$ yang diberikan pada selang [1,3] kemudian dibagi menjadi 4 bagian selang yang sama. Hitung luas polygon luarnya.

Penyelesaian:

$$\Delta x = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 3x - 1$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 + 1.\Delta x = 1 + 1.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow f(x_1) = 3(\tfrac{3}{2}) - 1 = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = x_0 + 2.\Delta x = 1 + 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow f(x_2) = 3(2) - 1 = 5$$

$$x_3 = x_0 + 3.\Delta x = 1 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow f(x_3) = 3(\tfrac{5}{2}) - 1 = \frac{12}{2}$$

$$x_4 = x_0 + 4.\Delta x = 1 + 4.\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad \Rightarrow f(x_4) = 3(3) - 1 = 8$$

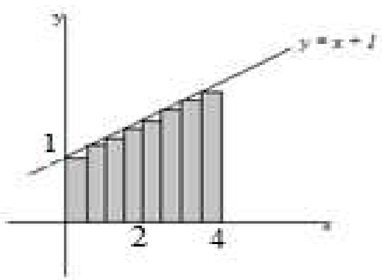
$$A(S_4) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$
$$A(S_4) = [\tfrac{7}{2} + \tfrac{10}{2} + \tfrac{12}{2} + \tfrac{16}{2}]\tfrac{1}{2} = \tfrac{45}{4}$$

C. Tugas Kegiatan Belajar 4.

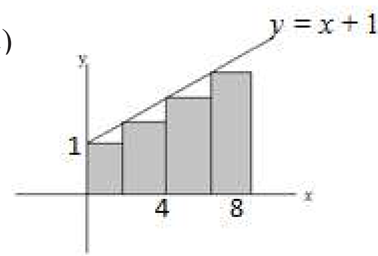
Untuk memperluas wawasan Anda tentang poligon dalam dan luar, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat materi yang relevan lainnya.

Dalam Soal 1 – 4, tentukan luas poligon dalam dan poligon luar yang ditunjukkan oleh:

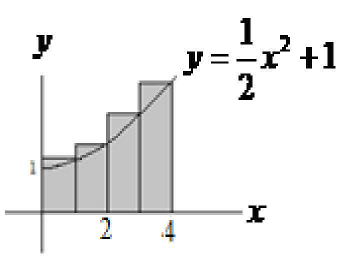
1)



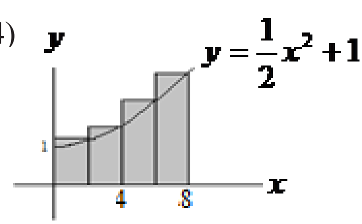
2)



3)



4)



Pada soal-soal 5 – 8, sketsa grafik fungsi yang diberikan pada selang [a, b], kemudian bagi [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, dan akhirnya hitung poligon dalam yang berpadanan:

5. f(x) = 2x + 3; a = -1, b = 2, n = 3

6. $f(x) = 3x - 2$; $a = 1$, $b = 3$, $n = 4$

7. $f(x) = x^2 + 2$; $a = 0$, $b = 2$, $n = 6$

8. $f(x) = x^2 + 1$; $a = -1$, $b = 1$, $n = 8$

Pada soal 9 – 10, tentukan luas daerah di bawah kurva y = f(x) pada selang [a, b]. untuk melakukan ini, bagi selang [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, kemudian hitung luas poligon luar yang berpadanan.

9. $y = x - 3$; $a = 0$, $b = 2$

10. $y = x^2 - 3$; $a = 0$, $b = 2$

D. Rangkuman Kegiatan 4

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 4 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah tentang :
Luas menurut polygon dalam $A(R_n)$ dapat dihitung dengan

$$A(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_{i-1})\Delta x$$

Luas menurut polygon luar $A(S_n)$ dapat dihitung

$$A(S_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x$$

E. Penilaian/Tes Formatif 4

Pada soal-soal 1 – 4, sketsa grafik fungsi yang diberikan pada selang [a, b], kemudian bagi [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, dan akhirnya hitung **poligon dalam** yang berpadanan:

1. **Skor 10**

   $f(x) = x + 2$; $a = 1$, $b = 4$, $n = 4$

2. **Skor 10**

   $f(x) = 2 - x$; $a = 1$, $b = 4$, $n = 4$

3. **Skor 10**

   $f(x) = x^2 + 2$; $a = -1, b = 1, n = 6$

4. **Skor 10**

   $f(x) = 2 – x^2$; $a = -1, b = 1, n = 6$

Pada soal-soal 5 – 8, sketsa grafik fungsi yang diberikan pada selang [a, b], kemudian bagi [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, dan akhirnya hitung **polygon luar** yang berpadanan:

5. **Skor 10**

   $f(x) = x + 2$; $a = 1, b = 4, n = 4$

6. **Skor 10**

   $f(x) = 2 – x$; $a = 1, b = 4, n = 4$

7. **Skor 10**

   $f(x) = x^2 + 2$; $a = -1, b = 1, n = 6$

8. **Skor 10**

   $f(x) = 2 – x^2$; $a = -1, b = 1, n = 6$

9. Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada selang [a, b]. untuk melakukan ini, bagi selang [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, kemudian hitung luas **poligon luar** yang berpadanan dari $y = x^2 + x$; $a = 0, b = 2$
10. Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada selang [a, b]. untuk melakukan ini, bagi selang [a, b] menjadi n selang bagian yang sama, kemudian hitung luas **poligon luar** yang berpadanan dari $y = x^2 – x$; $a = 0, b = 2$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 4

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

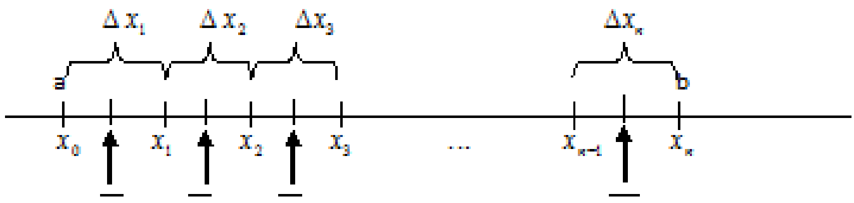
Baik Sekali	: 90% s/d 100%
Baik	: 80% s/d 89%
Cukup	: 70% s/d 79%
Kurang	: < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 5. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 4, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 5)

Jumlah Reimann (R_p)

Pandang sebuah fungsi f yang didefinisikan pada selang tertutup [a, b]. Pandang suatu partisi P dari selang [a, b] menjadi n selang (tidak perlu sama panjang) menggunakan titik-titik a = $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$ = b dan andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sebarang $\bar{x}_i$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung); kita sebut sebagai *titik sampel* untuk selang bagian ke-*i*. berikut diberikan ilustrasi (**Gambar A**) berikut:

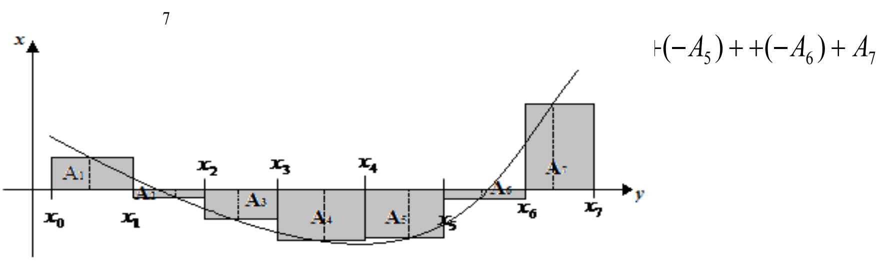


Gambar A

Untuk setiap subselang, hitunglah $f(\overline{x_i}).\Delta x_i$, kemudian jumlahkan semua hasil kali $f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ mulai dari i = 1 sampai i = n. jumlah itulah yang kita sebut dengan **Jumlah Riemann** dapat kita tulis dengan:

$$\boxed{R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i}$$

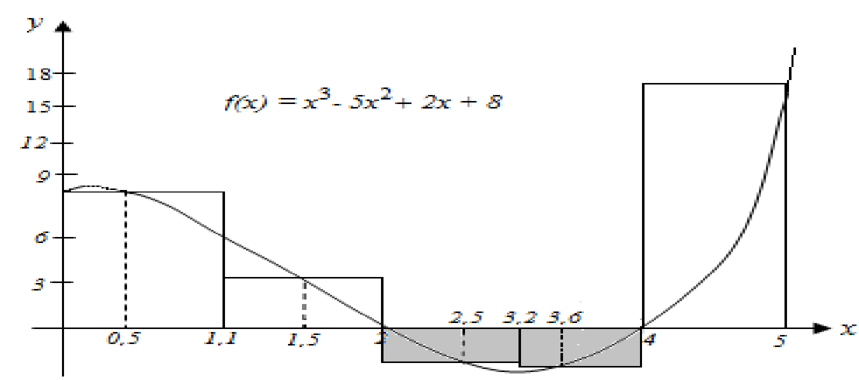
untuk f yang bersesuaian dengan partisi P tafsiran secara geometris *jumlah riemann* untuk suatu partisi P dapat diilustrasikan sebagai berikut (untuk n = 7)



Dengan demikian secara geometris jumlah Riemann dapat ditafsirkan sebagai **jumlah aljabar dari luas-luas.** Dalam hal ini fungsi f bernilai *non-negative* pada selang [a, b], maka jumlah Riemann dapat diartikan sebagi jumlah luas-luas.

Contoh 5.1:

Hitunglah Jumlah Riemann dari gambar berikut:



Penyelesaian:

Fungsi f dengan persamaan $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$ pada selang [0, 5] dengan titik partisi $0 < 1{,}1 < 2 < 3{,}2 < 4 < 5$, dengan titik sampel yang berpadan $\overline{x_1} = 0{,}5$; $\overline{x_2} = 1{,}5$; $\overline{x_3} = 2{,}5$; $\overline{x_4} = 3{,}6$; $\overline{x_5} = 5$ sehingga

$$R_p = \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$\text{Rp} = f(\overline{x_1}).\Delta x_1 + f(\overline{x_2}).\Delta x_2 + f(\overline{x_3}).\Delta x_3 + f(\overline{x_4}).\Delta x_4 + f(\overline{x_5}).\Delta x_5$$

$= f(0{,}5)(1{,}1 - 0) + f(1{,}5)(2 - 1{,}1) + f(2{,}5)(3{,}2 - 2) + f(3{,}6)(4 - 3{,}2) + f(5)(5 - 4)$

$= (7{,}875)(1{,}1) + (3{,}125)(0{,}9) + (-2{,}625)(1{,}2) + (-2{,}944)(0{,}8) + (18)(1)$

$= 23{,}9698$

Berdasarkan kedua contoh di atas terdapat $|P|$, dibaca "**norma *P***", menyatakan *selang bagian terpanjang dari partisi P*. Misalnya Contoh I, $|P| = 0{,}5$; dalam Contoh II, $|P| = 1{,}2$.

Contoh 5.2:

Hitunglah Jumlah Riemann $R_p = \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ dari untuk data $f(x) = x - 1$; P = $3 < 3{,}75 < 4{,}25 < 5{,}5 < 6 < 7$, $\overline{x_1} = 3$; $\overline{x_2} = 4$; $\overline{x_3} = 4{,}75$; $\overline{x_4} = 6$; $\overline{x_5} = 6{,}5$

Penyelesaian:

Jumlah Riemann

$$R_p = \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$R_p = (3{,}75 - 3)(3) + (4{,}25 - 3{,}75)(4)$$
$$+ (5{,}5 - 4{,}25)(4{,}75) + (6 - 5{,}5)(6) + (7 - 6)(6{,}5)$$

$$R_p = (0{,}75)(3) + (0{,}5)(4) + (1{,}25)(4{,}75) + (0{,}5)(6) + (1)(6{,}5)$$

$$R_p = 2{,}25 + 2 + 5{,}9375 + 3 + 6{,}5 = 15{,}6875$$

Contoh 5.3:

Hitunglah Jumlah Riemann $R_p = \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ dari untuk data

$f(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$; P = –3 < –1,3 < 0 < 0,9 < 2,

$\overline{x_1} = -2$; $\overline{x_2} = -0{,}5$; $\overline{x_3} = 0$; $\overline{x_4} = 2$

Penyelesaian:

Jumlah Riemann

$$R_p = \sum_{i=1}^{4} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$R_p = (1{,}77)(4) + (3{,}25)(1{,}3) + (0{,}9)(3) + (1{,}1)(2) = 15{,}925$$

Contoh 5.4:

Hitung jumlah Riemaan $f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ untuk data yang diberikan

$f(x) = 2x + 1;\ P: 0 < 0{,}5 < 1 < 1{,}5 < 2 < 2{,}5 < 3;$

$\overline{x}_1 = 0\ \overline{x}_2 = 0{,}5$, $\overline{x}_3 = 1$, $\overline{x}_4 = 1{,}5$, $\overline{x}_5 = 2$, $\overline{x}_6 = 2{,}5$

Penyelesaian

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(\overline{x}) = 2x + 1$$
$$f(0) = 2(0) + 1 = 1$$
$$f(0{,}5) = 2(0{,}5) + 1 = 2$$
$$f(1) = 2(1) + 1 = 3 \qquad \vdots$$
$$f(1{,}5) = 2(1{,}5) + 1 = 4$$
$$f(2) = 2(2) + 1 = 5$$
$$f(2{,}5) = 2(2{,}5) + 1 = 6$$

$$\Delta x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1} \Rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_1 = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$$
$$\Delta x_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$
$$\Delta x_3 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$$
$$\Delta x_4 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$$
$$\Delta x_5 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$$
$$\Delta x_6 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$$

Sehigga Jumlah Riemann adalah:

$$R_p = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$R_p = (1)(0{,}5) + (2)(0{,}5) + (3)(0{,}5) + (4)(0{,}5) + (5)(0{,}5) + (6)(0{,}5)$$

$$R_p = (0{,}5) + (1) + (1{,}5) + (2) + (2{,}5) + (3)$$

$$R_p = 10{,}5$$

Contoh 5.5:

Hitung jumlah Riemaan $f(\overline{x_i}).\Delta x_i$ untuk data yang diberikan

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 5;\ P: 1 < 1{,}4 < 1{,}8 < 2{,}2 < 2{,}6 < 2{,}8 < 3;$$
$$\overline{x}_1 = 1\ \overline{x}_2 = 1{,}4\ ,\ \overline{x}_3 = 1{,}8\ ,\ \overline{x}_4 = 2{,}2\ ,\ \overline{x}_5 = 2{,}6,\ \overline{x}_6 = 3$$

Penyelesaian

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(\overline{x}) = -2\overline{x}^{2} + 3\overline{x} + 5$$

$$\begin{aligned} f(\overline{x_1}) &= -4 \\ f(\overline{x_2}) &= -4{,}72 \\ f(\overline{x_3}) &= -6{,}08 \\ f(\overline{x_4}) &= -8{,}08 \\ f(\overline{x_5}) &= -10{,}72 \\ f(\overline{x_6}) &= -14 \end{aligned}$$

$$\Delta x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1} \Rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 0{,}5 \\ \Delta x_2 &= 0{,}7 \\ \Delta x_3 &= 0{,}1 \\ \Delta x_4 &= 0{,}2 \\ \Delta x_5 &= 0{,}3 \\ \Delta x_6 &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Sehigga Jumlah Riemann adalah:

$$R_p = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$R_p = (-4)(0{,}5) + (-4{,}72)(0{,}7) + (-6{,}08)(0{,}1) + (-8{,}08)(0{,}2) + (-10{,}72)(0{,}3) + (-14)(0{,}2)$$

$$R_p = (-2) + (-3{,}304) + (-0{,}608) + (-1{,}616) + (-3{,}216) + (-2{,}8)$$

$$R_p = -13{,}544$$

Contoh 5.6:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1;\ P: -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4$;

dan $\overline{x}_1$ adalah titik tengah subselang ke - i

Penyelesaian:

$$Karena\ \overline{x}_1 \text{ adalah titik tengah subselang ke - } i$$

$$\overline{x}_1 = -1{,}5\ ;\ \overline{x}_2 = -0{,}5\ ,\ \overline{x}_3 = 0{,}5\ ;$$

$$\overline{x}_4 = 1{,}5\ ,\ \overline{x}_5 = 2{,}5,\ \overline{x}_6 = 3{,}5$$

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x + 1 \Rightarrow f(\overline{x}) = \tfrac{1}{3}\overline{x}^3 - 2\overline{x} + 15$$

$$f(\overline{x_1}) = 6{,}875$$

$$f(\overline{x_2}) = 5{,}958$$

$$f(\overline{x_3}) = 4{,}041$$

$$f(\overline{x_4}) = 3{,}125$$

$$f(\overline{x_5}) = 5{,}208$$

$$f(\overline{x_6}) = 3{,}12$$

$$\Delta x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1} \Rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_1 = 1$$

$$\Delta x_2 = 1$$

$$\Delta x_3 = 1$$

$$\Delta x_4 = 1$$

$$\Delta x_5 = 1$$

$$\Delta x_6 = 1$$

Sehigga Jumlah Riemann adalah:

$$R_p = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

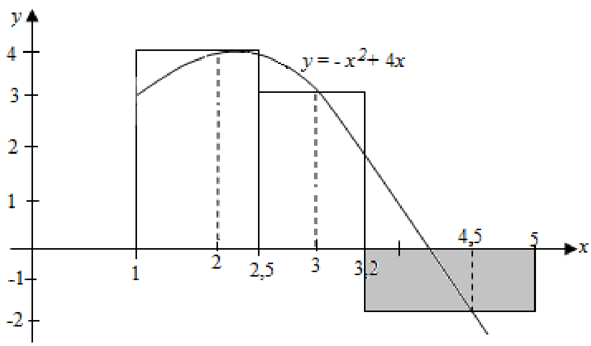
$$R_p = (6{,}875)(1) + (5{,}958)(1) + (4{,}041)(1) + (3{,}125)(1) + (5{,}208)(1) + (12{,}291)(1)$$

$$R_p \cong 6{,}875 + 5{,}958 + 4{,}041 + 3{,}125 + 5{,}208 + 12{,}291$$

$$R_p = 37{,}5$$

Contoh 5.7:

Hitung jumlah Riemaan dari grafik yang ditunjuk



Penyelesaian:

$f(x) = x^2 + 4x;\ P: 1 < 2{,}5 < 3{,}2 < 5;$

$\quad \overline{x}_1 = 2\ \overline{x}_2 = 3\ ,\ \overline{x}_3 = 4{,}5$

Penyelesaian

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(\overline{x}) = \overline{x}^2 + 4\overline{x}$$
$$f(2) = 2^2 + 4(2) = 12$$
$$f(3) = 3^2 + 4(3) = 21$$
$$f(4{,}5) = (4{,}5)^2 + 4(4{,}5) = 38{,}25$$

$$\Delta x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1} \Rightarrow \Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_1 = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$$
$$\Delta x_2 = 3{,}5 - 2{,}5 = 1$$
$$\Delta x_3 = 5 - 3{,}5 = 1{,}5$$

Sehigga Jumlah Riemann adalah:

$$R_p = \sum_{i=1}^{3} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

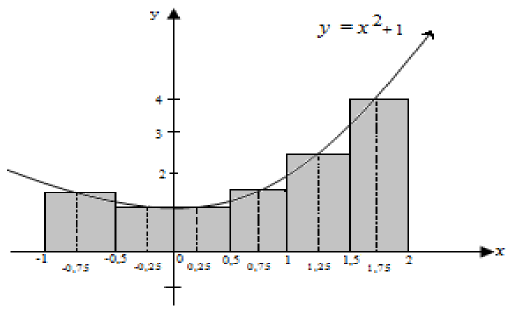
$$R_p = (12)(1{,}5) + (21)(1) + (38{,}25)(1{,}5)$$

$$R_p = 18 + 21 + 57{,}375$$

$$R_p = 96{,}375$$

Contoh 5.8:

Hitunglah Jumlah Riemann untuk fungsi *f* dengan persamaan *f(x)* = $x^2 + 1$ pada selang [- 1, 2] mengguna kan titik-titik pada partisi yang berjarak sama –1 < –0,5 < 0 < 0,5 < 1 < 1,5 < 2, dengan titik sampel $\overline{x_i}$ berupa titik tengah selang bagian ke-*i*



Penyelesaian:

$$R_p = \sum_{i=1}^{6} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$\boldsymbol{R_p}$ = $f(-0{,}75).(0{,}5) + f(-0{,}25).(0{,}5) + f(0{,}25).(0{,}5) + f(0{,}75).(0{,}5) + f(1{,}25).(0{,}5) + f(1{,}75).(0{,}5)$

= $[f(-0{,}75) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)].(0{,}5)$

= [1,5625 + 1,0625 + 1,0625 + 1,5625 + 2,5625 + 4,0625] . (0,5)

= 5,9375

Contoh 5.9:

Gunakan nilai-nilai a dan b yang diberikan dan nyatakan limit yang diberikan sebagai sebuah integral tentu dari

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x_i})^3.\Delta x_i;\ a=1, b=3$$

Penyelesaian:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i ; pada\,[a,b] = \int_a^b x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i)^3.\Delta x_i ;\ a=1, b=3 \Leftrightarrow \int_1^3 x^3\,dx$$

Contoh 5.10:

Gunakan nilai-nilai a dan b yang diberikan dan nyatakan limit yang diberikan sebagai sebuah integral tentu dari

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i+1)^3.\Delta x_i ;\ a=0, b=2$$

Penyelesaian:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i ; pada\,[a,b] = \int_a^b x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i+1)^3.\Delta x_i ;\ a=0, b=2 \Leftrightarrow \int_0^2 (x+1)^3$$

Contoh 5.11:

Gunakan nilai-nilai a dan b yang diberikan dan nyatakan limit yang diberikan sebagai sebuah integral tentu dari

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^{\,2}}{1+\overline{x}_i}.\Delta x_i ;\ a=-1, b=1$$

Penyelesaian:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i ; pada\,[a,b] = \int_a^b x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{x}_i^{\,2}}{1+\overline{x}_i}.\Delta x_i;\;\; a=-1, b=1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1-x}\,dx$$

13. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin\,\overline{x}_i)^2.\Delta x_i;\;\; a=0, b=\pi$

Penyelesaian:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\,(\overline{x_i}).\Delta x_i\,; pada\,[a,b]=\int_a^b x\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin\,\overline{x}_i)^2.\Delta x_i;\;\; a=0, b=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\;6$$

G. Tugas Kegiatan Belajar 5.

Untuk memperluas wawasan Anda tentang jumlah riemann, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat materi yang relevan lainnya.

Dalam soal nomor 1 dan 2, hitung jumlah Riemaan $f\,(\overline{x_i}).\Delta x_i$ untuk data yang diberikan

1. $f\,(x)=1-x;\; P: -7 < -6 < -5{,}5 < -4{,}25 < -3{,}75 < -3\;;$
   $\overline{x}_1 = -6{,}5,\; \overline{x}_2 = -6,\; \overline{x}_3 = -4{,}75,\; \overline{x}_4 = -4,\; \overline{x}_5 = -3$

2. $f\,(x) = -\dfrac{(6+2x)}{2};\; P: -2 < -0{,}9 < 0 < 1{,}3 < 3;$
   $\overline{x}_1 = -2,\; \overline{x}_2 = -0{,}5,\; \overline{x}_3 = 0,\; \overline{x}_4 = 2$

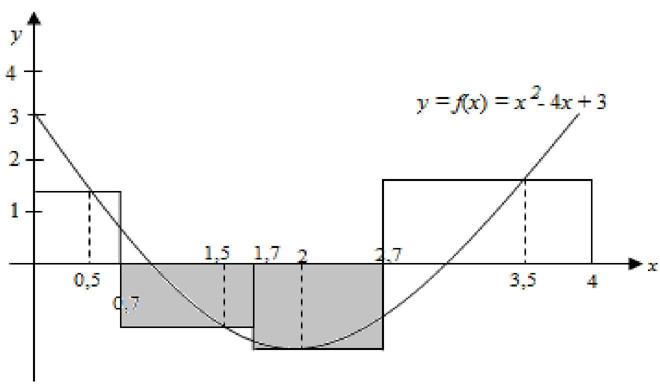
3. $f\,(x) = x^3 + 2x + 1;\; P: -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4\;;$
   dan $\overline{x}_1$ adalah titik tengah subselang ke - i

4. $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{3}x^3$; $P: -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2$;
   dan $\overline{x}_1$ adalah titik tengah subselang ke - i

Untuk soal nomor 5 - 9 diberikan fungsi dalam selang [a, b] dan dibagi menjadi empat subselang yang sama panjang dan titik sampel ke-*i* adalah titik tengah dari masing-masing subselang ke-*i* Kemudian tentukan Jumlah Reimannnya

5. $f(x) = x + 1$; $[0,4]$
6. $f(x) = 1 - x$; $[-3,-1]$
7. $f(x) = 2x - 1$; $[1,8]$
8. $f(x) = 4 - 2x$; $[-2,0]$
9. $f(x) = 2 - \frac{5}{3}x$; $[-\frac{3}{5},0]$

10. Hitung jumlah Riemaan yang ditunjuk oleh grafik yang berikut:



H. Rangkuman Kegiatan Belajar 5

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 5 ini maka garis besar bahan yang dibahas tentang Jumlah Riemann dapat kita tulis dengan:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i).\Delta x_i$$

I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 5

Untuk soal nomor 1 - 10 diberikan fungsi dalam selang [a, b] dan dibagi menjadi empat subselang yang sama panjang dan titik sampel ke-i adalah titik tengah dari masing-masing subselang ke-i Kemudian tentukan Jumlah Reimannnya

1. $f(x) = x - 1;\ [-1,1]$ .....$(Skor 10)$
2. $f(x) = 1 - x;\ [-4,0]$ .....$(Skor 10)$
3. $f(x) = 2x - 1;\ [0,8]$ .....$(Skor 10)$
4. $f(x) = 1 - 2x;\ [-2,0]$ .....$(Skor 10)$
5. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x;\ [-2,0]$ .....$(Skor 10)$
6. $f(x) = 3x + 1;\ [0,4]$ .....$(Skor 10)$
7. $f(x) = 1 - 3x;\ [-3,0]$ .....$(Skor 10)$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1;\ [2,2]$ .....$(Skor 10)$
9. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x;\ [-2,2]$ .....$(Skor 10)$
10. $f(x) = 1 - \frac{5}{3}x;\ [-\frac{3}{5},0]$ .....$(Skor 10)$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 5

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan Belajar 6. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 5, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 6)

Integral Tentu Riemann

Integral tentu adalah integral dengan batas-batas integrasi yang telah ditentukan. Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mempelajari bahwa integral dapat diartikan sebagai limit jumlah, yaitu jika f suatu fungsi yang dapat dicari antiturunannya pada suatu interval dan F merupakan antiturunan dari f.

Pada Pembahasan ini dan selanjutnya partisi yang kita digunakan adalah *partisi seragam* dan notasi Δx_i dan $\bar{x}_i$ mempunyai makna yang sama dengan notasi pada bahasan Jumlah Riemann di atas yaitu berturut-turut menotasikan panjang subselang ke-I dan titik sampel subselang ke-i. Berikut ini adalah definisi integral tentu.

DEFINISI INTEGRAL TENTU SEBAGAI LIMIT JUMLAH RIEMANN

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada [a, b]. Jika $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x_i$ ada, maka kita katakana f terintegralkan pada [a, b]. selanjutnya nilai limit itu kita sebut integral tentu (Integral Riemann) dari f pada selang a ke b dan dinotasikan dengan $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

Jadi dalam hal ini $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x_i$.

Sebaliknya jika limit di atas tidak ada, kita katakana fungsi f tak terintegralkan pada [a, b]

Pada notasi $\int_a^b f(x)\,dx$, kita katakana a adalah batas bawah penginteralan, b adalah batas atas pengintegralan dan f (x) adalah integran (fungsi yang diambil integralnya).

Berdasarkan konstruksi definisi integral tentu di atas, notasi $\int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan secara implisit bahwa $a < b$. Namun untuk selanjutnya asumsi itu kita hilangkan dengan definisi berikut:

DEFINISI BEBERAPA INTEGRAL TENTU

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

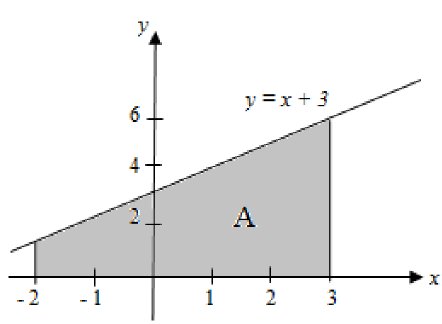
Contoh 6.1:

Hitung $\int_{-2}^{3} (x+3)\,dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang $[-2, 3]$ menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{5}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\bar{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + 1.\Delta x = -2 + 1.\tfrac{5}{n} \\
x_2 &= -2 + 2.\Delta x = -2 + 2.\tfrac{5}{n} \\
x_3 &= -2 + 3.\Delta x = -2 + 3.\tfrac{5}{n} \\
&\dots \\
x_i &= -2 + i.\Delta x = -2 + i.\tfrac{5}{n} \\
&\dots \\
x_n &= -2 + n.\Delta x = -2 + n.\tfrac{5}{n} = 3
\end{aligned}
$$



Jadi $f(x_i) = x_i + 3 = \left(-2 + i.\tfrac{5}{n}\right) + 3 = 1 + \tfrac{5}{n} i$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \tfrac{5}{n} i\right] \frac{5}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{5}{n} + \frac{25}{n^2} i\right]$$

$$= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^{n} [1] + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 5 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2n}$$

$$\int_{-2}^{3} (x+3)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[5 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2n}\right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2} + 0 = \frac{35}{2}$$

Contoh 6.2:

Hitung $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang [–1, 3] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{4}{n}$ Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\overline{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$x_0 \ = -1$

$x_1 \ = -1 + 1.\Delta x = -1 + 1.\frac{4}{n}$

$x_2 \ = -1 + 2.\Delta x = -1 + 2.\frac{4}{n}$

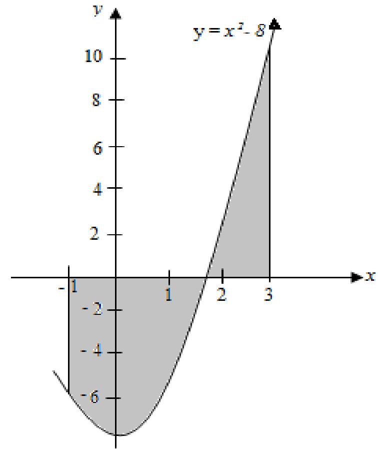
$x_3 \ = -1 + 3.\Delta x = -1 + 3.\frac{4}{n}$

...

$x_i \ = -1 + i.\Delta x = -4 + i.\frac{4}{n}$

...

$x_n \ = -1 + n.\Delta x = -1 + n.\frac{4}{n} = 3$



Jadi $f(x_i) = 2x_i^{\,2} - 8 = 2\left(-1 + i.\frac{4}{n}\right)^2 - 8 = -6 - \frac{16}{n}i + \frac{32}{n^2}i^2$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-6 - \frac{16}{n}i + \frac{32}{n^2}i^2\right]\frac{4}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{24}{n} - \frac{64}{n^2}i + \frac{128}{n^3}i^2\right]$$

$$= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n}[1] - \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{24}{n}(n) + \frac{64}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{128}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 124 - 32 - \frac{32}{n} + \frac{128}{3} + \frac{256}{2n} + \frac{128}{6n^2}$$

$$\int_{-1}^{3}(2x^2 - 8)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[124 - 32 - \frac{32}{n} + \frac{128}{3} + \frac{256}{2n} + \frac{128}{6n^2}\right]$$

$$= 124 - 32 - 0 + \frac{128}{3} + 0 + 0 \quad = -\frac{40}{3}$$

Contoh 6.3:

Gunakan integral tentu Riemann untuk menghitung mentukan nilai dari masing-masing integral $\int_{-2}^{3} (3 - x)\, dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang [–2, 3] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{5}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\overline{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + 1.\Delta x = -2 + 1.\tfrac{5}{n} \\
x_2 &= -2 + 2.\Delta x = -2 + 2.\tfrac{5}{n} \\
x_3 &= -2 + 3.\Delta x = -2 + 3.\tfrac{5}{n} \\
&\dots \\
x_i &= -2 + i.\Delta x = -2 + i.\tfrac{5}{n} \\
&\dots \\
x_n &= -2 + n.\Delta x = -2 + n.\tfrac{5}{n} = 3
\end{aligned}$$

Jadi $f(x_i) = 3 - x_i = 3 - \left(-2 + i.\tfrac{5}{n}\right) = 5 - \tfrac{5}{n} i$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[5 - \tfrac{5}{n} i\right] \frac{5}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{25}{n} + \frac{25}{n^2} i\right]$$

$$= \frac{25}{n}\sum_{i=1}^{n}[1] + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{25}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 25 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2n}$$

$$\int_{-2}^{3}(3-x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[25 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2n}\right]$$

$$= 25 + \frac{25}{2} + 0 \quad = \quad \frac{75}{2}$$

Contoh 6.4:

Gunakan integral tentu Riemann untuk menghitung mentukan nilai dari masing-masing integral $\int_{0}^{1}(x+3)\,dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang [0, 1] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{1}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\overline{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$x_0 = 0$

$x_1 = 0 + 1.\Delta x = 0 + 1.\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$x_2 = 0 + 2.\Delta x = 0 + 2.\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

$x_3 = 0 + 3.\Delta x = 0 + 3.\frac{1}{n} = \frac{3}{n}$

...

$x_i = 0 + i.\Delta x = 0 + i.\frac{1}{n} = \frac{i}{n}$

...

$x_n = 0 + n.\Delta x = 0 + n.\frac{1}{n} = 1$

Jadi $f(x_i) = x_i + 3 = \left(i.\frac{1}{n}\right) + 3 = 1 + \frac{i}{n} i$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \tfrac{1}{n} i\right] \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} i\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [1] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n}(n) + \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\int_0^1 (x+3)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 0 \quad = \quad \frac{3}{2}$$

Contoh 6.5:

Gunakan integral tentu Riemann untuk menghitung mentukan nilai dari masing-masing integral $\int_{-1}^{3} 2x^2\, dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang [–1, 3] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{4}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\overline{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$$x_0 = -1$$
$$x_1 = -1 + 1.\Delta x = -1 + 1.\tfrac{4}{n}$$
$$x_2 = -1 + 2.\Delta x = -1 + 2.\tfrac{4}{n}$$
$$x_3 = -1 + 3.\Delta x = -1 + 3.\tfrac{4}{n}$$
...
$$x_i = -1 + i.\Delta x = -4 + i.\tfrac{4}{n}$$
...
$$x_n = -1 + n.\Delta x = -1 + n.\tfrac{4}{n} = 3$$

Jadi $f(x_i) = 2x_i^{\,2} = 2\left(-1 + i.\tfrac{4}{n}\right)^2 = 2\left(1 - \tfrac{8}{n} i + \tfrac{16}{n^2} i^2\right) = 2 - \tfrac{16}{n} i + \tfrac{32}{n^2} i^2$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2 - \tfrac{16}{n} i + \tfrac{32}{n^2} i^2\right] \frac{4}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\tfrac{8}{n} - \tfrac{64}{n^2} i + \tfrac{128}{n^3} i^2\right]$$

$$= \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} [1] - \frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{8}{n}(n) + \frac{64}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{128}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 8 - 32 - \frac{32}{n} + \frac{128}{3} + \frac{256}{2n} + \frac{128}{6n^2}$$

$$\int_{-1}^{3}(2x^2-8)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1} f(\overline{x_i}).\Delta x_i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[8-32-\frac{32}{n}+\frac{128}{3}+\frac{256}{2n}+\frac{128}{6n^2}\right]$$

$$=8-32-0+\frac{128}{3}+0+0 \quad =-\frac{88}{3}$$

Contoh 6.6:

Gunakan integral tentu Riemann untuk menghitung mentukan nilai dari masing-masing integral $\int_{-1}^{3}(2-2x^2)\,dx$

Penyelesaian:

Partisikan selang [–1, 3] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{4}{n}$. Dalam tiap selang $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\overline{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel, maka:

$x_0 = -1$
$x_1 = -1+1.\Delta x = -1+1.\frac{4}{n}$
$x_2 = -1+2.\Delta x = -1+2.\frac{4}{n}$
$x_3 = -1+3.\Delta x = -1+3.\frac{4}{n}$
...
$x_i = -1+i.\Delta x = -4+i.\frac{4}{n}$
...
$x_n = -1+n.\Delta x = -1+n.\frac{4}{n} = 3$

Jadi $f(x_i) = 2-2x_i{}^2 = 2-2\left(-1+i.\frac{4}{n}\right)^2 = -\frac{16}{n}i+\frac{32}{n^2}i^2$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-\tfrac{16}{n} i + \tfrac{32}{n^2} i^2 \right] \frac{4}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[-\tfrac{64}{n^2} i + \tfrac{128}{n^3} i^2 \right]$$

$$= -\frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{64}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + \frac{128}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= -32 - \frac{32}{n} + \frac{128}{3} + \frac{256}{2n} + \frac{128}{6n^2}$$

$$\int_{-1}^{3} (2 - 2x^2)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1} f(\overline{x_i}) . \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[-32 - \frac{32}{n} + \frac{128}{3} + \frac{256}{2n} + \frac{128}{6n^2} \right]$$

$$= -32 - 0 + \frac{128}{3} + 0 + 0 \quad = \; -\frac{32}{3}$$

K. Tugas Kegiatan Belajar 6

Untuk memperluas wawasan Anda tentang integral riemaan, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang relevan lainnya.

Dalam soal nomor 1 – 10, gunakan Integral Tentu Riemann untuk menghitung integral tentu yang diberikan.

1. $\int_{0}^{1} 3\, dx$

2. $\int_{0}^{2} (2x - 5)\, dx$

3. $\int_{1}^{2} (2-x)\,dx$

4. $\int_{-1}^{2} (2x^2)\,dx$

5. $\int_{-1}^{1} (2x^2+1)\,dx$

6. $\int_{0}^{2} (1-2x^2)\,dx$

7. $\int_{-1}^{2} (3x^2-2x+3)\;dx$

8. $\int_{-1}^{1} (x^2+2x-1)\,dx$

9. $\int_{-1}^{1} (3-2x-x^2)\,dx$

10. $\int_{0}^{2} x^3\;dx$

L. Rangkuman Kegiatan Belajar 6

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 6 ini maka garis besar bahan yang dibahas tentang Definisi Integral Riemann yaitu Andaikan f terdefinisi pada [a, b] dan $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x_i$ ada, maka Integral Tentu Riemann dinotasikan dengan $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i).\Delta x_i$

M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 6

Dalam soal nomor 1 – 10, gunakan Integral Tentu Riemann untuk menghitung integral tentu yang diberikan.

1) $\int_{0}^{1} (1-x)\, dx$

2) $\int_{0}^{2} 2x-1\ dx$

3) $\int_{0}^{2} (\tfrac{1}{2}x-1)\, dx$

4) $\int_{1}^{2} (\tfrac{1}{3}-2x)\, dx$

5) $\int_{-1}^{2} (2x^2+2)\, dx$

6) $\int_{-1}^{1} (2-2x^2)\, dx$

7) $\int_{0}^{2} (1-2x^2)\, dx$

8) $\int_{-1}^{2} (x^2-2x+1)\ dx$

9) $\int_{-1}^{1} (2x^3+x)\, dx$

10) $\int_{-1}^{1} (1-x^3)\, dx$ **(skor untuk masing-masing soal adalah 10)**

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 6

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan Belajar 7. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 6, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

N. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 7)

Teorema Dasar Kalkulus

Kita telah mempelajari integral tak-tentu dan integral tentu. Menghitung integral tentu dengan menggunakan definisi memerlukan waktu yang relatif lama dan sering cukup rumit untuk banyak fungsi. Kesulitan yang dialami lebih banyak dalam menentukan jumlah suatu deret dalam n.

Isaac Newton dan ***Gottfried Leibniz*** secara bersamaan di tempat yang berbeda keduanya menemkan kaitan antara integral tentu. Dengan demikian pentingnya penemuan tersebut sehingga teorema itu disebut "***Teorema Dasar Kalkulus***". Dengan teorema dasar kalkulus kita dapat menghitung integral tentu, tidak dihitung melalui jumlah Riemannya, tetapi dihitung dengan menentukan terlebih dahulu integral tak-tentunya dan kita telah mempelajarinya pada bab sebelumnya.

Sebelumnya Anda telah jumpai beberpa teorema dasar dalam beberapa cabang matematika. *Teorema Dasar Aritmatika* mengatakan bahwa suatu bilangan bulat difaktorkan atas bilangan–bilangan prima secara tunggal. *Teorema Dasar Aljabar* mengatakan bahwa suatu polinom berderajat n tepat mempunyai n akar, termasuk yang berulang. Teorema apapun yang bernama Teorema Dasar harus dikaji secara seksama dan kemudian secara permanen disimpan dalam ingatan kita.

TEOREMA DASAR KALKULUS

Misalkan fungsi *f* kontinu pada [a, b] dan misalkan *f* sebarang anti turunan dari *f*, maka:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bukti:

Misalkan P: a = $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 ... < x_{n-1} < x_n$ =b adalah partisi sebarang dari [a, b]. maka

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + ... + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - F(x_{i-1}) \right] \end{aligned}$$

Dengan menerapkan teorema nilai rata-rata untuk turunan pada *F* disetiap subselang $[x_{i-1}, x_i]$, kita memperoleh $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\overline{x}_i).\Delta x_i$$

Sehingga diperoleh $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i).\Delta x_i$

Jika kedua ruas kita ambil limitnya , kita peroleh:

$$\lim_{n\to\infty} \left[F(b) - F(a) \right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\left[F(x) \right]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

Contoh 7.1:

Tunjukkan bahwa: $\int_a^b k \; dx = k(b-a)$

Penyelesaian:

$F(x) = kx$ adalah suatu anti turunan $f(x) = k$, sehingga menurut Teorema Dasar Kalkulus

$$\int_a^b k \; dx = F(b) - F(a) = kb - ka = k(b-a)$$

Contoh 7.2:

Tunjukkan bahwa: $\int_a^b x \; dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Penyelesaian:

$F(x) = \frac{x^2}{2}$ adalah suatu anti turunan $f(x) = x$, oleh karena itu

$$\int_a^b x \; dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Contoh 7.3:

Tunjukkan bahwa: $\int_a^b x^r \; dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$

Penyelesaian:

$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ adalah suatu anti turunan $f(x) = x^r$, sehingga menurut Teorema Dasar Kalkulus

$$\int_a^b x^r \; dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1} = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

TEOREMA KELINIERAN INTEGRAL TENTU

Andaikan bahwa f dan g terintegralkan pada [a, b] dan bahwa k konstanta. Maka kf dan $f+g$ adalah terintegralkan dan:

i. $\int_a^b k\, f(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$

ii. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$; dan akibatnya

iii. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$

Bukti

Pembuktian dari teorema di atas tergantung pada kelinieran $\sum$ dan sifat-sifat limit. Kita akan langsung membuktikan sifat (ii) berikut:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)+g(x)]dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\overline{x_i})+g(\overline{x_i})\right].\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\overline{x_i})\,\Delta x_i + g(\overline{x_i})\,\Delta x_i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\overline{x_i})\,\Delta x_i\right] + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[g(\overline{x_i})\,\Delta x_i\right] \\
&= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx
\end{aligned}$$

Bukti (i) dan (iii) diserahkan kepada pembaca untuk mencobanya.

Contoh 7.4:

Tentukan nilai dari: $\int_0^5 2x\ dx$

Penyelesaian

$$\int_0^5 2x\ dx = 2\int_0^5 x\ dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left[x^2\right]_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25$$

Contoh 7.5:

Tentukan nilai dari: $\int_2^5 x^2\ dx$

Penyelesaian $\int_2^5 x^2\ dx = \frac{5^{2+1} - 2^{2+1}}{2+1} = \frac{5^3 - 2^3}{3} = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3} = 39$

Contoh 7.6:

Tentukan nilai dari: $\int_{-1}^2 \left(4x - 6x^2\right) dx$

Penyelesaian

$$`\int_{-1}^2 \left(4x - 6x^2\right)dx = \int_{-1}^2 4x\ dx - \int_{-1}^2 6x^2\ dx$$
$$= 4\left(\frac{2^2 - (-1)^2}{2}\right) - 6\left(\frac{2^3 - (-1)^3}{3}\right)$$
$$= 4\left(\frac{3}{2}\right) - 6\left(\frac{9}{3}\right) = 6 - 18 = -12$$

Contoh 7.7:

Tentukan nilai dari: $\int_0^\pi 3\sin x\ dx$

Penyelesaian

$$\int_0^\pi 3\sin x\ dx = 3\int_0^\pi \sin x\ dx = -3\left[\cos x\right]_0^\pi = -3[-1-(1)] = 3+3 = 6$$

Contoh 7.8:

Tentukan nilai dari $\int_0^1 [x^2 + (x^2+1)^4]dx$

Penyelesaian

$$\int_0^1 [x^2 + (x^2+1)^4]dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (x^2+1)^4 dx$$

Integral yang pertama mudah dikerjakan secara langsung. Untuk menangani integral yang kedua, kita andaikan t = x^2 + 1, sehingga dt = 2x dx

$$\int (x^2+1)^4 dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^4 2x.dx =$$

$$\frac{1}{2}\int t^4 dt = \frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + C = \frac{(x^2+1)^5}{10} + C$$

Oleh karena itu,

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (x^2+1)^4 dx == \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 +$$

$$\left[\frac{(x^2+1)^5}{5}\right]_0^1 = \left(\frac{1-0}{3}\right) + \left(\frac{32-1}{10}\right) = \frac{103}{10}$$

Contoh 7.9:

Tentukan nilai dari $\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)dx$

Penyelesaian

Untuk menangani integral ini, kita andaikan u = x^2 + x, sehingga du = (2x+1) dx

Sehingga $\int \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)dx =$

$$\int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Oleh karena itu

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}\,(2x+1)dx = \left[\tfrac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} + C\right]_0^4 =$$

$$\left[\tfrac{2}{3}(20)^{\frac{3}{2}} + C\right] - \left[\tfrac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + C\right] = \frac{2\sqrt{20^3}}{3} \approx 59{,}63$$

Contoh 7.10:

Tentukan nilai dari $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x \,.\, \cos\, 2x\, dx$

Penyelesaian

Untuk menangani integral ini, kita andaikan v = sin 2x, sehingga dv = 2 cos 2*x* *dx*

Sehingga

$$\int \sin^3 2x \,.\, \cos\, 2x\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\sin^3 2x\right).\left(2.\cos\, 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int v^3\, dv = \frac{1}{2}\frac{v^4}{4} + C = \frac{\sin^4 2x}{8} + C$$

Oleh karena itu menurut Teorema Dasar Kalkulus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x \,.\, \cos\, 2x\, dx =$$

$$\left[\frac{\sin^4 2x}{8} + C\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\sin^4 2(\frac{\pi}{4})}{8} + C\right] - \left[\frac{\sin^4 2(0)}{8} + C\right] = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

Contoh 7.11:

Tentukan nilai dari: $\int_0^1 (2x-1)\ dx$

Penyelesaian:

$$\int_0^1 (2x-1)\ dx = 2\int_0^1 x\ dx - \int_0^1\ dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_0^1$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 - [x]_0^1 = \left[1^2 - 0^2\right]\!\left[1-0\right] = 2$$

Contoh 7.12:

Tentukan nilai dari: $\int_2^5 x^2\ dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-1}^1 x^3\ dx = \frac{1^{1-(-1)} - (-1)^{1-(-1)}}{1-(1)} = \frac{1^2 - (-1^2)}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0\ .$$

Contoh 7.13:

Tentukan nilai dari: $\int_0^2 \left(x - 3x^3\right) dx$

Penyelesian:

$$\int_0^2 \left(x - x^3\ \right) dx = \int_0^2 x\ dx - \int_0^2 x^3\ dx = \left(\frac{2^2 - (0)^2}{2}\right) - \left(\frac{2^4 - (0)^4}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{16}{3}\right) = 2 - 4 = -2$$

Contoh 7.14:

Tentukan nilai dari: $\int_0^\pi 2\sin x \cos x\ dx$

Penyelesaian

$$\int_0^{\pi} 2\sin x\cos x\, dx = \int_0^{\pi} \sin 2x \;\; dx = -\frac{1}{2}\left[\cos 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 2\pi - \cos 0] = -\frac{1}{2}[1-1] = -\frac{1}{2}[0] = 0$$

Contoh 7.15:

Hitung Integral berikut: $\int_0^1 [\cos(2x-1) + (2x+1)^3\;]dx$

$$\int_0^1 [\cos(2x-1) + (2x+1)^3\;]dx = \int_0^1 \cos(2x-1)\, dx + \int_0^1 (2x+1)^3\; dx$$

Integral fungsi pertama:

Andaikan u = $2x - 1$, sehingga du = 2 dx maka ½ du = dx

$$\int \cos(2x-1)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos u\, dt = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{\sin\,(2x-1)}{2} + C$$

Oleh karena itu,

$$\int_0^1 \cos(2x-1)\, dx = \left[\frac{\sin\,(2x-1)}{2} + C\right]_0^1$$

$$= \frac{\sin\,(2+1)}{2} - \frac{\sin\;\,(0-1)}{2} = \frac{\sin 3 + \sin 1}{2}$$

Untuk menangani fungsi integral yang kedua,

Andaikan v = $2x + 1$, sehingga dv = 2 dx maka ½ dv = dx

$$\int (2x+1)^3\; dx = \frac{1}{2}\int v^3\; dv = \frac{1}{2}\frac{v^4}{4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$$

Oleh karena itu,

$$\int_0^1 \;(2x+1)^3\; dx = \left[\frac{(2x+1)^4}{8} + C\right]_0^1 = \frac{(2+1)^4}{8} - \frac{(0+1)^4}{8} = \frac{15}{8}$$

Sehingga:

$$\int_0^1 [\cos(2x-1)+(2x+1)^3\,]dx = \frac{\sin 3+\sin 1}{2}+\frac{15}{8}=\frac{4\sin 3+4\sin 1+15}{8}$$

Contoh 7.16:

Cari Integral berikut: $\int 2\sin^2 2x.\cos 2x\,dx$

Penyelesaian

Untuk menangani integral ini, kita jabarkan
Sehingga

$$\int 2\sin^2 2x.\cos 2x\,dx = \int 2(\sin 2x).\cos 2x.(\sin 2x)\,dx$$

$$= \int [2\sin 2x.\cos 2x].(\sin 2x)\,dx = \int \sin 4x.\sin 2x\,dx$$

$$= \int \sin 4x.\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int [\cos(4x+2x)-\cos(4x-2x)]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 6x\ dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx = -\frac{1}{12}\sin 6x + -\frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Contoh 7.17:

Hitung Integral berikut: $\int_0^4 \sqrt{t-t^2}\,(1-2t)dt$

Penyelesaian

Untuk menangani integral ini, kita andaikan u = t - t^2 , sehingga du = (1 - 2t) dt

Sehingga $\int \sqrt{t-t^2}\,(1-2t)dx =$

$$\int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Oleh karena itu

$$\int_0^4 \sqrt{t-t^2}\,(1-2t)dt = \left[\tfrac{2}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}} + C\right]_0^4$$

$$= \left[\tfrac{2}{3}(20)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\tfrac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + C\right] = \frac{2}{3}\sqrt{20^3}$$

O. Tugas Kegiatan Belajar 7

Dalam soal nomor 1 – 5, gunakan teorema dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu yang diberikan.

1. $\int_0^2 x^3\ dx$

2. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 3)\ dx$

3. $\int_{-4}^{-2} \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ x\ dx$

5. $\int_0^1 \left(2x^4 - 3x^2 + 5\right) dx$

Tentukan solusi pada soal nomor 6 – 7 berikut:

6. $\int \cos^2 t \cdot \sin t\ \ dt$

7. $\int 4 \sin 3x \cdot \cos 3x \; dx$

Dalam soal nomor 8 – 10, gunakan teorema dasar kalkulus dikombinasikan dengan aturan pangkat yang dirapatkan untuk menghitung integral tentu yang diberikan.

8. $\int_0^1 \left(x^2+1\right)^{10}(2x)\,dx$

9. $\int_5^8 \sqrt{3x+1}\;dx$

10. $\int_0^4 \left[\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}\right]dx$

P. Rangkuman Kegiatan Belajar 7

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 7 ini maka garis besar bahan yang dibahas tentang

1. Teorema dasar kalkulus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, dengan fungsi *f* kontinu pada [a, b] dan misalkan *f* sebarang anti turunan dari *f*, maka:

2. Teorema kelinieran integral tentu

- $\int_a^b k\,f(x)\;dx = k\int_a^b f(x)\;dx$
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\;dx + \int_a^b g(x)\;dx$; dan akibatnya
- $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\;dx - \int_a^b g(x)\;dx$

dimana f dan *g* terintegralkan pada [a, b] dan bahwa *k* konstanta. Maka *kf* dan *f* + *g* adalah terintegralkan.

Q. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 7

Dalam soal nomor 1 – 10, gunakan teorema dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu yang diberikan.

1. $\int_{0}^{1} \pi x \, dx$

2. $\int_{0}^{2} (2x - \pi) \, dx$

3. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 1) \, dx$

4. $\int_{0}^{2} (1 - x - 2x^2) \, dx$

5. $\int_{-1}^{1} (3 - 2x^2 - x^3) \, dx$

6. $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^3 + x^2 + x) \, dx$

7. $\int_{-1}^{1} (1 - 2x^3 - x^4) \, dx$

8. $\int_{-1}^{1} (x^5 + 2x^2 - x) \, dx$

9. $\int_{0}^{2} (2 - x^2 - x^4) \, dx$

10. $\int_{-1}^{1} (1 - x^3 - x^5) \, dx$

(Skor untuk masing-masing soal adalah 10)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 7

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan Belajar 8. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 7, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

R. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara.*

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

S. Bacaan Yang Di Anjurkan

Edward And Venney (1994). *Calculus With Analitic Geometry by Prentice-Hil Inc*

BAB IV

TEKNIK PENINTEGRALAN

A. Pendahuluan

Bahan ajar ini terdiri tiga kegiatan belajar. Kegiatan belajar 8 tentang Pengintegralan dengan Subtitusi, kegiatan belajar 9 tentang Pengintegralan Parsial, kegiatan belajar 10 tentang subtitusi yang merasionalkan. Untuk memahami materi dalam materi ini, Anda harus sudah menguasai tentang barisan. Setiap kegiatan belajar memuat uraian, contoh, tugas dan latihan, rangkuman dan tes formatif.

Pada materi teknik integral kita akan menggunakan beberapa fungsi-fungsi elementer yaitu suatu himpunan fungsi yang banyak kita kenal seperti fungsi konstanta, fungsi pangkat, fungsi trigonometri, fungsi logaritma dan fungsi eksponen. Selain itu, kita telah memahami apa arti $\int f(x)\,dx$. Notasi $\int f(x)\,dx$ berati anti-turunan dari f atau integral tak kentu dari f. Menentukan fungsi yang sama dengan $\int f(x)\,dx$ berarti mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$. Mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$ dengan coba-coba sering tidak efesien. Namun demikian kita telah memiliki beberapa formula "*integral dasar*" dengan menggunakan teknik pengintegralan.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.

2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat penguasaan Anda pada tes formatif. Ulangi pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep pengintegralan subtitusi, konsep pengintegralan parsial, dan konsep subtitusi yang merasionalkan.
- **Kompetensi khusus** mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu menjelas kan konsep pengintegralan subtitusi, konsep pengintegralan parsial, dan konsep subtitusi yang merasionalkan.
- **Materi Pokok:** Pengintegralan dengan Subtitusi, Pengintegralan Parsial, dan subtitusi yang merasionalkan.

B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 8)

Teknik Subtitusi

Dalam menyelesaikan integral tentu pada bahasan sebelumnya dengan metode penggantian dimana terlebih dahulu menentukan integral tak-tentunya, kemudian langkah kedua menyelesaiakan dengan Teorema Dasar Kalkulus.

Untuk memudahkan pembaca diberikan alternatif berbeda dalam menyelesaikan integral tentu, yaitu dengan metode subtitusi.

TEOREMA ATURAN SUBTITUSI DALAM INTEGRAL TENTU

Andaikan g mempunyai turunan kontinu pada [a, b] dan andaikan f kontinu pada derah nilai dari g, maka

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

Bukti

Andaikan F adalah suatu anti turuna dari f, maka menurut Teorema Dasar Kalkulus,

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Menentukan nilai dari integral tak-tentu dan integral tentu

Contoh 8.1:

Hitung integral dari $\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita andaikan t = x^4+11, sehingga dt = $4x^3\,dx$ maka $\frac{1}{4}dt = x^3\,dx$

Perhatikan batas bawah $x = 0$ maka t = 11 dan batas atas $x = 1$ maka t = 12,

Jadi,

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int_{11}^{12}\sqrt{t}\;dt$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\int_{11}^{12} t^{\frac{1}{2}}\;dt$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{12^{\frac{3}{2}}-11^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+11}\,dx = \frac{12\sqrt{12}-11\sqrt{11}}{6} = 2\sqrt{12}-\frac{11}{6}\sqrt{11}$$

Contoh 8.2:

Hitung integral dari:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx$$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita andaikan t = x^2+2x+6, sehingga dt = $(2x + 2)\, dx$

Perhatikan batas bawah $x = 0$ maka t = 6 dan batas atas $x = 1$ maka t = 9,

Jadi,

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+2)}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_6^9 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int_6^9 t^{-2}\,dt$$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{9^{-1}-6^{-1}}{-1}\right)\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+6\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\right)\right] = -\frac{1}{18}+\frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

Contoh 8.3:

Hitung integral dari:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \sin^3\left(x^2\right)\cos(x^2)\,dx$$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita andaikan v = sin (x^2), sehingga dv = $2x\ cos\ (x^2)\ dx$

Perhatikan batas bawah $x = 0$ maka v = 0 dan batas atas $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

maka v = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

Jadi,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\,\mathbf{sin}^3\left(x^2\right)\mathbf{cos}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} 2x\cdot\mathbf{sin}^3\left(x^2\right)\cdot\mathbf{cos}(x^2)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\,\mathbf{sin}^3\left(x^2\right)\mathbf{cos}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} v^3\,dv = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 0^4}{4}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\,\mathbf{sin}^3\left(x^2\right)\mathbf{cos}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}\right] = \frac{1}{32}$$

Contoh 8.4:

Hitung integral dari $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita andaikan u = $\sqrt{x}$, sehingga du = $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$

Perhatikan batas bawah $x=\frac{\pi^2}{9}$ maka $u=\frac{\pi}{3}$ dan batas atas $x=\frac{\pi^2}{4}$ maka $u=\frac{\pi}{2}$,

Jadi, $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 2[\sin u]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2-\sqrt{3}$$

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2-\sqrt{3}$$

Metode Subtitusi Trigonometri

Mari kita ingat kembali beberapaintegral trigonometri dasar yang akan banyak kita gunakan pada subtitusi trigonometri selanjutnya:

$$\int \sin x\ dx = -\cos\ x + c$$

$$\int \cos x\ dx = \sin\ x + c$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c.$

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

$\int cosec^2 x\,dx = -\text{cotan}\ x + c$

$\int \tan.\sec x\,dx = \sec x + c$

$\int \text{cotan}\ x \,.\, \text{cosec}\ x\,dx = -cosec\ x + c$

Apabila kita menggabungkan metode subtitusi dan penggunaan secara cerdik kesamaan trigonometri, maka kita dapat mengintegralkan beragam bentuk trigonometri. Kita tinjau beberapa jenis yang umum dijumpai.

A. Jenis $\int \sin^n x\,dx$ atau $\int \cos^n x\,dx$ $\int \tan^n x\,dx$ dengan syarat $\mathbf{n} \in Z^+$ dan **n ganjil** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ atau $1 + \tan^2 x = sex^2 x$.

Contoh 8.5:

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^3 x\,dx$

Penyelesaian:

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (\sin^2 x)\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\,d(-\cos x)$$

$$= \int 1\,d(-\cos x) + \int (-\cos^2 x)\,d(-\cos x)$$

$$= -\int d(\cos x) + \int (\cos^2 x)\,d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Contoh 8.6:

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^5 x \; dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^5 x \; dx = \int (\sin^4 x)\sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + +\cos^4 x)\, d(-\cos x)$$

$$= \int 1 \, d(-\cos x) - \int (2\cos^2 x)\, d(-\cos x) + \int (\cos^4 x)\, d(-\cos x)$$

$$= \int d\,(-\cos x) + \int (2\cos^2 x)\, d(\cos x) - \int (\cos^4 x)\, d(\cos x)$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Contoh 8.7:

Selesaikan integral berikut : $\int \tan^5 x \; dx$

Penyelessaian:

$$\int \tan^5 x \; dx = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1) \; dx = \int \tan^3 x \;\; \sec^2 x - \tan^3 x) \; dx$$

$$= \int \tan^3 x \;\; \sec^2 x \; dx - \int \tan^3 x \; dx$$

$$= \int \tan^3 x \;\; d(\tan x) - \int \tan x (\tan^2 x) \; dx$$

$$= \int \tan^3 x \;\; d(\tan x) - \int \tan x (\sec^2 x - 1) \; dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x \, d(\tan x) + \int \tan x \; dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln\left|\cos x\right| + c$$

B. Jenis $\int \sin^n x \; dx$ atau $\int \cos^n x \; dx$ dengan syarat **n** $\in Z^+$ dan **n genap** maka gunakanlah subtitusi kesamaan setengah sudut yaitu: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ atau $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

Contoh 8.8:

Selesaikan integral berikut : $\int \cos^2 x \; dx$

Penyelesaian

$$\int \mathbf{cos}^2 x \; dx = \int \left(\frac{1+\mathbf{cos}\,2x}{2}\right) dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\mathbf{cos}\,2x)\,2\,dx$$

$$\int \mathbf{cos}^2 x \; dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int (\mathbf{cos}\,2x)\; d(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\mathbf{sin}\,2x + C$$

Contoh 8.9:

Selesaikan integral berikut : $\int \cos^4 x \, dx$

Penyelesaian

$$\int \cos^4 x \; dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+2\cos 2x + \cos^2 2x)}{2}\; 2\,dx$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)d(2x)$$

$$= \frac{1}{8}\int d(2x)+\frac{1}{8}\int \left(2\cos 2x\right)d(2x)+\frac{1}{8}\int \left(\cos^2 2x\right)d(2x)$$

$$= \frac{2}{8}x+\frac{2}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\int \left(1-\sin 2(2x)\right)d(2x)$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int \frac{1}{4}\left(1-\sin 4x\right)d(4x)$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\int d(4x)-\frac{1}{32}\int \left(\sin 4x\right)d(4x)$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\cos 4x+C=$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\cos 4x+C$$

C. Jenis $\int \sin^n x\cos^n x\,dx$ dengan syarat **m, n** $\in Z^+$ dan **m** atau **n ganjil** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Contoh 8.10.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^3 x\cos^{-4} x\,dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^3 x\cos^{-4} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)(\cos^{-4})(\sin x)\,dx$$

$$= -\int (\cos^{-4} x-\cos^{-2} x)\,d(\cos x)$$

$$= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3}-\frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right]+c$$

$$= \frac{\sec^3 x}{3}-\sec x+c$$

D. Jenis $\int \sin^n x \cos^n x\, dx$ dengan syarat **m, n** $\in Z^+$ dan **m** dan **n genap** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Contoh 8. 11.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \sin^2 2x \cdot \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, d(4x) + \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\, d(\sin 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C$$

E. Jenis $\int \sin nx \cos mx\, dx$; $\int \cos nx \sin mx\, dx$; $\int \cos nx \cos mx\, dx$; $\int \sin nx \sin mx\, dx$, maka gunakanlah subtitusi berikut:

$$\sin nx \cos mx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(n+m)x + \sin(n-m)\right]$$

$$\cos nx \sin mx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(n+m)x - \sin(n-m)\right]$$

$$\cos nx \cos mx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)\right]$$

$$\sin nx \ \sin mx = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(n+m)x - \cos(n-m)\right]$$

Contoh 8. 12.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin\ 2x\ \ \cos\ 3x\ dx$

Penyelesaian

$$\int \sin\ 2x\ \ \cos\ 3x\ dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin\ 5x + \sin(-x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \sin\ 5x\ d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\cos\ 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

Contoh 8.13:

Selesaikan integral berikut : $\int \sin\ 3x\ \ \sin\ 2x\ dx$

Penyelesaian

$$\int \sin\ 3x\ \ \sin\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int (\cos\ 4x - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + C\right]$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Contoh 8.14.

Selesaikan integral berikut : $\int 3\ \cos\ x\ \ \sin\ \tfrac{1}{2}x\ dx$

Penyelesaian

$$\int 3\ \cos\ x\ \ \sin\ \tfrac{1}{2} x\ dx = \frac{3}{2}\int (\sin\ \tfrac{3}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x + 2\cos\frac{1}{2}x\right] + C$$

$$= \left(-\cos\frac{3}{2}x\right) + \left(3\cos\frac{1}{2}x\right) + C$$

$$= 3\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x + C$$

Contoh 8.15.

Hitunglah $\int_0^1 x\ \ (x^2+1)^{10}\ dx$

Penyelesaian:

Andaikan $t = x^2 + 1$,
sehingga dt = 2x dx maka $\tfrac{1}{2}dt = x\,dx$
Batas bawah x = 0 maka t = 1
Batas atas x = 1 maka t = 2,
Jadi,

$$\int_0^1 x\ \ (x^2+1)^{10}\ dx \quad = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{10}\ \ dt$$

$$\int_0^1 x\ \ (x^2+1)^{10}\ dx \quad = \frac{1}{2}\left[\frac{2^{11} - 1^{11}}{11}\right]$$

$$\int_0^1 x\ \ (x^2+1)^{10}\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2.048 - 1}{11}\right]$$

$$\int_0^1 x\ (x^2+1)^{10}\,dx = \frac{2.047}{22}$$

Contoh 8.16.

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Hitunglah

Penyelesaian:

Andaikan $t = x^3 + 1$,
sehingga dt = $3x^2\ dx$ maka $\frac{2}{3}dt = 2x\,dx$
Batas bawah $x = -1$ maka t = 0
Batas atas $x = 1$ maka t = 2,
Jadi,

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx \quad = \frac{3}{2}\int_0^2 t^{\frac{1}{2}}\ dt\ = \frac{3}{2}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = 2\sqrt{2}$$

Contoh 8.17.

Hitunglah $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

Penyelesaian:

Andaikan $t = x + 2$,
sehingga $dt = dx$
Batas bawah $x = 1$ maka t = 1
Batas atas $x = 3$ maka t = 5,
Jadi,

$$\int_1^3 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \quad = \int_1^5 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^5 t^{-2}\,dt \quad = \left[\frac{5^{-1}-1^{-1}}{-1}\right]$$

$$\int_{-1}^{1} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \left[\frac{\frac{1}{5}-\frac{5}{5}}{-1}\right] = -\left[-\tfrac{4}{5}\right] = \frac{4}{5}$$

Contoh 8.18.

Hitunglah $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\,dx$

Penyelesaian:

Andaikan $t = 2x+2$,

sehingga $\frac{1}{2}\,dt = dx$

Batas bawah x = –1 maka t = 0

Batas atas x = 7 maka t = 16,

Jadi,

$$\int_{-1}^{7} \frac{1}{\sqrt{2x+2}}\,dx \quad = \frac{1}{2}\int_0^{16} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{16} t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{16}-\sqrt{0}}{\frac{1}{2}}\right] = 4$$

Contoh 8.19.

$$\int_0^1 x\cos^3(x^2)\sin(x^2)\,dx$$

Hitunglah

Penyelesaian:

Andaikan $t = \cos(x^2)$,

sehingga $\frac{1}{2}\,dt = x\sin(x^2)dx$

Batas bawah x = 1 maka t = cos 0 =1

Batas atas $x = 1$ maka t = cos 1,

Jadi,

$$\int_0^1 x\cos^3(x^2)\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\cos 1} t^3\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\cos 1)^4 - 1^4}{4}\right]$$

$$\int_0^1 x\cos^3(x^2)\sin(x^2)\,dx = \frac{\cos^4 1 - 1}{8}$$

Contoh 8.20.

Selesaikan integral berikut : $\int \cos^2 2x\,dx$

Penyelesaian

$$\int \cos^2 2x\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\cos 4x)2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int(\cos 4x)\ d(4x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

Contoh 8.21.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^3 3x\ dx$

Penyelesaian:

$$\int \sin^3 3x\ dx = \int(\sin^2 3x)\sin 3x\,dx = \int(1-\cos^2 3x)\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int(1-\cos^2 3x)\,d(-\cos 3x)$$

$$=\frac{1}{3}\int 1\ d(-\cos 3x)+\frac{1}{3}\int(-\cos^2 3x)\,d(-\cos 3x)$$

$$=-\frac{1}{3}\int\ d\,(\cos 3\,x)+\frac{1}{3}\int(\cos^2 3x)\,d(\cos 3\,x)$$

$$=-\frac{1}{3}\cos\ 3\,x+\frac{1}{9}\cos^3 3x+C$$

Contoh 8.22. Selesaikan integral berikut : $\int\left(4-x^3-\cos^4 x\right)dx$

Penyelesaian

$$\int\left(4-x^3-\cos^4 x\right)dx=\int 4dx-\int x^3dx-\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\int 4dx-\int x^3dx-\int\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\int\frac{(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)}{2}\ 2\,dx$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)d(2x)$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\left[\frac{1}{8}\int d(2x)+\frac{1}{8}\int\left(2\cos 2x\right)d(2x)+\frac{1}{8}\int\left(\cos^2 2x\right)d(2x)\right]$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{8}x-\frac{2}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\int\left(1-\sin 2(2x)\right)d(2x)$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ \sin 2x-\frac{1}{8}\int\frac{1}{4}\left(1-\sin 4x)\right)d(4x)$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ \sin 2x-\frac{1}{32}\int d(4x)+\frac{1}{32}\int\left(\sin 4x)\right)d(4x)=$$

$$=4x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\ \sin 2x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\cos\ 4x+C$$

$$=\frac{5}{8}x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}\ \sin 2x-\frac{1}{32}\cos\ 4x+C$$

Contoh 8.23.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin^5 5x\ dx$

Penyelesaian

$$\int \sin^5 5x\ dx = \int (\sin^4 5x)\sin 5x\, dx = \int (1-\cos^2 5x)^2 \sin\ 5x\, dx$$

$$= \frac{1}{5}\int (1-2\cos^2 5x + \cos^4 5x)\, d(-\cos 5x)$$

$$= \frac{1}{5}\int d(-\cos 5x) - \frac{1}{5}\int (2\cos^2 5x)\, d(-\cos 5x) + \frac{1}{5}\int (\cos^4 5x)\, d(-\cos 5x)$$

$$= \frac{1}{5}\int d(-\cos 5x) + \frac{1}{5}\int (2\cos^2 5x)\, d(\cos 5x) - \frac{1}{5}\int (\cos^4 5x)\, d(\cos 5x)$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{15}\cos^3 5x - \frac{1}{25}\cos^5 5x + C$$

Contoh 8.24.

Selesaikan integral berikut : $\int \left(\sin^2 2x\ +\ \cos^2 2x +\ \tan^5 2x\right) dx$

Penyelessaian:

$$\int \left(\sin^2 2x\ +\ \cos^2 2x + \tan^5 2x\right) dx$$

$$= \int \left(\sin^2 2x\ +\ \cos^2 2x\right) dx + \int \tan^5 2x\ dx$$

$$= \int 1\ dx + \int \tan^3 2x(\sec^2 2x - 1)\ dx$$

$$= x + \int \tan^3 2x\ \ \sec^2 2x - \tan^3 2x)\ dx$$

$$= x + \int \tan^3 2x\ \ \sec^2 2x\ dx - \int \tan^3 2x\ dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\int \tan^3 2x \;\; d(\tan 2x) - \int \tan 2x (\tan^2 2x) \; dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\int \tan^3 2x \;\; d(\tan 2x) - \int \tan 2x (\sec^2 2x - 1) \; dx$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\tan^4 x - \tfrac{1}{2}\int \tan 2x \, d(\tan 2x) + \int \tan 2x \; dx$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\tan^4 x - \tfrac{1}{4}\tan^2 2x - \ln\left|\cos\, 2x\right| + c$$

Contoh 8.25.

Selesaikan integral berikut : $\int \left(1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x\right) dx$

Penyelesaian

$$\int \left(1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x\right) dx = \int 1\, dx - 2\int \sin^2 \frac{1}{2}x\, dx$$

$$= \int 1\, dx - 2\int \left(\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= x + \frac{2}{2}\int \left(\cos\frac{x+x}{2} - \cos\frac{x-x}{2}\right) dx$$

$$= x + \int \cos x \; dx - \int \cos\, 0\, dx$$

$$= x + \sin\, x + \int 1\, dx + c$$

$$= x + \sin\, x + x + c$$

$$= 2x + \sin\, x + c$$

Contoh 8.26.

Selesaikan integral berikut : $\int 2\cos^4 x \cdot \sin^2 x \;\; dx$

Penyelesaian

$$\int 2\cos^4 x \cdot \sin^2 x \; dx = 2\int \left(\frac{1-\cos\ 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos\ 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+\cos\ 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+\cos\ 2x - \frac{1}{2}(1+\cos\ 4x) - (1-\sin^2 2x)\ \cos\ 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \sin^2 2x \cdot \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{8}\int \cos\ 4x\, d(4x) + \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\, d(\sin\ 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin^3 2x + C$$

Contoh 8.27.

Selesaikan integral berikut : $\int \sin\ 2x\ \ \cos 3x\ dx$

Penyelesaian

$$\int \sin\ 2x\ \ \cos\ 3x\ \ dx = \frac{1}{2}\int [\sin\ 5x + \sin(-x)]dx$$

$$= \frac{1}{10}\int \sin\ 5x\ \ d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{10}\cos\ 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

Contoh 8.28:

Selesaikan integral berikut : $\int \cos\ x\ \cos\ \tfrac{1}{2}x\ dx$

Penyelesaian

$$\int \mathbf{cos}\ x\ \ \mathbf{cos}\ \tfrac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\int (\mathbf{cos}\ \tfrac{3}{2}x - \mathbf{cos}\,\tfrac{1}{2}x)\,dx$$

$$\int \mathbf{cos}\ x\ \ \mathbf{cos}\ \tfrac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\mathbf{sin}\frac{3x}{2} + c_1 - 2\,\mathbf{sin}\frac{x}{2} + c_2\right]$$

$$\int \mathbf{cos}\ x\ \ \mathbf{cos}\ \tfrac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\mathbf{sin}\frac{3x}{2} + \frac{c_1}{3} + \mathbf{sin}\frac{x}{2} + \frac{c_2}{2}$$

$$\int \mathbf{cos}\ x\ \ \mathbf{cos}\ \tfrac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\mathbf{sin}\frac{3x}{2} + \mathbf{sin}\frac{x}{2} + C$$

Contoh 8.29:

Selesaikan integral berikut : $\int 4\ \cos\ 2x\ \ \cos\ 3x\ dx$

Penyelesaian

$$\int 4\cos\ 2x\ \ \cos\ 3x\ dx = \frac{4}{2}\int [\cos\ 5x + \cos(-x)]dx$$

$$= \frac{4}{2}\int \cos\ 5x\,dx + \frac{4}{2}\int \cos(-x)\,dx$$

$$= 2\int \cos\ 5x\ dx + 2\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\sin 5x - 2\sin\ x + C$$

C. Tugas Kegiatan Belajar 8.

Untuk memperluas wawasan Anda tentang integral subtitusi, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Untuk No. 1 – 10, gunakan metode subtitusi dalam integral tentu untuk menghitung masing-masing yang berikut:

1. $\int_0^1 (3x+1)^3\, dx$

2. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+9)^2}\, dx$

3. $\int_0^1 \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^2}\, dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 t \;\cos t \; dt$

5. $\int_0^1 \cos(3x-3)\, dx$

6. $\int_0^1 x \sin(\pi x^2)\, dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin 2x)\; dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(\cos x)\, dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\; \cos^3(t^2) \sin(t^2)\, dt$

10. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\, dx$

Untuk No 11 – 20, gunakan metode subtitusi trigonometri dalam integral yang ditunjuk untuk menyelesaikan masing-masing integral yang berikut:

11. $\int \sin^2 x \, dx$
12. $\int \sin^3 x \, dx$
13. $\int \sin^5 4x \, \cos^2 4x \, dx$
14. $\int \sin^3 3x \, \cos^4 3x \, dx$
15. $\int \sin 4x \cos 5x \, dx$
16. $\int \cos 5x \sin 4x \, dx$
17. $\int \cos 2x \cos x \, dx$
18. $\int \sin 4x \sin 5x \, dx$
19. $\int \tan^3 2x \, dx$
20. $\int (\tan x + \cot x)^2 \, dx$

D. Rangkuman Kegiatan Belajar 8

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 8 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

A. Teorema Aturan Subtitusi Dalam Integral Tentu

Andaikan *g* mempunyai turunan kontinu pada [a, b]

Andaikan *f* kontinu pada derah nilai dari *g*, maka

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

B. Jenis $\int \sin^n x \, dx$ atau $\int \cos^n x \, dx$ $\int \tan^n x \, dx$ dengan syarat **n** $\in Z^+$ dan **n ganjil** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ atau $1 + \tan^2 x = sex^2 x$.

C. Jenis $\int \sin^n x\, dx$ atau $\int \cos^n x\, dx$ dengan syarat **n** $\in Z^+$ dan **n genap** maka gunakanlah subtitusi kesamaan setengah sudut yaitu: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ atau $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

D. Jenis $\int \sin^n x \cos^n x\, dx$ dengan syarat **m, n** $\in Z^+$ dan **m** atau **n ganjil** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

E. Jenis $\int \sin^n x \cos^n x\, dx$ dengan syarat **m, n** $\in Z^+$ dan **m** dan **n genap** maka gunakanlah subtitusi kesamaan phytagoras yaitu: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

F. Jenis $\int \sin nx \cos mx\, dx$; $\int \cos nx \sin mx\, dx$; $\int \cos nx \cos mx\, dx$; $\int \sin nx \sin mx\, dx$, maka gunakanlah subtitusi berikut:

$$\sin nx \cos mx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(n+m)x + \sin(n-m)\right]$$

$$\cos nx \sin mx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(n+m)x - \sin(n-m)\right]$$

$$\cos nx \cos mx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)\right]$$

$$\sin nx \sin mx = -\tfrac{1}{2}\left[\cos(n+m)x - \cos(n-m)\right]$$

E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 8

Untuk No. 1 – 5, gunakan metode subtitusi dalam integral tentu untuk menghitung masing-masing yang berikut

1. $\int_0^1 \frac{1}{2}(x+1)^3\, dx$

2. $\int_0^2 \frac{2x}{(x^2+9)^3}\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\frac{x+1}{2}}{(2x^2+4x)^2}\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 t \ \sin t \ dt$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin 2x)\ dx$

Untuk No 6 – 10, gunakan metode subtitusi trigonometri dalam integral yang ditunjuk untuk menyelesaikan masing-masing integral yang berikut:

6. $\int \cos^2 x \ dx$
7. $\int \sin^3 4x \ \cos^2 4x \ dx$
8. $\int \sin^3 3x \ \cos^3 3x \ dx$
9. $\int \cos 4x \cos 5x \ dx$
10. $\int \sin 2x \cos x \ dx$

(Skor untuk masing soal adalah 10)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 8

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Kegiatan Belajar 9. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 8, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 9)

Integral Parsial

Mari kita ingat kembali beberapa anti derivatif atau integral tak tentu yang akan banyak kita gunakan pada integral parsial selanjutnya:

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c\,.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$$

Apabila pengintegralan subtitusi gagal, dimungkinkan menggunakan subtitusi ganda, yang dikenal sebagai *pengintegralan parsial*. Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus untuk turunan hasil kali dua fungsi.

Andaikan u= u(x) dan v = v(x) maka D_x [u(x).v(x)] = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan tersebut, kita peroleh:

$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)\, dx + \int u(x).v'(x)\, dx$

$u(x).v(x) = \int v(x).u'(x)\, dx + \int u(x).v'(x)\, dx$

$\int u(x).v'(x)\, dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)\, dx$

Karena $dv = v'(x)\, dx$ dan $du = u'(x)\, dx$, persamaan di atas dapat ditulis secara lambang sebagai berikut:

PENGINTEGRALAN PARSIAL – INTEGRAL TAK TENTU
$\int u\, dv = u.v - \int v.\, du$

Sedangkan rumus di atas berpadanan untuk integral tentu

PENGINTEGRALAN PARSIAL – INTEGRAL TENTU
$\int_a^b u\, dv = [u\, v]_a^b - \int_a^b v\, du$

Contoh 9.1:

Selesaikan integral dari : $\int x \cos x\, dx$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita menuliskan $x \cos x\, dx$ sebagai u dv, sehingga kita misalkan $u = x \ni du = dx$

$dv = \cos x\, dx \ni \int dv = \int \cos x\, dx \rightarrow v = \sin x$

Rumus pengintegralan parsial memberikan:

$\int u\, dv = u.v - \int v.\, du$

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

Contoh 9.2:

Selesaikan integral dari : $\int x^2 \sin x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2$ $\quad \ni du = 2x\, dx$

$dv = \sin x \, dx \quad \ni v = -\cos x$

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int u\, dv = u.v - \int v.\, du$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx$$

Perhatikan situasi pengintegralan di atas, maka kita memperoleh bentuk pengintegralan parsial

$$\left(\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c \right)$$

sehingga

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + c_1 + 2\int x \cos x \, dx$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + c_1 + 2\,(x \sin x + \cos x + c_2)$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

Contoh 9.3:

Selesaikan integral dari : $\int e^x \sin x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = e^x ∍ du = $e^x\,dx$

dv = cos x dx ∍ v = sin x

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int u\,dv = u.v - \int v.\,du$

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Apabila hasil ini disubtitusikan ke dalam hasil pertama, kita peroleh bentuk pengintegralan parsial, sehingga perlu kita memanipulasi suku-suku pada masing-masing ruas, berikut:

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = \int e^x \cos x\,dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$= 2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$= \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

Contoh 9.4:

Selesaikan integral dari : $\int \ln x\,dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = ln x $\ni$ du = $\left(\frac{1}{x}\right)$ dx

dv = dx $\ni$ v = x

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int$ u dv = u.v – $\int$ v. du

$$\int \ln x\, dx = x.\ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \ x.\ln x - \int dx = x.\ln x - x = x(\ln x - 1)$$

Contoh 9.5:

Tentukan integral dari : $\int \arcsin x\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = arcsin x $\ni$ du = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dx

dv = dx $\ni$ v = x

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int$ u dv = u.v – $\int$ v. du

$$\int \arcsin x\, dx = x.\ \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x.\ \arcsin x - \left[\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\right]$$

$$= x.\arcsin x - \left[\frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} + C\right]$$

$$= x.\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Contoh 9.6:

Selesaikan integral dari : $\int \sin^6 x\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal nomor 6, gunakan rumus reduksi berikut:

$$\boxed{\text{Jika } n \text{ genap, maka} \int \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx}$$

sehingga : $\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx$

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}.\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}\int 1\,dx$$

$$= \frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.x + c$$

$$= \frac{15}{48}x + c$$

Contoh 9.7:

Selesaikan integral dari : $\int \cos^7 x\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal nomor 7, gunakan rumus reduksi berikut:

$$\boxed{\text{Jika } n \text{ ganjil, maka} \int \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx}$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{6}{7}\int \cos^5 x\,dx$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{6}{7}.\frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

$$= \frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$

$$= \frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\sin x + C$$

$$= \frac{48}{175}\sin x + C$$

Contoh 9.8:

Selesaikan integral dari : $\int 2x \sin x\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menangani integral ini, kita menuliskan 2x *cos* x dx sebagai u dv, sehingga misalkan u = x ∍ ½ du = dx

dv = *sin* x dx ∍ ∫ dv = ∫ *sin* x dx → v = –cos x

Rumus pengintegralan parsial memberikan:

∫ u dv = u.v – ∫ v. du

$$\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) + \int \cos x\,dx \quad \int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

Contoh 9.9:

Selesaikan integral dari : $\int 3x^2 \cos x\, dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = $3x^2$ $\ni$ du = $6x\, dx$

dv = $\cos x$ dx $\ni$ $v = \sin x$

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int$ u dv = u.v – $\int$ v. du

$$\int x^2 \sin x\, dx = 3x^2 \sin x + 6\int x \sin x\, dx$$

Perhatikan situasi pengintegralan di atas, maka kita memperoleh bentuk pengintegralan parsial

$$\left(\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \sin x + c \right)$$

sehingga

$$\int 3x^2 \cos x\, dx = 3x^2 \sin x + c_1 + 6\int x \sin x\, dx$$

$$\int 3x^2 \cos x\, dx = 3x^2 \sin x + c_1 + 6\left(-x\cos x - \sin x + c_2\right)$$

$$\int 3x^2 \cos x\, dx = 3x^2 \sin x + c_1 - 6x\cos x - 6\sin x + c_2$$

$$\int 3x^2 \cos x\, dx = \left(3x^2 - 6\right)\sin x - 6x \cos x + c$$

Contoh 9.10:

Selesaikan integral dari : $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = e^{2x} ∍ du = ½ e^{2x} dx

dv = cos $3x$ dx ∍ $v = \frac{1}{3}\sin 3x$

Rumus pengintegralan parsial memberikan

∫ u dv = u.v – ∫ v. du

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{6} \int e^{2x} \sin 3x \; \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{6} \int e^{2x} \sin 3x \; \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{6} [e^{2x} \sin 3x \text{ - } \int e^{2x} \; d(\sin 3x)]$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{6} [e^{2x} \sin 3x \text{ - } 3\int e^{2x} \cos 3x \; dx]$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{6} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 3x \; dx$$

$$= \frac{1}{5} e^{2x} \sin 3x + \frac{3}{10} e^{2x} \sin 3x + c$$

Contoh 9.11:

Selesaikan integral dari : $\int 2 \ln t \, dt$

Penyelesaian:

Misalkan u = ln t ∍ du = $\frac{1}{t} dt$

dv = dt $\ni v = t$

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int$ u dv = u.v – $\int$ v. du

$$\int 2\ln t\,dt = 2\int \ln t\,dt = 2\left[t.\ln t - \int t\left(\frac{1}{t}\right)dt\right]$$

$$= 2\left[t.\ln t - \int dt\right] = 2t.\ln t - t = 2t(\ln t - 1)$$

Contoh 9.12:

Tentukan integral dari : $\int \arccos x\,dx$

Penyelesaian:

Misalkan u = arccos x $\ni$ du = $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

dv = dx $\ni v = x$

Rumus pengintegralan parsial memberikan

$\int$ u dv = u.v – $\int$ v. du

$$\int \arccos x\,dx = x.\,ar\cos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x.\ \arccos x + \left[\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

$$= x.\ \arccos x + \left[\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} + c\right]$$

$$= x.\ \arccos x + \sqrt{1-x^2} + c$$

G. Tugas Kegiatan Belajar 9

Untuk memperluas wawasan Anda tentang integral parsial, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Untuk No 1 – 10, gunakan pengintegralan parsial untuk melakukan pengintegralan yang ditunjuk

1. $\int x\, e^{x}\, dx$
2. $\int x\, e^{5x+\pi}\, dx$
3. $\int x\, \cos x\, dx$
4. $\int (x-3)\, \cos(x-3)\, dx$
5. $\int x\, \sqrt{x+1}\, dx$
6. $\int \ln\, 3x\, dx$
7. $\int \arctan x\, dx$
8. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
9. $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$
10. $\int x^3 \ln x\, dx$

H. Rangkuman Kegiatan 9

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 9 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

- Pengintegralan Parsial – Integral Tak Tentu

$$\int u\, dv = u.v - \int v.\, du$$

- Pengintegralan Parsial – Integral Tentu

$$\int_a^b u\, dv = [u\, v]_a^b - \int_a^b v\, du$$

- Rumus reduksi

$$\text{Jika } n \text{ genap, maka} \int \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\text{Jika } n \text{ ganjil, maka} \int \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 9

Untuk No 1 – 10, gunakan pengintegralan parsial untuk melakukan pengintegralan yang ditunjuk

1. $\int x\, e^{3x}\, dx$

2. $\int (x+7)\, e^{2x+3}\, dx$

3. $\int x\, \mathbf{sin}\, 2x\, dx$

4. $\int (x-\pi)\, \mathbf{sin}(x)\, dx$

5. $\int x\sqrt[3]{2x+7}\,dx$

6. $\int \mathbf{ln}\,(7x^5)\,dx$

7. $\int \mathbf{arctan}\,5x\,dx$

8. $\int \dfrac{\mathbf{ln}\,2x^5}{x^2}\,dx$

9. $\int \sqrt{2x}\;\mathbf{ln}\,x^3\,dx$

10. $\int x\,\mathbf{arctan}\,x\,dx$

(Skor untuk masing soal adalah 10)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegitan belajar 9

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke Modul 10. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 9, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 10)

Subtitusi Yang Merasionalkan

Kadang kala jika integran memuat akar, menetukan integralnya relative lebih sulit dibandingkan dengan tidak memuat akar. Untuk mempermudah menentukan integralnya kita dapat melakukan penggantian (subtitusi) terhadap suatu bentuk integran semula, misalnya fungsi x, dengan melakukan subtitusi dengan kita munculkan variable baru misalnya t, sehingga akhirnya integran berubah menjadi dalam t. setelah berubah variable, kita harapkan pengintegralannya akan lebih sederhana dan l ebih mudah mencarinya. Jika tidak, kita dapat menggunakan teknik yang lain

- **(Bentuk A) integrannya memuat** $\sqrt{a^2 - x^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\sin t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Kita berharap dengan melakukan perubahan di atas integralnya menjadi lebih sederhana.

Contoh 10.1:

Selesaikan integral dari : $\int \sqrt{4 - x^2}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$$

karena $\sin t = \frac{x}{2}$ sehingga diperoleh : $\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

Sehingga

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \int (2\cos t)(2\cos t\,dt)$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 4\int \cos^2 t\,dt$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \quad \int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\int (1+\cos\ 2t)dt$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \int\ 2dt + \int \cos\ 2t\ dt$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + \frac{1}{2}\sin\ 2t + c$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + \frac{1}{2}(2\ \sin t\ \cdot \cos t) + c$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + \sin t\ \cdot \cos t + c$$

karena $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, sehingga :

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

- **(Bentuk B) integrannya memuat** $\sqrt[p]{(ax+b)^q}$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $t = \sqrt[p]{(ax+b)^q}$.

Dengan subtitusi itu kita peroleh:

$$t = ax + b;$$

$$x = \frac{1}{a}\left(t^p - b\right)$$

$$dx = \frac{p}{a} t^{p-1} dt$$

Kita berharap dengan melakukan perubahan di atas integralnya menjadi lebih sederhana.

Contoh 10.2:

Selesaikan integral dari : $\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\, dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$$t = \sqrt{(2x-1)}$$

$$x = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$$

$$dx = t\, dt$$

Sehingga

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\, dx = \int \left(\frac{t^2+1}{2}\right)\left(\frac{t}{t^3}\, dt\right)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\, dx = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\ dx = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\ dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\ dx = \frac{1}{2}t + c_1 + \frac{1}{2}\int t^{-2}\ dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\ dx = \frac{t}{2} + c_1 - \frac{1}{2t} + c_2$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(2x-1)^3}}\ dx = \frac{\sqrt{(2x-1)}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{(2x-1)}} + c$$

- **(Bentuk C) integrannya memuat** $\sqrt{a^2 + x^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\tan\ t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$t = \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Kita berharap dengan melakukan perubahan di atas integralnya menjadi lebih sederhana.

Contoh 10.3:

Selesaikan integral dari : $\int \sqrt{4 + x^2}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$x = 2\tan t \Rightarrow dx = 2\ \sec^2 t\, dt$

karena $x = 2\tan t$ sehingga diperoleh : $x^2 = 4\tan^2 t$

Sehingga

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = \int \sqrt{4+4\tan^2 t}\ \left(2\sec^2 t\ dt)\right)$$

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = \int \sqrt{4(1+\tan t)}\ \left(2\sec^2 t\right)dt$$

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = 2\int \sqrt{\sec^2 t}\ \left(2\sec^2 t\right)dt$$

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = 2\int \left(\sec t\ \right)\left(2\sec^2 t\right)dt$$

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = 4\int \sec^3 t\ dt$$

karena $t = \arctan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, sehingga : .

$$\int \sqrt{4+x^2}\ dx = 4\int \sec^3\left(\tan^{-1}\left[\frac{x}{2}\right]\right)\ dt$$

- **(Bentuk D) integrannya memuat** $\sqrt{x^2-a^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\sec t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$t = arc\sec\left(\dfrac{x}{a}\right).$

Kita berharap dengan melakukan perubahan di atas integralnya menjadi lebih sederhana.

Contoh 10.4:

Selesaikan integral dari : $\int \sqrt{x^2-4}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$x = 2\sec t \Rightarrow dx = 2\ \sec t\ \tan\ t\,dt$

karena $x = 2\sec t$ sehingga diperoleh : $x^2 = 4\sec^2 t$

Sehingga

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = \int \sqrt{4\sec^2 t - 4}\ (2\ \sec t\ \tan\ t)\,dt$$

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = \int \sqrt{4(\sec^2 t - 1)}\ (2\ \sec t\ \tan\ t)\,dt$$

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = 2\int \sqrt{\tan^2 t}\ (2\ \sec t\ \tan\ t)\,dt$$

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = \int (2\tan\ t)\ (2\ \sec t\ \tan\ t)\,dt$$

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = 4\int \sec\ t\ \tan^2\ t\ dt$$

karena $t = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, sehingga :

$$\int \sqrt{x^2-4}\ dx = 4\int \sec\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\tan^2\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]dt$$

Contoh 10.5:

Selesaikan integral dari : $\int \sin^4 x\,dx$

Penyelesaian:

Kita gunakan rumus reduksi untuk pangkat genap, sehingga : $\int \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$

$$\int \sin^6 x\,dx == \frac{5}{6}.\frac{1}{2}\int 1\,dx$$

$$= \frac{5}{12}x + c$$

Contoh 10.5:

Selesaikan integral dari : $\int \cos^5 x\,dx$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan kita gunakan rumus reduksi n pangkat ganjil, sehingga:

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{4}{7}\int \cos^3 x\,dx$$

$$= \frac{4}{7}\frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{8}{21}\sin x + c$$

Contoh 10.6:

Selesaikan integral dari : $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Penyelesaian:

Misalkan:

$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$

Sehingga

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = 2\int \frac{\cos t}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t \cdot 2\cos t}\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{4}\cot t + c$$

karena $x = 2\sin t$ maka $\sin t = \dfrac{x}{2}$

Dengan teorema phytagoras diperoleh $\cot t = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{4}\cot t + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}\, dx = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

Contoh 10.7:

Selesaikan integral dari : $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$$u = \sqrt{x}$$
$$u^2 = x$$
$$dx = 2\,du$$

Sehingga

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{2u}{u^2-u}\, du$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx = 2\int \frac{1}{u-1}\, du$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx = 2\int \frac{1}{u-1}\, d(u-1)$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx = 2\ln\left|u-1\right|$$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\ dx = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c$$

Contoh 10.8:

Selesaikan integral dari : $\int x\ \sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$$u = (x+1)^{\frac{1}{5}}$$
$$u^5 = x+1$$
$$5u^4 du = dx$$

Sehingga

$$\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx = \int \left(u^5 - 1\right) u^2 \cdot 5u^4 du$$

$$\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx = 5\int \left(u^{11} - u^6\right) du$$

$$\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx = \frac{5}{12} u^{12} - \frac{5}{7} u^7 + c$$

$$\int x \sqrt[5]{(x+1)^2}\ dx = \frac{5}{12} \sqrt[5]{(x+1)^{12}} - \frac{5}{7} \sqrt[5]{(x+1)^7} + c$$

Contoh 10.9:

Selesaikan integral dari : $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$$x = 3\tan t \Rightarrow dx = 3\ \sec^2 t\, dt$$

karena $\frac{x}{3} = \tan t$ sehingga diperoleh : $\sqrt{9+x^2} = 3\sec t$

Sehingga

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\ dx = \int \frac{3\sec^2 t}{3\sec t}\ dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\ dx = \int \sec t\ dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\ dx = \ln\left|\sec t + \tan t\right| + c$$

Contoh 10.10:

Selesaikan integral dari : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx$

Penyelesaian:

Kita misalkan:

$x = 2\sec t \Rightarrow dx = 2\ \sec t\ \tan\ t\, dt$

karena $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2 t - 4} = 2\sqrt{\tan^2 t} = 2\tan t$

Sehingga

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx = \int \frac{2\tan t}{2\sec t}\left(2\sec t\ \tan\ t\, dt\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx = 2\int \tan^2 t\, dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx = 2\int (\sec^2 t - 1)\, dt \quad = 2(\tan t - t) + c$$

K. Tugas Kegiatan Belajar 10.

Untuk memperluas wawasan Anda tentang subtitusi yang merasionalkan, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Untuk No 1 – 10, selesaikan dengan menggunakan subtitusi yang merasionalkan/ teknik menghilangkan akar pada soal-soal di bawah ini:

1. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$
2. $\int \sqrt{4-16x^2}\,dx$
3. $\int \sqrt{4x^2-1}\,dx$
4. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$
5. $\int \sqrt{25+x^2}\,dx$
6. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+e}\,dx$
8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$
9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$
10. $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

(Skor untuk masing soal adalah 10)

L. Rangkuman Kegiatan 10

Berdasarkan paparan Kegitan Belajar 10 tentang Subtitusi Yang Merasionalkan, garis besar bahan yang dibahas adalah

- **(Bentuk A) integrannya memuat** $\sqrt{a^2 - x^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\sin t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

- **(Bentuk B) integrannya memuat** $\sqrt[p]{(ax+b)^q}$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $t = \sqrt[p]{(ax+b)^q}$.

Dengan subtitusi itu kita peroleh:

$$t = ax + b;$$

$$x = \frac{1}{a}\left(t^p - b\right)$$

$$dx = \frac{p}{a}t^{p-1}dt$$

- **(Bentuk C) integrannya memuat** $\sqrt{a^2 + x^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\tan t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$t = \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

- **(Bentuk D) integrannya memuat** $\sqrt{x^2 - a^2}$,syarat $a > 0$

Untuk menghilangkan akar dapat dilakukan subtitusi $x = a\sec t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$t = arc\sec\left(\frac{x}{a}\right).$$

Kita berharap dengan melakukan perubahan di atas integralnya menjadi lebih sederhana.

M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 10

Untuk No 1 – 10, selesaikan dengan menggunakan subtitusi yang merasionalkan/ teknik menghilangkan akar pada soal-soal di bawah ini:

1. $\int \sqrt{1-9x^2}\, dx$
2. $\int \sqrt{9-4x^2}\, dx$
3. $\int \sqrt{16x^2-9}\, dx$
4. $\int \sqrt{4x^2-36}\, dx$
5. $\int \sqrt{1+4x^2}\, dx$
6. $\int 2x\sqrt{x+1}\, dx$
7. $\int \frac{5}{\sqrt{x}+e}\, dx$
8. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\, dx$
9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-16}}\, dx$
10. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(Skor untuk masing soal adalah 10)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 10

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan 11. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 10, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

N. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

O. Bacaan Yang Di Anjurkan

Sulaiman R, 2008. Matematika Dasar 2 (Integral dan Aplikasinya). Universitas Negeri Surabaya. Surabaya: Unesa University Press

BAB V

PENERAPAN INTEGRAL

A. Pendahuluan

Bahan ajar ini terdiri empat kegiatan belajar. Kegiatan belajar 11 tentang luas derah suatu kurva, kegiatan belajar 12 tentang volume benda dalam bidang: lempengan, cakram, cincin, kegiatan belajar 13 tentang volume benda putar, kegiatan belajar 14 tentang panjang kurva pada bidang.

Untuk memahami materi tentang terapan integral, Anda harus sudah menguasai teknik pengintegralan. Pada materi teknik integral, kita telah mempelajari tentang mencari nilai dari suatu integral tentu.

Pada materi penerapan integral ini, integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas merupakan salah satu alternatif yang dapat kita gunakan, karena integral tentu ini dikembangkan untuk keperluan tersebut. Tetapi penggunaan integral berlanjut telah dapat digunakan dalam berbagai penerapan ilmu lain. Pembahasan tentang luas dalam poligon dalam dan luar diperlukan untuk memberikan dasar tentang definisi integral tentu. Setelah konsep ini bebar-benar dipahami, kita berbalik arah dan menggunakan integral tentu untuk menghitung luas daerah-daerah yang berbentuk rumit.

Capaian Pembelajaran

- **Kompetensi umum** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep luas derah suatu kurva, volume benda dalam bidang: lempengan, cakram, cincin, dan volume benda putar, serta panjang kurva pada bidang.
- **Kompetensi khusus** dalam mempelajari bahan ajar ini adalah mahasiswa mampu mengitung konsep luas derah suatu kurva,

volume benda dalam bidang: lempengan, cakram, cincin, dan volume benda putar, serta panjang kurva pada bidang..

- **Materi Pokok:** Luas Derah Suatu Kurva, Volume Benda Dalam Bidang: Lempengan, Cakram, Cincin, Dan Volume Benda Putar, Serta Panjang Kurva Pada Bidang.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian contoh dengan cermat dan berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi pembahasan.
2. Kerjakan tugas yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus atau tahapan tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka mintalah bantuan tutor Anda atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat penguasaan Anda pada tes formatif. Ulangi pengerjaan tes formatif sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

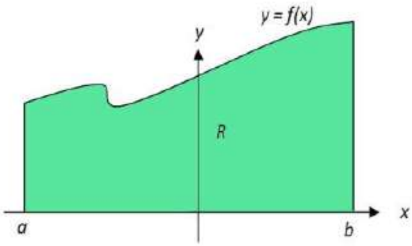
B. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 11)

Luas Derah Suatu Kurva

Salah satu penggunaan integral tentu adalah untuk menentukan luas daerah bidang. Tentu tidak semua daerah bidang dapat ditentukan luasnya dengan mudah. Pada bab ini kita akan membahas cara menentukan luas daerah bidang yang dibatasi oleh beberapa kurva yang diketahui atau dapat ditentukan persamaannya.

- **Daerah di Atas Sumbu *X*.**

Andaikan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva di bidang xy dan andaiakan f kontinu dan tak negatif pada selang $a \leq x \leq b$ (seperti pada gambar A).



Gambar A

Tinjau daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, *dan* $y = 0$. Kita mengacu R sebagai daerahdi bawah $y = f(x)$, antara $x = a$ dan $x = b$. Luas daerah tersebut, $A(R)$ diberikan oleh:

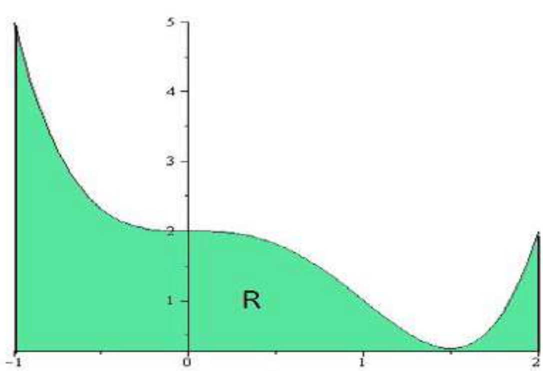
$$\boxed{A(R) = \int_a^b f(x)dx}$$

Contoh 11.1:

Tentukan luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ di $-1 \le x \le 2$.

Penyelesaian:

Gambar fungsi $y = x^4 - 2x^3 + 2$



$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x \right]_{-1}^{2}$$

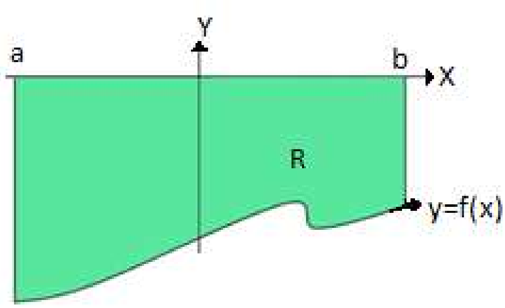
$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{51}{10} = 5{,}1$$

- **Daerah di Bawah Sumbu *X***

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu x, maka $\int_a^b f(x)dx$ adalah bilangan negatif sehingga tidak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi, bilangan itu adalah negatif dari luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$.

Andaikan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva di bidang xy dan andaiakan f kontinu dan tak negatif pada selang $a \leq x \leq b$ (seperti pada gambar B).

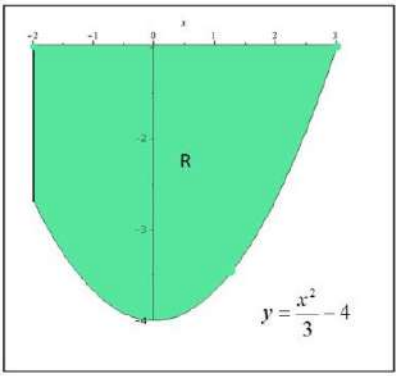


Gambar B

Contoh 11.2:.

Tentukan luas daerah *R* yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$, sumbu *x, x* = -2 dan *x* = 3.

Penyelesaian:



$$A(R) = -\int_{-2}^{3} (\frac{x^2}{3} - 4)\, dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3}$$

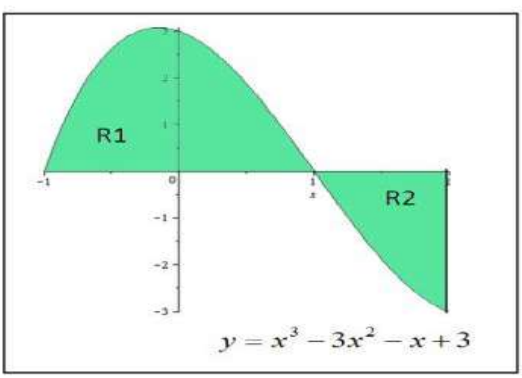
$$= \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right)$$

$$= \frac{145}{9}$$

Contoh 11.3:

Tentukan luas daerah *R* yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu *x* antara *x = -1* dan *x = 2,* dan garis *x = 2.*

Penyelesaian:



$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4} \right) = \frac{23}{4}$$

Cara Berfikir yang Dapat Membantu. Sejauh ini semuanya berjalan dengan baik. Untuk daerah-daerah sederhana sejenis yang ditinjau di atas, mudah sekali menulis integral yang benar. Apabila kita meninjau daerah yang lebih rumit (misalnya, daerah di antara dua kurva), tugas pemilihan integral yang benar lebih sukar. Namun, terdapat suatu cara berpikir yang dapat sangat membantu. Pemikiran itu kembali kedefinisi luas dan integral tentu. Berikut adalah cara berfikir tersebut dalam lima langkah.

Langkah 1 Gambarlah daerah yang bersangkutan.

Langkah 2 Irislah menjadi irisan-irisan kecil; beri label pada suatu irisan khas.

Langkah 3 Hampiri luas irisan khas ini, dengan menganggap irisan tersebut berupa sebuah persegi panjang.

Langkah 4 Jumlahkanlah hampiran-hampiran luas irisan tersebut

Langkah 5 Ambillah limit dengan lebar irisan menuju nol sehingga diperoleh suatu integral tentu (definit).

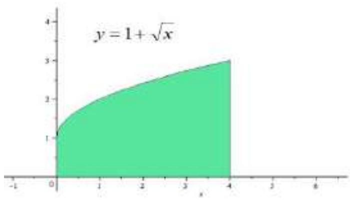
Untuk mengilustrasikan, perhatikan contoh sederhana lain berikut ini.

Contoh 11.4:

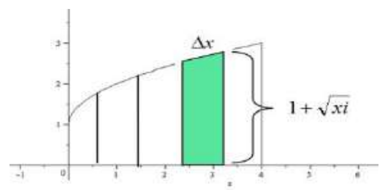
Susunlah integral luas daerah di bawah kurva $y = 1 + \sqrt{x}$, yang terletak antara garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$.

Penyelesaian:

1. Gambar



2. Potong-potong



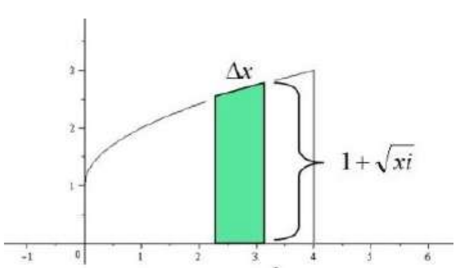
3. Aproksimasi luas jalur: $\Delta A_i \approx (1 + \sqrt{x_i})\Delta x_i$

4. Jumlahkan : $A \approx \sum (1 + \sqrt{x_i})\Delta x_i$

5. Ambil limitnya: $A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x_i})dx$

Andaikan $y = f(x)$ menentu

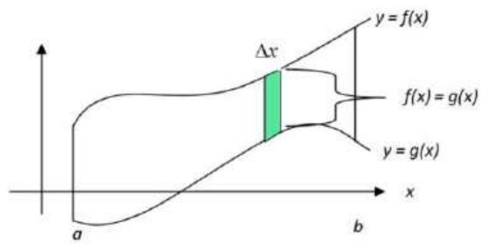
Begitu kita memahami prosedur empat langkah tersebut, kita dapat menyingkatkan menjadi tiga langkah, yaitu: iris, hampiri, dan integralkan. Pikirkan kata integralkan memilki arti jumlahkan dan ambil limit apabila lebih besar irisan menuju nol. Dalam proses ini $\sum \ . \ . \ . \ \Delta x$ berubah menjadi $\int \ . \ . \ . \ dx$. Gambar di bawah ini menunjukan proses yang telah dipersingkat itu untuk soal yang sama.



$$\boxed{\begin{aligned} \Delta A_i &\approx (1 + \sqrt{x_i})\Delta x_i \\ A &= \int_0^4 (1 + \sqrt{x_i})dx \end{aligned}}$$

- **Daerah Antara Dua Kurva.**

Tinjauhlah kurva - kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \le f(x)$ pada $a \le x \le b$. Kurva – kurva dan selang itu menentukan daerah yang diperlihatkan dalam (gambar C). Kita gunakan metode iris, hampiri, dan integralkan untuk menentukan luasnya. Pastikan untuk memperhatikan bahwa *f(x)* – *g(x)* memberikan tinggi yang benar dari irisan tipis tersebut, walaupun grafik *g(x)* negatif; sehingga mengurangkan dengan *g(x)* berarti menambahkan dengan bilangan yang positif.



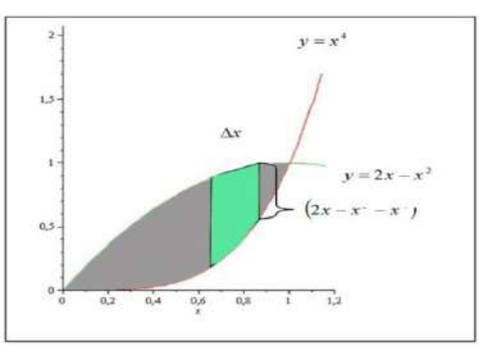
$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\Delta x$$
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Gambar C

Contoh 11.5:

Tentukan luas daerah di antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian:



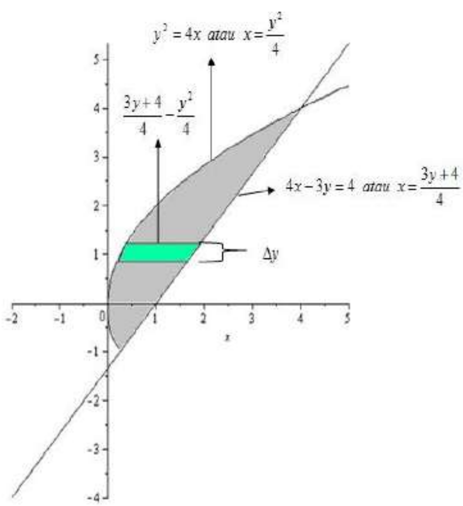
$$\Delta A = \left(2x - x^2 - x^4\right)\Delta x$$
$$A = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^4\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(2x - x^2 - x^4\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

Contoh 11.6:

Tentukan luas daerah R diantara parabola $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian:



$$y^2 = 3y + 4$$
$$y^2 - 3y - 4 = 0$$
$$(y-4)(y+1) = 0$$
$$y = 4, -1$$

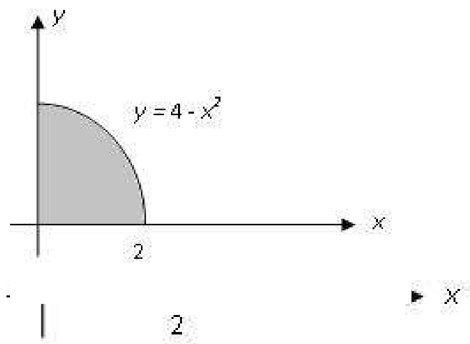
$$\Delta A \approx \left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]\Delta y$$
$$A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]dy$$

$$A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^{4}\left(3y + 4 - y^2\right)dy$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{125}{24} \approx 5{,}21$$

Contoh 11.7:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang diberikan; *potong, diaproksimasi, diintegralkan.*

Sumbu-x



Penyelesaian:

Diketahui : $y = x^2 + 1; [a, b] = [0,\ 2];\ sumbu - x$

$$A(R) = \int_a^b y^2\, dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 1)^2\, dx$$

$$= \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

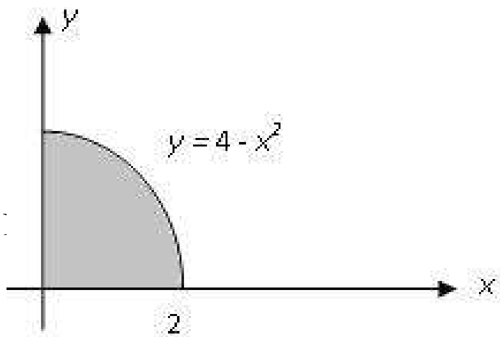
$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^2$$

$$= \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2$$

$$= \frac{206}{15} \text{ satuan volume}$$

Contoh 11.8:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang diberikan; *potong, diaproksimasi, diintegralkan.*



$\iota - x$

a

$$= \int_0^2 (4 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \int_0^2 (16 - x^2 + x^4) dx$$

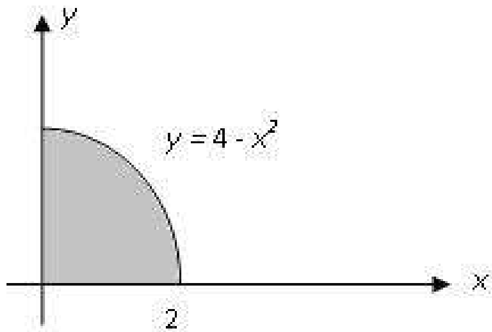
$$= \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= 32 + \frac{64}{3} + \frac{32}{5}$$

$$= 17\frac{1}{15} \text{satuan volume}$$

Contoh 11.9:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang diberikan; *potong, diaproksimasi, diintegralkan.* Pada sumbu-y



Penyelesaian:

Diketahui : $x = 4 - y; [a,b] = [0,\ 2];\ sumbu - y$

$$A(R) = \int_a^b x^2 dy$$

$$= \int_0^2 (4-y)^2 dy$$

$$= \int_0^2 (16 - 8y - y^2) dy$$

$$= \left[16y - \frac{8y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \frac{96 - 48 - 8}{3}$$

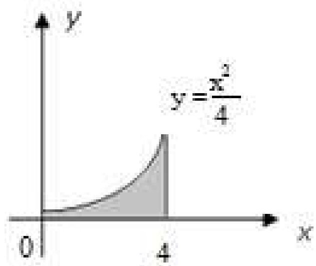
$$= \frac{40}{3} \text{satuan volume}$$

Contoh 11.10:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan oleh grafik-grafik berikut:

$$y = \frac{x^2}{4}, x = 4, y = 0$$

Penyelesaian:



Diketahui : $y = \frac{x^2}{4}; [a,b] = [0,\ 4];\ sumbu - x$

$$A(R) = \int_a^b y^2 dx$$

$$= \int_0^4 (\frac{x^2}{4})^2 dx$$

$$= \int_0^4 \frac{x^4}{16} dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{80} \right]_0^4$$

$$= \frac{4^5}{80} - \frac{0^5}{80}$$

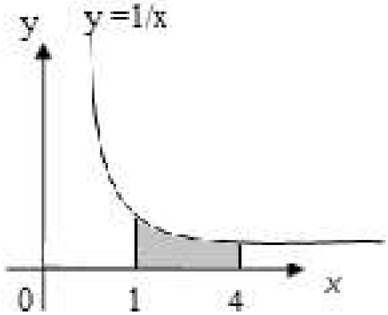
$$= \frac{64}{5} \text{satuan volume}$$

Contoh 11.11:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan oleh grafik-grafik berikut:

$$y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$$

Penyelesaian:



Diketahui : $y = \dfrac{1}{x}; [a,b] = [1,\ 4];\ sumbu - x$

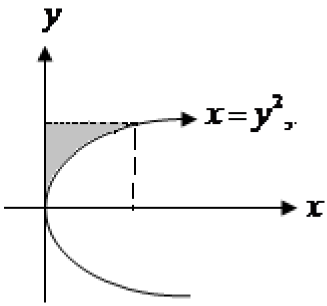
$$
\begin{aligned}
A(R) &= \int_a^b y^2\,dx \\
&= \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \\
&= \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \int_1^4 x^{-2}\,dx \\
&= \left[-x^{-1}\right]_1^4 \\
&= -\left[\frac{1}{4} - 1\right] \\
&= -\frac{1}{4} + 1 \\
&= \frac{3}{4} \text{ satuan volume}
\end{aligned}
$$

Contoh 11.12:

Tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan oleh grafik-grafik berikut:

$x = y^2, x = 0, y = 2$

Penyelesaian:



Diketahui : $x = y^2$; $[a,b] = [0,\ 2]$; $sumbu - y$

$$A(R) = \int_a^b x^2 dy$$

$$= \int_0^2 (y^2)^2 dy$$

$$= \int_0^2 y^4 dy$$

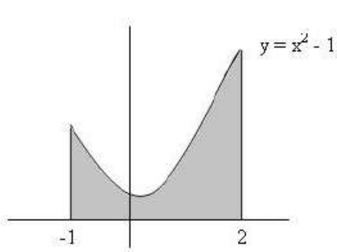
$$= \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{32 - 0}{5}$$

$$= \frac{32}{5} \text{ satuan volume}$$

Contoh 11.13:

Gunakan prosedur tiga langkah (potong, aproksimasi, integralkan) untuk menyusun integral daerah yang harus dicari luasnya.



Penyelesaian

Diketahui : $y = x^2 + 1$; $[-1,\ 2]$

$$A(R) = \int_{-1}^{0} (x^2 + 1)dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{2}$$

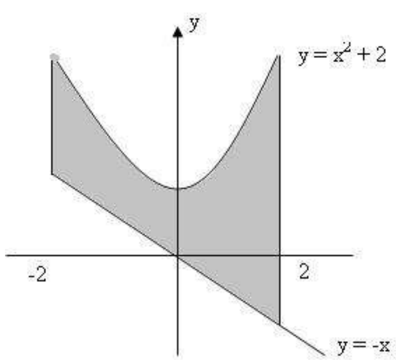
$$= \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{14}{3}\right)$$

$$= \frac{18}{3} \text{ satuan luas}$$

Contoh 11.14:

Gunakan prosedur tiga langkah (potong, aproksimasi, integralkan) untuk menyusun integral daerah yang harus dicari luasnya.

.



Penyelesaian

Diketahui : $y_1 = x^2 + 2$ dan $y_2 = -x$; $[-2,\ 2]$

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 + 2 = -x$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$A(R) = \int_{-2}^{0} (x^2 + x + 2)dx + \int_{0}^{2} (x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{0}^{2}$$

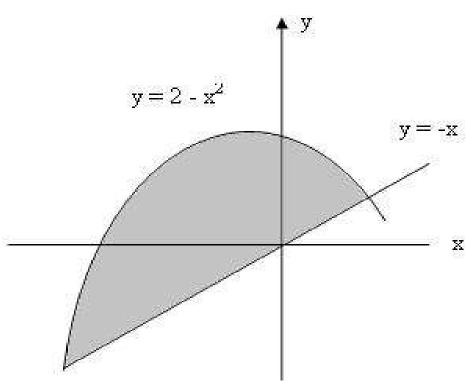
$$= \left[\frac{8}{3} - 2 + 4 \right] + \left[\frac{8}{3} + 2 + 4 \right]$$

$$= \frac{16}{3} + 8$$

$$= 13\frac{1}{3} \text{ satuan luas}$$

Contoh 11.15:

Gunakan prosedur tiga langkah (potong, aproksimasi, integralkan) untuk menyusun integral daerah yang harus dicari luasnya.



Penyelesaian

Diketahui : $y_1 = 2 - x^2$ dan $y_2 = x$

$y_1 = y_2$

$2 - x^2 = x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ atau $\mathrm{x} = -2$

titik potong pada sumbu x menjadi intervalnya yaitu [-2,1]

$$A(R) = \int_{-2}^{0} (x^2 + x - 2)dx + \int_{0}^{1} (x^2 + x - 2)dx$$

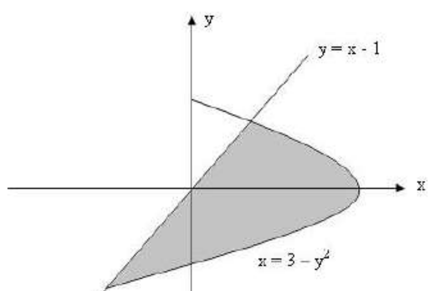
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{21}{3} \text{ satuan luas}$$

C. Tugas Kegiatan Belajar 11

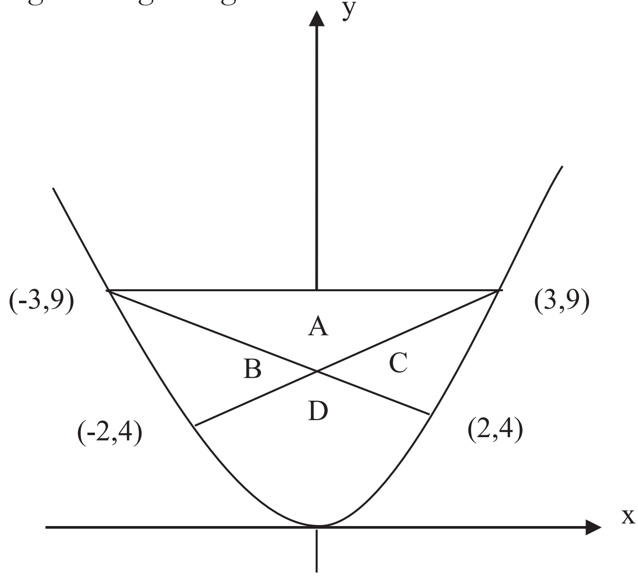
Untuk memperluas wawasan Anda tentang kegitan ini, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

1. Gunakan prosedur tiga langkah (potong, aproksimasi, integralkan) untuk menyusun integral daerah yang harus dicari luasnya.



2. Gambarlah daerah R yang dibatasi oleh $y = x + 6, y = x^3$, dan $2y + x = 0$. Hitunglah luasnya. *Petunjuk*: Bagilah *R* menjadi dua daerah.
3. Sebuah benda bergerak disepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat *t* adalah $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ kaki per detik (lihat contoh 3 pada pasal 3.7). carilah perpindahan dan jarak keseluruhan yang ditempuh benda itu untuk $-1 \leq t \leq 9$.

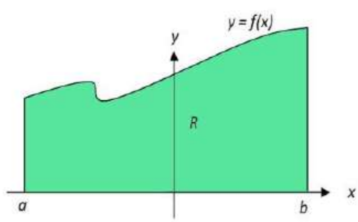
4. Berangkat pada $s=0$ dan $t=0$, suatu benda bergerak sepanjang garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t)=2t-4$ cm per detik. Berapa lama benda itu akan mencapai $s=12$? Untuk menempuh jarak keseluruhan 12 cm?
5. Hitunglah luas A, B, C, dan D dalam gambar 11. Periksalah dengan menghitung $A+B+C+D$ dalam satu bentuk integral.



D. Rangkuman Kegiatan 11

Berdasarkan paparan Kegaitan Belajar 11 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

- Luas Derah Bidang Datar di Atas Sumbu X.



.

Daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, *dan* $y = 0$. Kita mengacu R sebagai daerahdi bawah $y = f(x)$, antara $x = a$ dan $x = b$. Luas daerah tersebut, $A(R)$ diberikan oleh:

- Luas Derah Bidang Datar di bawah Sumbu X.

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu x, maka $\int_a^b f(x)dx$ adalah bilangan negatif sehingga tidak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi, bilangan itu adalah negatif dari luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$

E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 11

Dalam soal nomor 2 – 10, Gambarlah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik fungsi yang diberikan di bawah:

1. $y = 4 - \frac{1}{3}x^2, y = 0,$ **antara** $x = 0$ **dan** $x = 3$
2. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0,$ **antara** $x = 0$ **dan** $x = 2$
3. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$
4. $y = \sqrt{x-4}, y = 0, x = 8$
5. $y = x^2, y = x + 2$
6. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$
7. $x = 6y - y^2, x = 0$
8. $x = 4 - y^2, x + y - 2 = 0$
9. $y^2 - 2x = 0, y^2 + 4x - 12 = 0$
10. $x - y^2 = 0, y^2 + 4x - 12 = 0$

(Skor untuk masing-masing soal adalah 10)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 11.

$$\textbf{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 12. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 11, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

F. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 12)

Volume Benda Dalam Bidang: Cakram, Cincin

Integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas. Hamper tiap besaran yang dapat dianggap sebagai hasil pemotongan sesuatu menjadi bagian-bagian lebih kecil, aproksimasi tiap bagian, penjumlahan dan pengambilan limit apabila tiap bagian mengecil, dapat diartikan sabagai suatu integral. Khususnya, hal ini benar untuk volume benda-benda tertentu yang akan kita bahas dibawah ini.

Gambar D

Apakah yang disebut dengan volume? Kita mulai dengan benda-benda sederhana, yaitu tabung lingkatan tegak dan sejenisnya. Empat diantaranya dilihat pada Gambar D. Dalam tiap kasus, benda itu diperoleh dengan cara menggerakkan suatu daerah pada bidang (rata) sejauh *h* dengan arah yang tegak lurus pada daerah tersebut. Dalam setiap kasus itu, volume benda ditentukan sebagai luas *A,* daerah alas, dikalikan dengan tinggi *h,* yakni,

$$V = A \cdot h$$

Kemudian perhatikanlah sebuah benda yang bersifat bahwa penampangan-penampangan tegak lurusnyapada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya garis tersebut adalah sumbu x dan andaikan bahwa luas penampang di x adalah A(x) dengan $a \leq x \leq b$ (Gambar 2). Selang [a , b] kita bagi dengan tititk-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ melalui titik-titik itu kita lukis bidang tegak lurus pada sumbu x . dengan demikian kita peroleh pemotongan benda menjadi lempengan yang tipis-tipis. Volume $\Delta\ Vi$ suatu lempeng dapat dianggap sebagai volume suatu lempeng dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu:

$$\Delta\ Vi \approx A\,(\tilde{x}i\,)\,\Delta\,x_i \quad x_{i-1} \leq \check{x}_i \leq x_i$$

Dan volume V benda dapat diaprokmasi dengan jumlah Riemann: $V \approx \sum_{i-1}^{n} A(\tilde{x}_i)\,\Delta\,x_i$

Gambar E

Apabila norma partisi kita tunjukan ke nol, kita memperoleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

Dalam perhitungan voume-volume benda, sebaiknya sebaiknya anda jangan menggunakan rumus itu secara hafalan. Akan tetapi anda haruslah memahami proses yang menuju ke penemuan rumus tersebut. Seperti untuk luas, proses itu kita sebut pula, *Pemotongan, Aproksimasi* dan *Pengintegralan.* Hal ini diperjelas dalam contoh-contoh dibawah ini.

- **Benda Putar: Metode Cakram.**

Apabila sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus tetap, diputar mengelilingi garis tersebut, daerah itu akan membentuk sebuah *benda putar*. Garis yang tetap tersebut dinamakan sumbu putar.

Contoh 12.1:

Tentukan volume benda puatar yang dibentuk oleh daerah *R* yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis x – 4 apabila *R* diputar mengelilingi sumbu x. (Seperti Gambar F)

Gambar F

Penyelesaian:

Apabila *R* dipuar mengelilingi sumbu x, daerah ini akan membentuk sebuah benda putar dan jalur tersebut membentuk sebuah cakram yang volumenya ΔV dapat kita aproksimasi dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx_i dan dengan jari-jari alas $\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$, volume tabung ini adalah $\pi r^2 h$. Apabila volume tabung-tabung ini kita jumlahkan dan kemudian kita integralkan, maka

$$V = x\int_0^4 xdx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right] = \pi\frac{16}{2} = 8\pi \approx 25{,}13$$

- **Benda Putar: Metode Cincin.**

Ada kalanya apabila sebuah benda putar kita potong-potong tegak lurus pada sumbu putarnya, kita memperoleh sebuah cakram yang di tengah-tengahnya ada lubangnya. Daerah demikian kita sebut cincin.

Contoh 12.2:

Tentukan volume benda putar apabila daerah yang dibatasi oleh parabol-parabol $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu-x.

Penyelesaian:

Disini kita juga menggunakan metode *potong* menjadi jalur-jalur, kemudian diaproksimasi dan akhirnya *di-integralkan.*

$$V = x\int_0^2 (8x - x^4)dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} = 8\pi \approx 30{,}16$$

Benda Ruang yang Penampangnya Diketahui. Benda yang kita bahas memiliki daerah-daerah lingkaran sebagai penampang-penampang tegak. Metode yang kita gunakan tetap berlaku untuk benda-benda yang penampang tegaknya berbentuk bujur sangkar atau segitiga.

Contoh 12.3:

Andaikan alas sebuah benda adalah suatu daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2/4$, sumbu x berbentuk bujur sangkar. Tentukan volume benda ini.

Penyelesaian:

Apabila kita potong-potong benda tegak lurus pada sumbu x kita peroleh lempeng-lempeng tipis yang berbentuk bujur sangkar (Seperti Gambar G)

Gambar G

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1{,}07$$

G. Tugas Kegiatan Belajar 12

Untuk memperluas wawasan Anda tentang kegitan ini, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Dalam soal-soal 1-3, gambarlah daerah *R* yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diberikan. Perlihatkanlah jalur persegi panjang yang mendatar. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila *R* diputar mengelilingi sumbu *y*.

1. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0$, antara $x=-1$ dan $x=2$
2. $x=y^{3/2}, y=4, x=0$
3. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada bidang *xy* yang dibatasi oleh garis $y=4x$ dan parabol $y=4x^2$ diputar mengelilingi sumbu y. Gambar grafiknya!
4. Alas sebuah benda adalah daerah lingkaran $x^2+y^2=4$. Tentukan volume benda tersebut apabila tiap penampang oleh bidang yang tegak lurus pada sumbu *x* adalah bujur sangkar.
5. Alas sebuah benda dibatasi oleh satu busur dan kurva $y=\sqrt{\cos x}, -\pi/2 \le x \le \pi/2$, dan sumbu *x*. Tiap penampang benda dengan benda yang tegak lurus pada sumbu *x* berbentuk bujur sangkar yang alasnya terletak pada bidang kurva tadi. Tentukan volume benda itu.

H. Rangkuman Kegiatan 12

Berdasarkan paparan Kegaitan Belajar 12 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

- **Benda Putar: Metode Cakram.**
- **Benda Putar: Metode Cincin.**

Apabila sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus tetap, diputar mengelilingi garis tersebut, daerah itu akan membentuk sebuah *benda putar*. Maka untung menhitung volume dapat menggunakan formulasi: $V=\int_a^b A(x)\,dx$

I. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 12

1. Gambarlah daerah *R* yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya $x = \sqrt{y}, y = 4, x = 0$. Perlihatkanlah jalur persegi panjang yang mendatar. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila *R* diputar mengelilingi sumbu *y*.
   (Skor 25)
2. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $x - 2y = 0$ dan parabola $y^2 - 2x = 0$ diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah.
   (Skor 25)
3. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada kuadran pertama $x = 4$ dan sumbu *x* diputar mengelilingi
   (a) garis $x = 4$;
   (b) garis $y = 8$.
   (Skor 50)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 12.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda dapat meneruskan ke kegiatan belajar 13. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 12, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai

J. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 13)

Volume Benda Putar

- **Volume Benda Putar: Kulit Tabung**

Ada cara lain untuk menghitung Volume benda putar, yaitu dengan metode kulit tabung. Untuk berbagai persoalan, metode ini lebih mudah digunakan dåi pada metode cakram atau cincin.

Sebuah kulit tabung adalah sebuah benda yang dilatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit. Apabila jari-jari tabung dalam adalah r_1, dan jari-jari tabung luar adalah r_2, seangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah

$$\begin{aligned}
V &= (\text{Luas alas}) \text{ x } (\text{tinggi}) \\
&= \left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right)h \\
&= \pi\left(r_2 + r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)h \\
&= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h\left(r_2 - r_1\right)
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \times \left(rerata\ jari - jari\right) \times \left(tinggi\right) \times \left(tebal\right) \\
&= 2\pi \text{ rh } \Delta\text{r}
\end{aligned}$$

Gambar H

Jika kulit tabung sangat tipis dan fleksibel, kita dapat membukanya sehingga terbentuk selembar persegi panjang, kemudian kita hitung volumenya dengan menganggap sebuah lembaran ini berbentuk sebuah kotak tipis dengan panjang , tinggi *h*, dan tebal Δr .

Tabung *Selimut Tabung*

gambar

- **Metode Kulit Tabung.**

Melalui proses pemotongan yang vertical dan kemudian putarlah mengelilingi sumbu y. Maka akan terbentuklah sebuah benda putar dan tiap jalur akan membentuk sebuah benda yang menyerupai suatu kulit tabung. Untuk memperoleh volume kulit tabung ini, kita hitung volume ΔV suatu kulit tabung, jumlahkan dan kemudian tarik limit jumlah ini apabila tebal kulit tabung makin menipis (menuju nol). Limit ini akan menghasilkan sebuah integral.

$$\Delta V \approx 2\pi . x . f(x) . \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x . f(x) dx$$

Contoh 13.1:

Daerah yang dibatasi oleh kurva y=1/ $\sqrt{x}$, sumbu x, garis x=1 dan garis x=4 diputar mengelilingi sumbu y. tentukan volume benda yang terbentuk.

Penyelesaian:

$$V = 2\pi \int_1^{4V} x \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad = \quad 2\pi \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$V \; = \; 2\pi \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \quad = \; 2\pi \left(\frac{2}{3} .8 - \frac{2}{3} .1 \right) \quad = \; \frac{28\pi}{3} \approx 29{,}32$$

Contoh 13.2:

Daerah yang dilatasi oleh garis y=(r/h)x, sumbu x dan garis x=h diputar mengelilingi sumbu x. diperoleh sebuah kerucut (diandaikan r>0, h>0) tentukan volume kerucut itu dengan menggunakan metode cakram dan metode kulit tabung.

Penyelesaian:

a. Metode Cakram

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^2}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{3h} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

b. Metode Kulit Tabung

$$V = 2\pi h \int_0^r \left(y - \frac{1}{r} y^2 \right) dy = 2\pi h \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{3} \right] = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Contoh 13.3:

Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada kuadran pertama yang terletak diatas parabola $y=x^2$ dan di bawah parabola $y=2-x^2$, diputar mengelilingi sumbu y.

Penyelesaian:

$$V = 4\pi \int_0^1 \left(x - x^3 \right) dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = \pi \approx 3{,}14$$

K. Tugas Kegiatan Belajar 13

Untuk memperluas wawasan Anda tentang kegitan ini, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Dalam soal-soal 1-2, Anda akan mencari volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu yang ditunjukkan. Lakukanlah hal ini dengan mengikuti langkah-langkah berikut :

a. Sketsa daerah R
b. Perlihatkan sebuah irisan persegi panjang umum yang telah diberi pengenal yang sesuai,
c. Tuliskan rumus untuk hampiran volume kulit tabung yang dibentuk oleh irisan ini,
d. Susunlah integral yang berpadanan,
e. Hitunglah Integral ini.

1. $y = \sqrt{x}, x = 5, y = 0$; mengelilingi garis x = 5,
2. $x = y^2, y = 1, x = 0$; mengelilingi sumbu x,
3. Sketsa daerah R yang dibatasi $y = \dfrac{1}{x^3}; x = 1, x = 3, y = 0$. Susunlah (tetapi jangan dihitung) integral-integral untuk masing-masing soal berikut:
   a. Luas R,
   b. Volume benda yang diperoleh apabila R diputar mengelilingi sumbu y,
   c. Volume benda yang diperoleh apabila R diputar mengelilingi y = -1,
   d. Volume benda yang diperoleh apabila R diputar mengelilingi sumbu x = 4,
4. Tentukanlah volume benda yang terbentuk dengan memutar daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva $x = \sqrt{y}$ dan $x = \dfrac{y^3}{32}$ mengelilingi sumbu x.
5. Sebuah lubang bundar dengan jari-jari a dibor melalui pusat sebuah bola pejal berjari-jari b (dianggap b > a). Tentukan volume benda pejal yang tersisa.
6. Gunakan pengintegralan menurut x untuk menentukan panjang ruas garis yang persamaannya $y = 3x + 5$, antara $x = 1$ dan $x = 4$. Cocokkanlah dengan menggunakan rumus jarak.

L. Rangkuman Kegiatan 13

Berdasarkan paparan Kegaitan Belajar 13 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

- **Volume Benda Putar: Kulit Tabung**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= (\text{Luas alas}) \text{ x } (\text{tinggi}) \\
&= \left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right)h \\
&= \pi\left(r_2 + r_1\right)\left(r_2 - r_1\right)h \\
&= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h\left(r_2 - r_1\right)
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= 2\pi \times \left(rerata\ jari - jari\right) \times \left(tinggi\right) \times \left(tebal\right) \\
&= 2\pi \text{ rh } \Delta \text{r}
\end{aligned}
$$

- **Metode Kulit Tabung.**

$$\Delta V \approx 2\pi . x . f(x) . \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x . f(x) dx$$

M. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 13

Dalam soal-soal 23-32, Anda akan mencari volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui diputar mengelilingi sumbu yang ditunjukkan. Lakukanlah hal ini dengan mengikuti langkah-langkah berikut :

a. Sketsa daerah R
b. Perlihatkan sebuah irisan persegi panjang umum yang telah diberi pengenal yang sesuai,
c. Tuliskan rumus untuk hampiran volume kulit tabung yang dibentuk oleh irisan ini,

d. Susunlah integral yang berpadanan,
e. Hitunglah Integral ini.

1. $y = \dfrac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0;$ mengelilingi sumbu y,
2. $y = \sqrt{x}, x = 3, y = 0$;mengelilingi sumbu y,
3. $x = y^2, y = 2, x = 0$; mengelilingi garis y = 2
4. Gunakan pengintegralan menurut x untuk menentukan panjang ruas garis yang persamaannya $y = 3x + 5$, antara $x = 1$ dan $x = 4$. Cocokkanlah dengan menggunakan rumus jarak.
5. Tentukanlah panjang kurva: $y = (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 8$

(skor masing-masing soal adalah 20)

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 13.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\textit{Skor Jawaban Benar}}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali : 90% s/d 100%

Baik : 80% s/d 89%

Cukup : 70% s/d 79%

Kurang : < 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda silahkan melanjutkan ke kegiatan belajar 14. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 13, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai.

N. Uraian Materi (Kegiatan Belajar 14)

Panjang Kurva dan Bidang

Grafik $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, adalah sebuah kurva bidang. Begitu pula grafik $x = y^2$, $-2 \leq y \leq 2$. Kurva merupakan grafik sebuah fungsi, yang pertama berbentuk $y = f(x)$, yang kedua berbentuk $x = g(y)$. Namun kurva spiral tidak cocok dengan pola ini. Demikian pula dengan lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$.

Lingkaran menyarankan cara pemikiran lain tentang kurva. Dalam trigonometri bahwa $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, dapat menguraikan lingkaran. t adalah peubah bebas (parameter). Dapat dikatakan bahwa $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ adalah persamaan parametrik yang menguraikan lingkaran.

Gambar J

Definisi.

Sebuah kurva bidang disebut mulus jika kurva itu ditentukan oleh sepasang persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, dengan f' dan g' ada dan kontinu pada $[a, b]$, dan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak sama-sama bernilai nol pada (a, b).

Panjang kurva mulus yang diberikan secara parameter oleh $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$. Dengan mempartisikan selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian menggunakan titik-titik

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

gagasan kita adalah menghampiri kurva itu dengan garis poligon yang ditunjukkan, *menghitung* panjangnya, kemudian mengambil limit apabila norma partisi mendekati nol.

$$\Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

dengan menggunakan Teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat titik-titik $\bar{t}_i$ dan $\hat{t}_i$ dalam (t_{i-1}, t_i) sehingga,

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

dengan $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Jadi

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i)\Delta t_i]^2 + [g'(\hat{t}_i)\Delta t_i]^2}$$
$$= \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

dan panjang garis poligon adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta w_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\hat{t}_i)]^2}\,\Delta t_i$$

jadi kita dapat mendefinisikan panjang kurva L sebagai limit ekspresi di atas ketika norma partisi mendekati nol, yakni

jika kurva ini diberikan oleh $y = f(x)$ dengan $a \le x \le b$, x sebagai parameter maka

jika kurva ini diberikan oleh $x = g(y)$ dengan $c \le y \le d$, y sebagai parameter maka

Contoh 14.1:

Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Penyelesaian:

Tuliskan persamaan lingkaran $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \le t \le 2\pi$. Jadi,

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t,\ \frac{dy}{dt} = a \cos t,$$

dan menggunakan rumus pertama,

$$L = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\ dt = [at]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

Contoh 14.2:

Cari panjang ruas garis dari *A*(*0,1*) ke *B*(*5,13*)

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa persamaan garis yang berpadanan adalah $y = \frac{12}{5}x + 1$ sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$ dan menurut rumus ketiga

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{\left(\frac{5^2 + 12^2}{5^2}\right)}\, dx = \frac{13}{5}\int_0^5 1\, dx = \left[\frac{13}{5}x\right]_0^5 = 13$$

Contoh 14.3:

Sketsakan grafik kurva yang diberikan secara parametris oleh $x = 2$ cos$t$, $y = 4$ sin t, $0 \leq t \leq \pi$, dan carilah panjangnya.

Penyelesaian:

Panjang L kurva ini diberikan oleh:

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\, dt$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(\sin^2 t + 4\cos^2 t}\ dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\ dt$$

Contoh 14.4:

Carilah panjang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari titik (1, 1) ke titik (4,8)

Penyelesaian:

Kita mulai menaksir panjang ini. Anggap kurva berupa garis lurus.

Maka panjangnya adlah $\sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{58} \approx 5{,}6$

Untuk perhitungan eksak kita perhatikan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ sehingga

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Andaikan $u = 1 + \frac{9}{4}x$ maka $du = \frac{9}{4}dx$ oleh karena itu

$$L = \int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{9}{4}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Jadi

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \frac{13^{\frac{3}{2}}}{8}\right) \approx 7{,}63$$

- **Diferensial Panjang busur**

Andaikan f fungsinyang terdiferensialkan secara kontinu pada [*a, b*]. Untuk masing-masing x dalam (*a, b*), didefinisikan *s*(*x*) dengan

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du \text{ maka}$$

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Diferensial panjang busur:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Kenyataannya bagaimana cara grafik diparameterkan, diantar ke tiga rumus *ds* yakni:

$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

Ketiga bentuk rumus di atas timbul dari pembagian dan kemudian perkalian ruas kanan masing-masing dengan $(dx)^2$, $(dy)^2$, dan $(dt)^2$. Misalnya

$$(ds)^2 = \left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](dx)^2$$

O. Tugas Kegiatan Belajar 14

Untuk memperluas wawasan Anda tentang kegitan ini, carilah dan bacalah sumber-sumber pustaka yang memuat tentang materi tersebut.

Dalam soal 1 dan soal 3, gambarlah grafik fungsi dan tentukan panjangnya.

1. $x = t^3, y = t^2; 0 \le t \le 4$;
2. $x = 3\sin t, y = 3\cos t - 3;\ 0 \le t \le 2\pi$,
3. Gambarlah grafik hiposikloid yang bertanduk empat dengan persamaan $x = a\sin^3 t, y = a\cos^3 t, 0 \le t \le 2\pi$ Tentukan panjangnya.

   (Petunjuk soal nomor 3: Mengingat sifat kesimetrian, cukuplah dihitung panjang kurva yang terletak dalam kuadran pertama. Kemudian kalikanlah hasil pengintegralan itu dengan empat)

D. Rangkuman Kegiatan 14

Berdasarkan paparan Kegaitan Belajar 14 ini maka garis besar bahan yang dibahas adalah

> **Definisi.**
>
> Sebuah kurva bidang disebut mulus jika kurva itu ditentukan oleh sepasang persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, dengan f' dan g' ada dan kontinu pada $[a, b]$, dan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak sama-sama bernilai nol pada (a, b).

Mendefinisikan panjang kurva L sebagai limit ekspresi di atas ketika norma partisi mendekati nol, yaknjika kurva ini diberikan oleh $y = f(x)$ dengan $a \leq x \leq b$, x sebagai parameter maka

jika kurva ini diberikan oleh $x = g(y)$ dengan $c \leq y \leq d$, y sebagai parameter maka

E. Penilaian/Tes Formatif Kegiatan Belajar 14

Dalam soal 1 dan soal 3, Tentukanlah panjang kurva:

1. $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ antara $x = \frac{1}{3}$ dan $x = 7$ …..Skor 30
2. $y = (4 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ dan $x = 8$ …..Skor 30
3. $x = \frac{y^4}{16} + \frac{1}{2y^2}$ antara $y = -2$ dan $y = -1$. …..Skor 40

Petunjuk: perhatikantanda: $\sqrt{u^2} = -u$ apabila $u < 0$

Perkirakan Skor yang Anda, selanjutnya gunakan kreteria berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi kegiatan belajar 14.

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{Skor\ \ Jawaban\ \ Benar}{100} \times 100\%$$

Tingkat penguasaan Anda dikelompokkan menjadi

Baik Sekali	:	90% s/d 100%
Baik	:	80% s/d 89%
Cukup	:	70% s/d 79%
Kurang	:	< 70%

Apabila Anda mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, maka Anda telah berhasil menyelesaikan Bahan Ajar ini. Namun jika penguasaan Anda kurang dari 80% maka sebaiknya Anda mengulangi materi kegiatan belajar 14, terutama pada bagian-bagian yang belum dikuasai

R. Rujukan

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara.*

Anton, H., 1995, *Calculus with Analitic Geometry,* John Wiley & Son, New York.

S. Bacaan Yang Di Anjurkan

Lethold, L (1989). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* (terjemahan Hutahaean, dkk). Jilid 1, Edisi V, Jakarta:Erlangga

DAFTAR PUSTAKA

E.J. Purcell dan Verberg (1986) (terjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc) *Kalkulus, Jilid I, Edisi ketujuh, Jakarta: Interaksara*.

Anton, H., 1995, Calculus with Analitic Geometry, John Wiley & Son, New York.

Edwards, C.H. dan Penney, D.E., 1998, Calculus with Analitic Geometry, Prentice Hall, Upper Saddle River.

DAFTAR ISTILAH

$A_x(f(x))$	Anti Turunan fungsi f(x)
D_x	Differensial terhadap x
dx	Differensial dari x
$\int ......dx$	Integral tak tentu terhadap x
$\sum$	Sigma
$A(R_n)$	Luas menurut Poligon Dalam
$A(S_n)$	Luas menurut Poligon Dalam
R_p	Jumlah Riemann
Δx_i	Titik Sampel Selang ke-i
$\overline{x_i}$	Titik sampel selang ke-i
$f\left(\overline{x_i}\right)$	Bagian Panjang Poligon ke-i
F(a)	Sebarang Anti turunan dari batas atas atau batas bawah suatu integral tentu
$\lim\limits_{\|p\|\to 0}$	Limit Norma P menuju ke nol
$\|p\|$	Norma P

$\int_a^b f(x)\,dx$	Integral tentu
$A(R)$	Luas Daerah Bidang A
ΔV	Volume tipis Kulit Tabung

BIODATA PENULIS

Lalu Sucipto lahir pada tanggal 22 Juni 1981 di dusun Bajok Desa Kopang Rembige Kecamatan Kopang Kabupaten Lombok Tengah Nusa Tenggara Barat. Anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak H. Lalu Durahman (Almarhum) dan Ibu Hj. Baiq Hasanah.

Pendidikan formal diawali lulus SDN 3 Kopang lulus tahun 1993, kemudian lulus SMPN 1 Kopang tahun 1996 dan lulus SMUN 1 Kopang tahun 1999. Melanjutkan pendidikan ke IKIP Mataram mengambil Jurusan Pendidikan Matematika, lulus dan mendapat gelar Sarjana Pendidikan (S.Pd) pada Agustus 2003. Melanjutkan pendidikan Pasca Sarjana ke Universitas Negeri Malang (UM) mengambil Jurusan Pendidikan Matematika, lulus dan mendapat gelar Master Pendidikan pada 2009. Mulai menjadi tenaga pengajar/Dosen Tetap di Universitas Islam Negeri Mataram (dahulu IAIN Mataram) sejak tahun 2009.