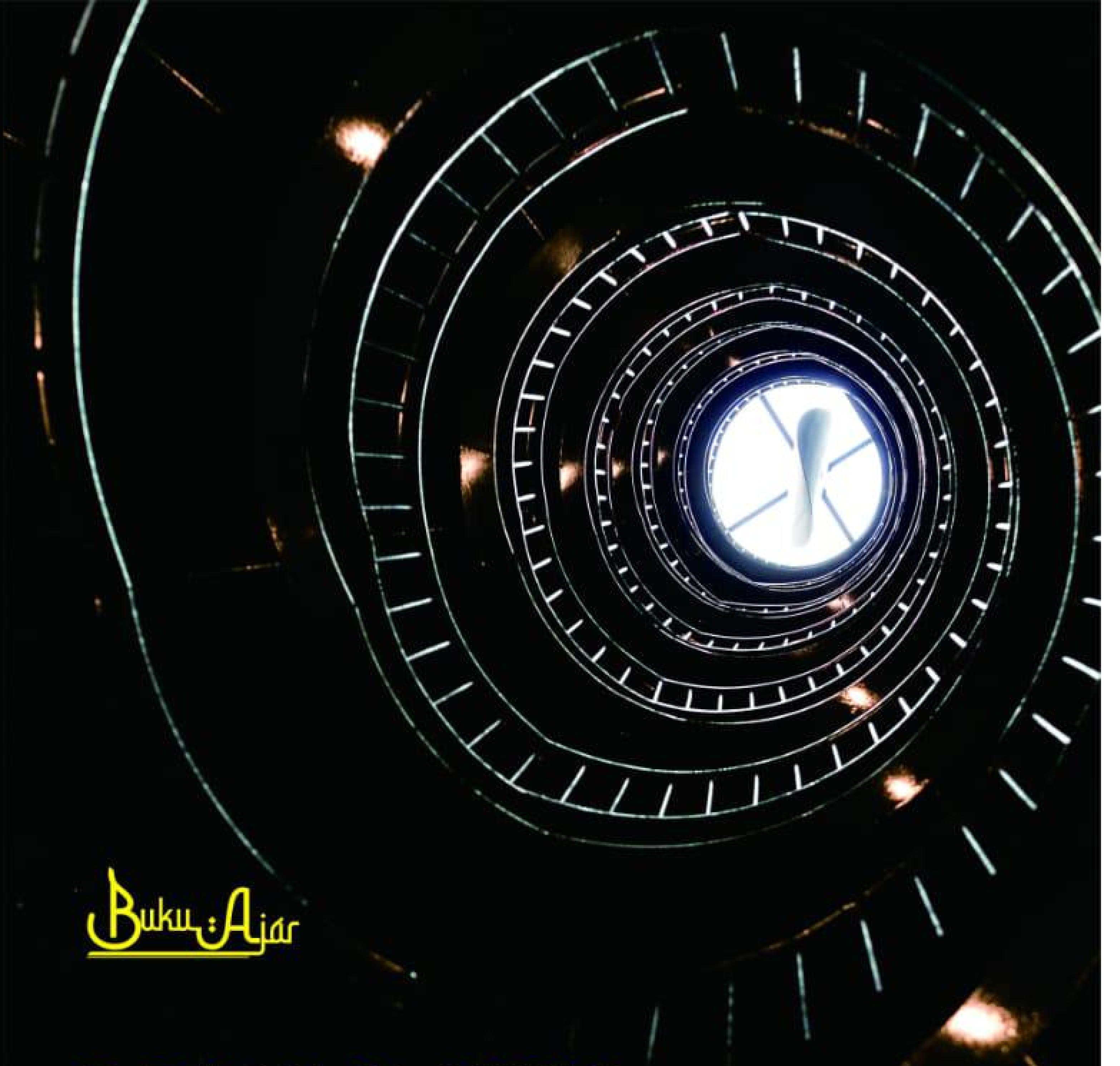


Buku Ajar

Dr. Parhaini Andriani, M.Pd, Si.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Parhaini Andriani, M.Pd, Si.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Parhaini Andriani, M.Pd, Si.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Sanabil

Kalkulus Peubah Banyak

Penulis : Dr. Parhaini Andriani, M.Pd, Si.
Editor : Dr. Alkusaeri, M.Pd.
Layout : Tim FTK
Desain Cover : Sanabil Creative

ISBN : 978-623-317-032-1
Cetakan 1 : November 2020

Penerbit:
Sanabil
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. 0370- 7505946, Mobile: 081-805311362
Email: sanabilpublishing@gmail.com
www.sanabil.web.id

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

KATA PENGANTAR DEKAN

Alhamdulillah, segala puji hanya milik Allah SWT. Shalawat & Salam semoga senantiasa terlimpah pada teladan agung Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga, sahabat dan pengikutnya sampai hari kebangkitan kelak. Berkat rahmat dan hidayah Allah SWT, program penulisan buku ajar dan referensi telah dapat dirampungkan.

Kewajiban dosen untuk menulis dan memproduksi buku, baik buku ajar maupun buku referensi sejatinya sudah diatur dalam UU Nomor 12 tahun 2012 tentang perguruan tinggi dan UU Nomor 14 tahun 2005 tentang Guru dan Dosen dan sejumlah regulasi lainnya. Pasal 12 UU No.12 tahun 2012 dengan tegas menyebutkan bahwa dosen secara perseorangan atau kelompok wajib menulis buku ajar atau buku teks yang diterbitkan oleh perguruan tinggi sebagai salah satu sumber belajar.

Kompetisi Buku Ajar dan Referensi (KOBAR) Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram tahun 2020 adalah upaya Fakultas untuk berkontribusi dalam impelementasi undang-undang di atas, dimana secara kuantitatif, grafik riset dan publikasi dosen PTKI masih harus terus ditingkatkan. Tujuan lainnya adalah meningkatkan mutu pembelajaran dengan mewujudkan suasana akademik yang kondusif dan proses pembelajaran yang efektif, efisien dengan kemudahan akses sumber belajar bagi dosen dan mahasiswa. Publikasi ini juga diharapkan men-*support* peningkatan karir dosen dalam konteks kenaikan jabatan fungsional dosen yang ujungnya berdampak pada peningkatan status dan peringkat akreditasi program studi dan perguruan tinggi.

Secara bertahap, Fakultas terus berikhtiar meningkatkan kuantitas dan kualitas penerbitan buku. Pada tahun 2019 berjumlah 10 judul buku dan meningkat cukup signifikan tahun 2020 menjadi 100 judul yang terdistribusi dalam 50 judul buku ajar dan 50 judul buku referensi. Ikhtiar Fakultas tidak berhenti pada level publikasi, namun berlanjut pada pendaftaran Hak Kekayaan Intelektual (HKI) dosen di Direktorat Jenderal Kekayaan Intelektual (DJKI) Kementerian Hukum dan Hak Asasi Manusia RI, sehingga tahun 2020 menghasilkan 100 HKI dosen.

Kompetisi buku ajar dan referensi tahun 2020 berorientasi interkoneksi-integrasi antara agama dan sains, berspirit Horizon Ilmu

UIN Mataram dengan inter-multi-transdisiplin ilmu yang mendialogkan metode dalam *Islamic studies* konvensional berkarakteristik deduktif-normatif-teologis dengan metode *humanities studies* kontemporer seperti sosiologi, antropologi, psikologi, ekonomi, hermeneutik, fenomenologi dan juga dengan metode ilmu eksakta (*natural scincies*) yang berkarakter induktif-rasional. Dari 100 judul buku, terdapat 10 judul tematik yang menjawab problem epistimologis pendidikan Islam, terutama terkait misi Kementerian Agama RI seperti moderasi Islam (Islam *washathiyah*), pendidikan inklusi, pendidikan anti korupsi, pendidikan karakter, pendidikan multikultural, etno-pedagogik, pembelajaran DARING (dalam jaringan), pendidikan & isu gender, ragam pesantren (pesisir, enterprenuer), dan tema teraktual yaitu merdeka belajar dan kampus merdeka.

Mewakili Fakultas, saya berterima kasih atas kebijakan dan dukungan Rektor UIN Mataram Prof. Dr. H Mutawali, M.Ag dan jajarannya, kepada 100 penulis yang telah berkontribusi dalam tahapan kompetisi buku tahun 2020, dan tak terlupakan juga editor dari dosen sebidang dan penerbit yang tanpa sentuhan *zauq*nya, *perfomance* buku tak akan semenarik ini. Tak ada gading yang tak retak; tentu masih ada kurang, baik dari substansi maupun teknis penulisan, di 'ruang' inilah kami harapkan saran kritis dari khalayak pembaca. Semoga agenda ini menjadi *amal jariyah* dan hadirkan keberkahan bagi sivitas akademika UIN Mataram dan ummat pada umumnya.

Mataram, 29 Oktober 2020 M
12 Rabi'ul Awal 1442 H

Dekan

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MATARAM
REPUBLIK INDONESIA

Dr. Hj. Lubna, M.Pd.
NIP. 196812311993032008

PRAKATA PENULIS

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah Swt. atas segala karunia dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini sebagaimana mestinya. Buku ajar ini disusun agar dapat membantu mahasiswa dalam mempelajari konsep-konsep kalkulus peubah banyak secara mudah dan praktis.

Secara umum, buku ini membahas tentang Turunan dan Integral pada fungsi dua peubah atau lebih berserta penerapannya. Pada bab awal dikenalkan tentang geometri pada ruang berdimensi tiga, karena setiap pembahasan topiknya memuat analisis secara geometris. Buku ini dirancang agar sesuai dengan kebutuhan perkuliahan, dilengkapi Rencana Perkuliahan Semester (RPS) untuk 14 kegiatan belajar (tatap muka) sehingga lebih praktis jika digunakan oleh dosen maupun mahasiswa. Pada masing-masing kegiatan belajar memuat uraian materi, rangkuman, latihan, dan kunci jawaban. Buku ajar ini diharapkan dapat menjadi rujukan belajar bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah kalkulus peubah banyak.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada seluruh pihak yang membantu hingga terbitnya buku ini, terutama kepada Dr. Hj. Lubna, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) UIN Mataram beserta jajaran pimpinan di FTK UIN Mataram yang menginisiasi penyusunan hingga terbitnya buku ini, dan kepada seluruh keluarga, terutama kepada Afipuddin sebagai suami yang tak henti-hentinya terus mendorong dan memotivasi penulis untuk menyelesaikan buku ini serta tentunya kepada Ibunda Hj. Baq Farihun yang terus berdoa dan memberi dukungan secara moril. Penulis mendedikasikan buku ini kepada Ayahanda Alm. H. M. Baharuddin, semoga kebermanfaatan buku ini bisa menjadi ladang amal bagi beliau.

Penulis sadar, buku ini masih jauh dari sempurna, sehingga saran dan masukan sangat diharapkan demi kesempurnaan buku ini. Terakhir, penulis berharap semoga buku ini bermanfaat bagi para pembaca.

Mataram, 29 Oktober 2020
Penulis

Parhaini Andriani

RENCANA PEMBELAJARAN SEMSTER (RPS)

Mata Kuliah : Kalkulus Peubah Banyak
Semeter : III
Bobot : 3 SKS

Capaian Pembelajaran Lulusan (CPL)

1. Mampu menyelesaikan masalah pembelajaran dengan memanfaatkan teknologi/aplikasi matematika untuk meningkatkan mutu pembelajaran matematika dan untuk keperluan studi lanjut.
2. Menguasai konsep dan prinsip ilmu matematika yang diperlukan untuk pembelajaran matematika pada satuan pendidikan dasar dan menengah.
3. Menguasai konsep dan prinsip matematika yang diperlukan untuk studi kejenjang berikutnya.
4. Menguasai konsep dan prinsip penggunaan aplikasi matematika untuk pengembangan teknologi pembelajaran matematika dan untuk keperluan studi lanjut.
5. Menguasai konsep dan prinsip ilmu matematika secara umum.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)

1. Mampu menguasai konsep teoritis dari materi kalkulus peubah banyak.
2. Mampu mengaplikasikan materi kalkulus peubah banyak dalam kehidupan sehari-hari.
3. Mampu mengintegrasikan materi-materi kalkulus peubah banyak ke dalam teknologi informasi dan komunikasi (TIK).
4. Mampu bertanggung jawab secara individu maupun kelompok atas tugas-tugas yang diberikan untuk menguasai materi yang telah diberikan.

Deskripsi Mata Kuliah

Mata kuliah ini membahas tentang turunan dan integral pada fungsi dua peubah atau lebih serta penerapannya pada beberapa permasalahan.

Tahapan Perkuliahan

Kegiatan Belajar	Kemampuan Akhir Tiap Tahap Pembelajaran (Kompetensi Dasar)	Bahan Kajian (Materi)
1	Mahasiswa mampu Membuat plot bidang permukaan yang sederhana pada sistem koordinat kartesius pada ruang berdimensi tiga	Koordinat kartesius dalam ruang dimensi 3
2	Mahasiswa mampu melakukan operasi-operasi pada vektor dalam ruang	Vektor pada ruang berdimensi 3
3	Mahasiswa mampu menentukan persamaan garis dan bidang pada ruang serta mampu mengidentifikasi bentuk kurva sebuah fungsi dengan dua peubah atau lebih.	a. Persamaan Garis pada ruang dimensi 3 b. Persamaan bidang pada ruang dimensi 3 c. Permukaan silindrik dan parabolik
4	Mahasiswa mampu mengidentifikasi domain dan range fungsi dua peubah atau lebih; Menentukan limit fungsi dua peubah atau lebih; serta mampu mengidentifikasi kontinuitas fungsi dua peubah atau lebih	a. Fungsi dua peubah atau lebih b. Limit dan kontinuitas
5	Mahasiswa mampu menentukan turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih	Turunan Parsial
6	Mahasiswa mampu menentukan bidang singgung fungsi dua peubah atau lebih; serta dapat menentukan turunan berarah dan vektor gradien	a. Bidang singgung dan aproksimasi b. Turunan berarah dan vektor gradien
7	Mahasiswa mampu menggunakan aturan rantai untuk mencari turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih	Aturan rantai

8	Mahasiswa mampu menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi dua peubah atau lebih; serta dapat menggunakan Metode Lagrange menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi dua peubah atau lebih	Penerapan Turunan Parsial: a. Maksimum dan Minimum b. Metode Lagrange
9	Mahasiswa mampu menentukan integral lipat dua pada daerah persegi panjang, serta dapat menentukan integral berulang	a. integral lipat dua pada daerah persegi panjang b. Integral berulang
10	Mahasiswa mampu menentukan integral lipat dua pada daerah bukan persegi panjang; serta dapat mengkonversi integral dua lipat pada koordinat kartesius ke koordinat polar	a. integral lipat dua pada daerah bukan persegi panjang b. integral lipat dua pada koordinat polar
11	Mahasiswa mampu menentukan integral dua lipat tiga pada koordinat kartesius	Integral lipat tiga pada koordinat kartesius
12	Mahasiswa mampu menentukan integral dua lipat tiga pada koordinat silinder	Integral lipat tiga pada koordinat Silinder
13	Mahasiswa mampu menentukan integral dua lipat tiga pada koordinat bola	Integral lipat tiga pada koordinat Bola
14	Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahn terkait penerapan integral lipat	Penerapan integral lipat a. Pusat Massa b. Memon Inersia c. Luas Permukaan

BAB I
GEOMETRI PADA RUANG

A. PENDAHULUAN

Pada saat membahas kalkulus untuk fungsi satu peubah, fungsi digambarkan pada bidang berdimensi dua. Sedangkan pada kalkulus peubah banyak, grafik fungsi digambarkan dalam ruang berdimensi tiga atau pada kasus tertentu menuju pada dimensi-*n*.

Bab ini akan dikenalkan vektor dan sistem koordinat pada ruang berdimensi tiga. Hal ini perlu dipelajari sebelum masuk ke bagian utama pembahasan tentang kalkulus peubah banyak. Bab ini membahas tentang konsep geometri pada ruang yang terdiri dari koordinat kartesius, vektor, garis, kurva dan permukaan pada ruang berdimensi 3, koordinat silinder dan koordinat bola.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu:

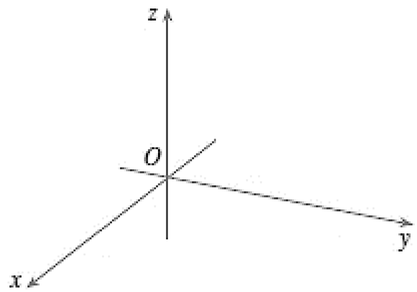
- Membuat plot bidang permukaan yang sederhana pada sistem koordinat kartesius pada ruang berdimensi tiga
- Melakukan operasi-operasi pada vektor dalam ruang
- Menentukan persamaan garis dan kurva pada ruang
- Menentukan persamaan permukaan pada ruang
- Mengidentifikasi bentuk kurva sebuah fungsi dengan dua peubah atau lebih

B. KEGIATAN BELAJAR 1

1. URAIAN MATERI

Koordinat Kartesius dalam ruang dimensi 3

Penentuan posisi sebuah titik dalam sebuah bidang 2 dimensi, memerlukan pasangan berurutan dua bilangan real (a, b), dimana a menunjukkan posisi pada koordinat-x dan b pada koordinat-y. Sedangkan suatu titik dalam ruang berdimensi 3, diperlukan tiga bilangan. Titik pada ruang direpresentasikan dalam pasangan berurutan tiga bilangan real (a, b, c).

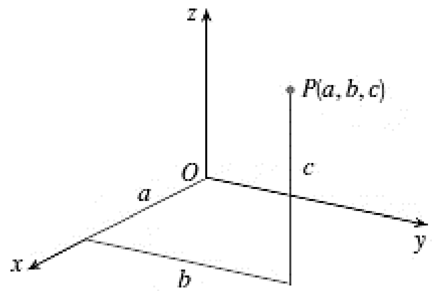


Gambar 1.1 Sumbu koordinat di $\mathbb{R}^3$

Untuk merepresentasikan titik-titik dalam ruang, pertama-tama kita memilih satu titik tetap *O* (titik awal) dan tiga garis yang saling tegak lurus, yang disebut sumbu koordinat dan diberi label sumbu-*x*, sumbu-*y* dan sumbu-*z*. Biasanya kita menganggap sumbu-*x* dan sumbu-*y* berada pada bidang horizontal dan sumbu-*z* pada bidang vertikal, dan kita menggambar orientasi sumbu-sumbu tersebut seperti pada Gambar 1.1 Arah sumbu-z ditentukan oleh kaidah tangan. Jari-jari tangan kanan dikepal sedemikian rupa sehingga jari-jari tangan tersebut membentuk kurva dari sumbu-*x* positif ke sumbu-*y* positif, sedangkan jempol mengarah ke sumbu-*z* positif.

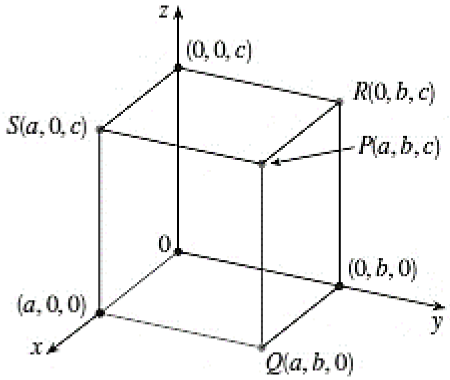
Tiga sumbu koordinat menentukan tiga bidang koordinat. Bidang-*xy* adalah bidang yang terdiri dari sumbu-*x* dan sumbu-*y*, bidang-*yz* terdiri dari sumbu-*y* dan sumbu-*z*, dan bidang-*xy* terdiri dari sumbu-*x* dan sumbu-*z*. Ketiga bidang koordinat ini membagi ruang menjadi delapan bagian, yang disebut oktan. Oktan pertama, di latar depan, ditentukan oleh sumbu positif.

Misalkan *P* adalah sembarang titik di ruang, *a* adalah jarak bidang-*yz* ke *P*, *b* adalah jarak bidang-*xy* ke titik *P* dan *c* adalah jarak bidang-*xy* ke titik *P*. Kita merepresentasikan titik *P* sebagai pasangan berurutan bilangan real (*a*, *b*, *c*) dan kita sebut *a*, *b*, dan *c* sebagai koordinat titik *P*. Jadi, untuk menentukan posisi titik *P*, kita mulai dari titik awal *O* dan memindahkan *a* satuan sepanjang sumbu-*a*, lalu *b* satuan sejajar dengan sumbu-*y*, dan *c* satuan sejajar dengan sumbu-z seperti pada Gambar 1 2.



Gambar 1.2. Posisi titik *P* pada sumbu koordinat

Titik *P* ditentukan oleh kotak persegi panjang seperti pada Gambar 1.3. Jika kita meletakkan secara tegak lurus dari *P* ke bidang-*xy*, kita mendapatkan titik *Q* dengan koordinat (*a*, *b*, 0) yang disebut proyeksi titik *P* ke bidang-*xy*. Demikian pula, dengan *R*(0, *b*, *c*) dan *S*(*a*, 0, *c*) merupakan proyeksi titik *P ke* bidang-yz dan bidang-xz.



Gambar 1.3. Posisi titik *P* pada kotak persegi panjang

Definisi secara formal sistem koordinat kartesius pada ruang berdimensi 3 adalah *Cartesian Product* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan himpunan pasangan berurutan tiga bilangan riil dan dinotasikan $\mathbb{R}^3$. Kita telah peroleh korespondensi satu-satu antara titik *P* pada ruang dan pasngan berurutan (a,b,c) di $\mathbb{R}^3$ yang dinamakan dengan **sistem koordinat persegipanjang tiga dimensi** (*three-dimensional rectangular coordinat system*).

<u>Contoh 1.</u>

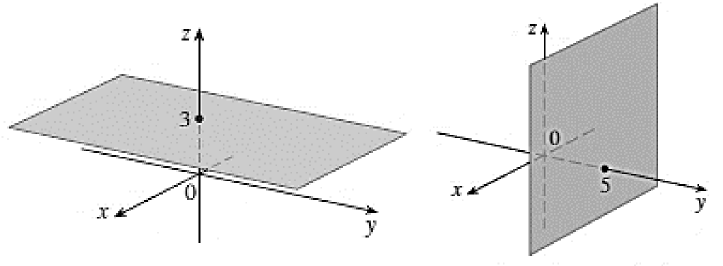
Plot di $\mathbb{R}^3$ grafik yang merepresentasikan fungsi berikut:

a. $z = 3$
b. $y = 5$

Penyelesaian:

a. Persamaan $z = 3$ merepresentasikan himpunan $\{(x, y, z)|z = 3\}$ yang merupakan himpunan seluruh titik-titik di $\mathbb{R}^3$ yang koordinat-*z* nya adalah 3. Grafiknya adalah bidang horizontal yang sejajar dengan bidang-*xy* dan 3 satuan di atasnya sebagaimana dalam Gambar 1.4(a).

b. Persamaan $y = 5$ merepresentasikan himpunan seluruh titik di $\mathbb{R}^3$ yang koordinat-*y* nya adalah 5. Grafiknya adalah bidang vertikal yang sejajar dengan bidang-*xz* dan 5 satuan di atas nya sebagaimana dalam Gambar 1.4(b).



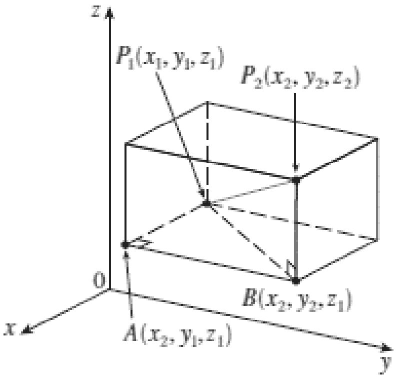
Gambar 1.4(a). $z = 3$ di $\mathbb{R}^3$ 1.4(b). $y = 5$ di $\mathbb{R}^3$

Gambar 1.4 Plot $z = 3$ dan $y = 5$ di $\mathbb{R}^3$

Rumus Jarak

Tinjaulah sebuah kotak persegi panjang sebagaimana pada Gambar 1.5, dimana P_1 dan P_2 adalah titik puncak yang saling berlawanan dan bidang kotak sejajar dengan bidang-bidang koordinat.
Jika $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik puncak dari kotak sebagaimana ditunjukkan pada gambar, maka:

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1|$$
$$|BP_2| = |z_2 - z_1|$$



Gambar 1.5 Jarak 2 titik pada koordinat persegi panjang

Karena segitiga P_1BP_2 dan P_1AB keduanya siku-siku, maka berlaku Teorema Pythagoras sebagi berikut:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

dan $$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Dengan mengkombinasikan kedua persamaan tersebut diperoleh:

$$\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\
&= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\
|P_1P_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh **rumus jarak dalam ruang dimensi tiga** adalah sebagai berikut:

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Contoh 2

Tentukan jarak antara titik $P(2,-1,7)$ dan titik $Q(1,-3,5)$.

Penyelesaian:

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1))^2 + (5-7)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

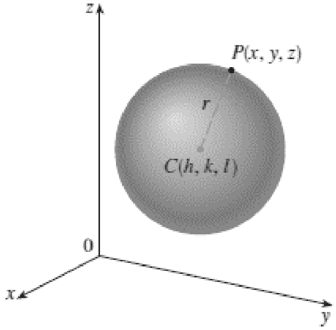
Bola dan Persamaannya

Berdasarkan definisi, bola adalah himpunan semua titik-titik *P*(*x*, *y*, *z*) yang memiliki arak yang sama *C* yaitu *r* sebagaimana dalam Gambar 1.6. Maka titik P berada pada permukaan bola jika dan hanya jika $|PC| = r.$ Dengan mengkuadratkan kedua sisi didapat:

$$|PC|^2 = r^2$$

Sehingga didapat rumus persamaan bola adalah

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2}$$



Gambar 1.6 Posisi titik pada bola

<u>Contoh 3</u>

Tunjukkan $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ adalah bola dan tentukan titik pusat dan jar-jarinya.

Penyelesaian:

Kita dapat menulis ulang persamaan yang diberikan ke dalam bentuk persamaan bola jika kita menyelesaikan kuadrat sempurna.

$$(x^2 + 4x + \quad) + (y^2 - 6y + \quad) + (z^2 + 2z + \quad) = -6$$
$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = 8$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Jadi persamaan tersebut merepresentasikan sebuah bola dengan pusat (-2, 3, -1) dengan jari-jari $\sqrt{8}$.

Rumus Titik Tengah

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik-titik ujung suatu ruas garis, maka titik tengah $M(m_1, m_2, m_3)$ mempunyai koordinat

$$\boxed{m_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad m_2 = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad m_3 = \frac{z_1+z_2}{2}}$$

2. RANGKUMAN

a. Definisi secara formal sistem koordinat kartesius pada ruang berdimensi 3 adalah *Cartesian Product* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan himpunan pasangan berurutan tiga bilangan riil dan dinotasikan $\mathbb{R}^3$

b. Rumus jarak dalam ruang dimensi tiga adalah
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

c. Rumus persamaan bola
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

d. Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah titik-titik ujung suatu ruas garis, maka titik tengah $M(m_1, m_2, m_3)$ mempunyai koordinat
$$m_1 = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad m_2 = \frac{y_1+y_2}{2} \qquad m_3 = \frac{z_1+z_2}{2}$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

Plotlah titik-titik berikut pada satu sistem koordinat pada ruang

1. (1, -1, 2); (2, 4, 6); (0, 5, 2); (4, 0, -1)
2. (2, 0, 1); (-2, 4, 5); (0, 3, 0); (-1, -2, -3)

3. Manakah titik A(-4, 0, -1), B(3, 1, -5) dan C(2, 4, 6) yang paling dekat dengan bidang-*yz*? Titik mana yang terletak pada bidang-*xz*?
4. Bagaimana persamaan x = 4 direpresentasikan pada $\mathbb{R}^2$? direpresentasikan pada $\mathbb{R}^3$? Ilustrasikan dalam bentuk gambar.

Tentukan panjang sisi segitiga *PQR*, dan tentukan apakah segitiga tersebut termasuk segitiga siku-siku atau segitiga sama kaki.

5. P(-2, 4, 0), Q(1, 2, -1), R(-1, 1, 2)
6. P(2, -1, 0), Q(4, 1,1), R(4, -5, 4)

Tulislah persamaan bola dengan pusat dan jari-jari berikut

7. (-2, -3, -6); $\sqrt{5}$
8. $\left(\pi, e, \sqrt{2}\right); \sqrt{\pi}$

Lengkapi persamaan kuadrat berikut untuk menentukan jari-jari dan pusat bola

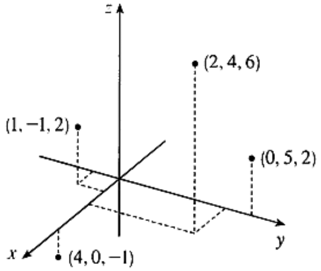
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 14y - 8z + 1 = 0$
10. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 16z - 13 = 0$

11. Tentukan persamaan bola dimana ruas garis yang menghubungkan (-2, 3, 6) dan (4, -1 5) merupakan diameternya
12. Tentukan persamaan sebuah bola jika salah satu diameternya memiliki titik pangkal (2, 1, 4) dan (4, 3, 10).
13. Tentukan persamaan bola yang menyinggung tiga bidang koordinat jika jari-jarinya adalah 6 dan pusatnya berada di oktan pertama
14. Tentukan persamaan bola dengan pusat (2, -3, 6) yang menyentuh
    a. Bidang-*xy*
    b. Bidang-*yz*
    c. Bidang-*xz*

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah jawaban untuk soal-soal bernomor ganjil

1.



3. C(2, 4, 6); A(-4, 0, -1)
5. Karena $|PQ| = \sqrt{14}, |QR| = \sqrt{14}$ dan $|PR| = \sqrt{14}$, maka segitiga PQR sama sisi.
7. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 5$
9. (6, -7, 4); 10
11. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$
13. $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 36$

B. KEGIATAN BELAJAR 2

1. URAIAN MATERI

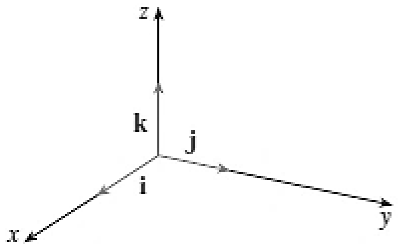
Vektor dalam ruang dimensi 3

Istilah vektor digunakan oleh para ilmuwan untuk menunjukkan besaran (seperti perpindahan atau kecepatan atau gaya) yang memiliki besaran dan arah. Vektor sering diwakili oleh panah atau ruas garis berarah. Panjang panah mewakili besarnya vektor dan panah menunjuk ke arah vektor. Notasi vektor biasanya berupa huruf yang ditebalkan (**a**) atau huruf dengan tanda panah di atasnya ($\vec{a}$).

Konsep vektor pada dalam ruang hampir sama dengan vektor pada bidang. Perbedaannya, pada vektor ruang memiliki tiga komponen. Misalnya vektor **a** dinyatakan

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Dimana, $\mathbf{i} = \langle 1,0,0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0,1,0 \rangle$, dan $\mathbf{k} = \langle 0,0,1 \rangle$ adalah vektor-vektor satuan standar yang disebut **vektor basis**, yang memiliki orientasi ke arah sumbu koordinat positif (Gambar 1.7).



Gambar 1.7 Vektor basis standar

Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ maka kita dapat menulis

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0{,}0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0{,}0, a_3 \rangle \\ &= a_1\langle 1,0,0 \rangle + a_2\langle 0,1,0 \rangle + a_3\langle 0,0,1 \rangle \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

Panjang vektor **a**, dinotasikan $|\mathbf{a}|$ dinyatakan dengan

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Pada dimensi tiga, vektor $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ adalah vektor posisi dari titik P(a_1, a_2, a_3).

Misalkan diberikan titik $A(x_1, y_1, z_1)$ dan titik $B(x_2, y_2, z_2)$, maka vektor **a** dengan representasi $\overrightarrow{AB}$ adalah

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

Vektor-vektor pada ruang dapat dijumlahkan, dikalikan dengan skalar dan dikurangkan sebagaimana pada vektor bidang, dan hukum-hukum aljabar yang diterapkan sesuai dengan kaidah-kaidah sebelumnya pada vektor bidang.

Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, maka

Penjumlahan vektor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

Pengurangan vektor

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

Perkalian vektor dengan skalar

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

Contoh 1

Diketahui $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$. Tentukan

a. $|\mathbf{a}|$
b. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
c. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
d. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$

Penyelesaian

a. $|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
b. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4 - 2, 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2,1,8 \rangle$
c. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4 + 2, 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$
d. $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle$
$= \langle 8, 0, 3 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle$

Hasil kali titik (*dot product*)

Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, maka hasil kali titik vektor **a** dan **b** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

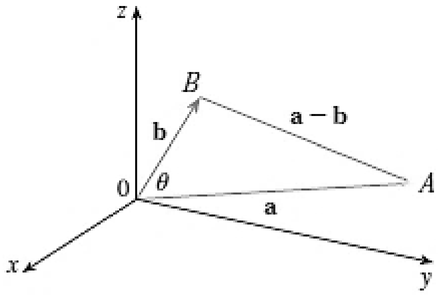
Jadi, untuk mencari perkalian titik dari vektor **a** dan **b**, kita mengalikan komponen yang bersesuaian dan menjumlahkannya. Hasilnya bukan vektor, tapi berupa bilangan real, yaitu skalar. Karena alasan ini, perkalian titik terkadang disebut perkalian skalar (*inner product*).

Contoh 2

$$\langle -1,7,4\rangle \cdot \langle 6,2,-\tfrac{1}{2}\rangle = (-1)(6) + (7)(2) + (4)\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= -6 + 14 - 2 = 6$$

$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = (1)(0) + (2)(2) + (-3)(-1) = 7$

Perkalian titik pada vektor **a** dan **b** dapat memberikan interpretasi geometris dari **sudut θ antara a dan b**, yang didefinisikan sebagai sudut antara representasi dari **a** dan **b** yang dimulai dari titik asal, dimana $0 \leq \theta \leq \pi$. Dengan kata lain, θ adalah sudut antara segmen garis $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ pada Gambar 1.8. Perhatikan bahwa jika **a** dan **b** adalah vektor paralel, maka $\theta = 0$ atau $\theta = \pi$.



Gambar 1.8. Vektor **a** – **b**

Teorema 1

Jika θ adalah sudut antara vektor **a** dan **b**, maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

Bukti

Jika kita menerapkan aturan kosinus pada segitiha OAB, maka didapatkan:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,|OA|\,|OB|\cos\theta$$

Karena $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ dan $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ maka diperoleh persamaan

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

Kita dapat menuliskan sisi kiri sebagai berikut

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

Kedua ruas dibagi (-2) diperoleh

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \qquad \blacksquare$$

Contoh 3

Tentukanlah sudut antara $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$

Penyelesaian

Karena

$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$

Dan karena

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(5) + (2)(-3) + (-1)(2) = 2$$

Sehingga diperoleh

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Dengan demikian sudut antara **a** dan **b** adalah

$$\theta = 84^\circ$$

Dua vektor nonzero **a** dan **b** dikatakan tegak lurus atau ortogonal jika sudut antaranya adalah $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sehingga dari Teorema 1 diperoleh

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Dan sebaliknya jika $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ maka cos θ = 0, jadi $\theta = \frac{\pi}{2}$. Vektor nol **0** dianggap tegak lurus terhadap semua vektor. Oleh karena itu metode berikut dapat digunakan untuk menentukan apakah dua vektor ortogonal atau tidak.

Dua vektor **a** dan **b** tegak lurus atau ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

<u>Contoh 4</u>

Tunjukkan bahwa vektor 2**i** + 2**j** – **k** tegak lurus dengan vektor 5**i** – 4**j** + 2**k**.

<u>Penyelesaian</u>

Karena

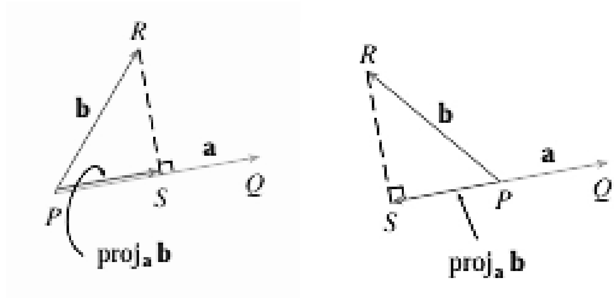
(2**i** + 2**j** – **k**) · (5**i** – 4**j** + 2**k)** = (2)(5) + (2)(-4) + (-1)(2)

= 10 – 8 – 2 = 0

Maka terbukti bahwa kedua vektor tersebut tegak lurus.

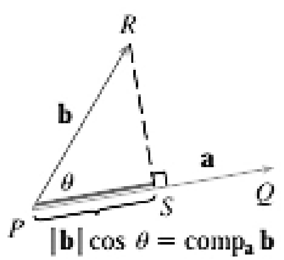
Proyeksi

Pada Gambar 1.9 menunjukkan representasi $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$ sebagai dua vektor **a** dan **b** yang memiliki titik awal yang sama yaitu *P*. Jika S adalah perpotongan tegak lurus dari R ke garis yang memuat $\overrightarrow{PQ}$, maka vektor yang direpresentasikan dengan $\overrightarrow{PS}$ dinamakan **proyeksi vektor b terhadap a** dinotasikan $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$



Gambar 1.9 Vektor proyeksi **b** terhadap **a**

Proyeksi skalar b terhadap a (disebut juga **komponen b sepanjang a**) didefinisikan sebagai besaran yang ditandai oleh proyeksi vektor, yaitu bilangan $|\mathbf{b}| \cos\theta$, dimana θ adalah sudut antara **a** dan **b** (sebagaimana pada Gambar 1.10). Proyeksi skalar **b** terhadap **a** dinotasikan dengan $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.



Gambar 1.10 Proyeksi Skalar **b** terhadap **a**

Perhatikan bahwa nilainya negatif jika $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Persamaan berikut menunjukkan bahwa *dot product* dari a dan b dapat diinterpretasikan sebagai panjang a dikali proyeksi skalar **b** terhadap **a.**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{a}|\,(|\mathbf{b}| \cos\theta)$$

$$|\mathbf{b}| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b}$$

Jadi komponen **b** sepanjang **a** dapat dihitung dengan *dot product* dengan vektor unit pada arah **a**.

Proyeksi skalar **b** terhadap **a**

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Proyeksi vektor **b** terhadap **a**

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$$

Contoh 5

Tentukan proyeksi skalar dan proyeksi vektor dari $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2\rangle$ terhadap $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$

Penyelesaian

Karena $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

Maka proyeksi skalar **b** terhadap **a** adalah

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + (3)(1) + (1)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Sehingga didapat Proyeksi vektor **b** terhadap **a** adalah

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\langle -2, 3, 1\rangle}{\sqrt{14}} = \langle -\frac{6}{14}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\rangle$$

Contoh 6

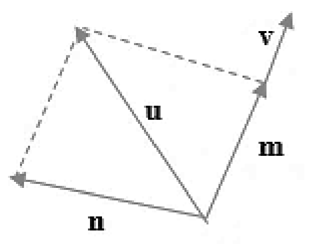
Nyatakan $\mathbf{u} = \langle 2, 4, 5\rangle$ sebagai jumlah dari vektor **m** yang sejajar dengan $\mathbf{v} = \langle 2, -1, -2\rangle$ dan vektor **n** yang tegak lurus **v**.

Penyelesaian

Terdapat tiga kondisi pada pernyataan tersebut

1. **u** adalah jumlah dari **m** dan **n**
2. **m** sejajar dengan **v**
3. **n** tegak lurus dengan **v**

Sehingga dapat dikonstruksi Gambar 1.11 berikut



Gambar 1.11 Hubungan vektor **u**, **v**, **m** dan **n**

Berdasarkan Gambar 1.11 dapat diketahui bahwa **m** adalah vektor proyeksi **u** terhadap **v**, sehingga

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\ \mathbf{v}\\ &= \frac{\langle 2,4,5\rangle\cdot\langle 2,-1,-2\rangle}{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\right)^2}\langle 2,-1,-2\rangle\\ &= \frac{(2)(2)+(4)(-1)+(5)(-2)}{4+1+4}\langle 2,-1,-2\rangle\\ &= \left(-\frac{10}{9}\right)\langle 2,-1,-2\rangle = \langle -\frac{20}{9},\frac{10}{9},\frac{20}{9}\rangle\end{aligned}$$

Karena berlaku **u** = **m** + **n** maka dapat kita nyatakan

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} - \mathbf{m} = \langle 2,4,5\rangle - \langle -\frac{20}{9},\frac{10}{9},\frac{20}{9}\rangle = \langle \frac{38}{9},\frac{26}{9},\frac{25}{9}\rangle$$

Hasil Kali Silang (*Cross Product*)

Misalnya diberikan dua vektor *nonzero* $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, maka hasil kali silang (*cross product*) dari vektor **a** dan **b** didefinisikan sebagai

$$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_{2,}\ a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle}$$

Cross product dari vektor a dan b tidak seperti melakukan *dot product*, karena hasilnya akan berupa vektor yang dinamakan ***vector product***. Perlu diperhatikan bahwa $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ didefinisikan hanya ketika **a** dan **b** adalah vektor tiga dimensi.

Untuk memahami definisi hasil kali titik di atas perlu kita tinjau konsep determinan pada vektor 2 × 2.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Maka determinan untuk matriks 3 × 3 adalah

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Dengan menggunakan determinan-determinan sebagaimana di atas, kita dapat menyatakan hasil kali silang dua vektor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ sebagai

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Atau dapat pula kita menulisnya sebagai

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

<u>Contoh 7</u>

Tentukan hasil kali silang dari vektor $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-15 - 28)\mathbf{i} - (-5 - 8)\mathbf{j} + (7 - 6)\mathbf{k} \\ &= -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

Teorema 2

1. Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus terhadap vektor **a** dan vektor **b**
2. Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, vektor **a** dan **b** membentuk sistem tangan-kanan lipat-tiga (*right-handed triple*)
3. Jika θ adalah sudut antara **a** dan **b**, dimana $0 \leq \theta \leq \pi$, maka
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

Bukti Teorema 2 bagian 3.

Berdasarkan definisi hasil kali silang dan panjang skalar suatu vektor didapatkan

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2{}^2b_3{}^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3{}^2b_2{}^2 + a_3{}^2b_1{}^2 \\
&\quad -2a_1a_3b_1b_3 + a_1{}^2b_3{}^2 + a_1{}^2b_2{}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&\quad +a_2{}^2b_1{}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2\right) \\
&\quad -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Kedua ruas kita Tarik akar kuadrat dimana $\sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$ karena $\sin\theta \geq 0$ ketika $0 \leq \theta \leq \pi$ sehingga kita dapatkan

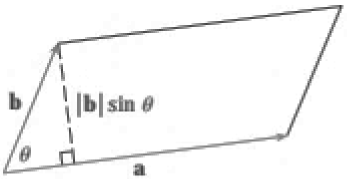
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta \qquad \blacksquare$$

Corrolary

Dua vektor non zero a dan b sejajar jika dan hanya jika
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

Interpretasi geometris dari Teorema 2 bagian 3 terlihat sebagaimana dalam Gambar 1.14. Jika vektor **a** dan **b** merepresentasikan segmen garis berarah yang memiliki titik pangkal yang sama, maka kedua vektor tersebut menentukan sebuah jajar genjang dengan panjang alas $|\mathbf{a}|$ dan tinggi $|\mathbf{b}|\sin\theta$. Luas jajar genjang adalah

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\sin\theta) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$



Gambar 1.12. Jajar genjang yang dibentuk **a** dan **b**

<u>Contoh 8</u>

Tentukan vektor yang tegak lurus dengan bidang yang melalui titik *P*(1, 4, 6), *Q*(-2, 5, -1) dan *R*(1, -1, 1).

Penyelesaian

Vektor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ tegak lurus dengan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$. Akibatnya vektor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ tegak lurus dengan bidang yang melalui titik *P*, *Q* dan *R*. Sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (-2-1)\mathbf{i} + (5-4)\mathbf{j} + (-1-6)\mathbf{k} \\
&= -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k} \\
\overrightarrow{PR} &= (1-1)\mathbf{i} + (-1-4)\mathbf{j} + (1-6)\mathbf{k} \\
&= -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita menghitung *cross product*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\
&= (5-35)\mathbf{i} - (15-0)\mathbf{j} + (15-0)\mathbf{k} \\
&= -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Jadi $\langle -40, -15, 15\rangle$ vektor yang tegak lurus dengan bidang yang melalui P, Q dan R.
Garis dan kurva dalam ruang dimensi 3

<u>Contoh 9</u>
Tentukan luas segitiga yang memiliki titik puncak P(1, 4, 6), Q(-2, 5, -1) dan R(1, -1, 1).
Penyelesaian
Dari Contoh 10 diperoleh $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15\rangle$. Luas jajar genjang dengan sisi $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$ adalah panjang skalar dari *cross product*:

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + (15)^2} = 5\sqrt{82}$$

Luas segitiga PQR adalah setengah dari luas jajar genjang dengan sisi $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$. Jadi didapat:

Luas segitiga PQR= $\frac{5}{2}\sqrt{82}$

2. RANGKUMAN

a. Vektor ruang memiliki tiga komponen, dinyatakan sebagai
$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a\rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
b. Panjang vektor **a**, dinotasikan $|\mathbf{a}|$ dinyatakan dengan
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$
c. Misalkan diberikan titik $A(x_1, y_1, z_1)$ dan titik $B(x_2, y_2, z_2)$, maka vektor **a** dengan representasi $\overrightarrow{AB}$ adalah
$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$
d. Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a\rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, maka
Penjumlahan vektor
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$$
Pengurangan vektor
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$$
Perkalian vektor dengan skalar
$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$$

e. Jika $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, maka hasil kali titik vektor **a** dan **b** didefinisikan sebagai

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

f. Jika θ adalah sudut antara vektor **a** dan **b**, maka

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

g. Dua vektor **a** dan **b** tegak lurus atau ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

h. Proyeksi skalar **b** terhadap **a** (disebut juga komponen **b** sepanjang **a**) didefinisikan sebagai besaran yang ditandai oleh proyeksi vektor, yaitu bilangan $|\mathbf{b}| \cos\theta$, dimana θ adalah sudut antara **a** dan **b,** dinotasikan dengan $\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.
Proyeksi skalar **b** terhadap **a**

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Proyeksi vektor **b** terhadap **a**

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$$

i. Hasil kali silang (*cross product*) dari vektor **a** dan **b**, dinyatakan sebagai

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_{2,}\, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

j. Vektor **a** × **b** tegak lurus terhadap vektor **a** dan vektor **b**

k. Vektor **a** × **b,** vektor **a** dan **b** membentuk sistem tangan-kanan lipat-tiga (*right-handed triple*)

l. Jika θ adalah sudut antara **a** dan **b**, dimana $0 \leq \theta \leq \pi$, maka

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$$

m. Dua vektor non zero a dan b sejajar jika dan hanya jika

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

Tentukan **a** + **b**, 2**a** + 3**b**, $|\mathbf{a}|$ dan $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ dari dua dua vektor berikut

1. $\mathbf{a} = \langle 5, -12 \rangle; \mathbf{b} = \langle -3, -6 \rangle$
2. $\mathbf{a} = \mathbf{4i} + \mathbf{j}; \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Tentukan *dot product* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dari dua dua vektor berikut

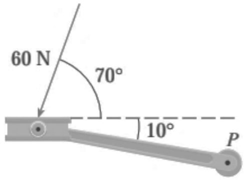
3. $\mathbf{a} = \langle -2, \frac{1}{3} \rangle$; $\mathbf{b} = \langle -5, 12 \rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 6, -2, 3 \rangle$; $\mathbf{b} = \langle 2, 5, -1 \rangle$
5. Tentukan sudut antara vektor $\langle 4, -3, -1 \rangle$ dan $\langle -2, -3, 5 \rangle$
6. Tentukan sudut antara vektor $-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + +3\mathbf{k}$ dan $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Tentukan apakah vektor berikut sejajar, tegak lurus atau tidak keduanya.

7. $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$; $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
8. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{5j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
9. Tentukan dengan panjang 10, masing-masing tegak lurus terhadap $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}.$
10. Tentukan seluruh vektor yang tegak lurus terhadap $\langle 1, -2, -3 \rangle$ dan $\langle -2, 3, 0 \rangle$.
11. Tentukan proyeksi skalar $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ pada $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$
12. Jika $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, tentukan vektor b sedemikian sehingga $\mathrm{comb}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 2$

Tentukan *cross product* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dan periksa apakah vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus (*orthogonal*) terhadap **a** dan **b**

13. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
15. Tentukan kerja yang dilakukan oleh sebuah gaya $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ pada sebuah objek yang bergerak dari titik (0, 10, 8) ke titik (6, 12, 20) sepanjang garis lurus. Jarak diukur dalam meter dan gaya dalam newton.
16. Sebuah pedal sepeda dikajuh dengan kaki dengan usaha 40 newton (sebagaimana dalam Gambar). Tentukan besarnya jarak putar titik P.



4. KUNCI JAWABAN

Jawaban soal-soal bernomor ganjil

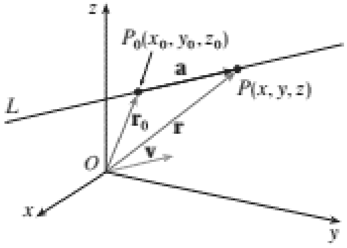
1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 2, -18\rangle$; $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 1, -42\rangle$; $|\mathbf{a}| = 13$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 10$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$
5. $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{247}}\right)$
7. **a** dan **b** tidak tegak lurus dan tidak sejajar
9. $\frac{10}{\sqrt{593}}\mathbf{i} - \frac{40}{\sqrt{593}}\mathbf{j} + \frac{240}{\sqrt{593}}\mathbf{j}$; $-\frac{10}{\sqrt{593}}\mathbf{i} + \frac{40}{\sqrt{593}}\mathbf{j} - \frac{240}{\sqrt{593}}\mathbf{j}$
11. $\sqrt{3}$
13. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus (*orthogonal*) terhadap **a** dan **b**
15. 144 joules

KEGIATAN BELAJAR 3

1. URAIAN MATERI

a. Persamaan Garis dalam Ruang Berdimensi Tiga

Garis L pada ruang berdimensi tiga dapat ditentukan ketika kita mengetahui satu titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pada L dan arah dari L. Pada dimensi tiga, arah suatu garis dideskripsikan oleh sebuah vektor, misalkan **v** adalah sebuah vektor yang sejajar dengan L. Andaikan $P(x, y, z)$ adalah titik pada L dan andaikan $\mathbf{r_0}$ dan **r** adalah vektor posisi dari P_0 dan P (kedua vektor ini direpresentasikan oleh $\overrightarrow{OP_0}$ dan $\overrightarrow{OP}$).

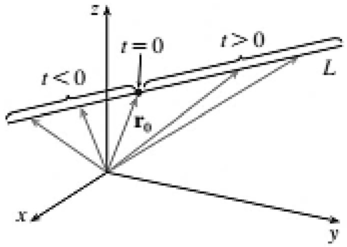


Gambar 1.13 Garis L yang ditentukan oleh titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan arah **v**

Jika **a** adalah vektor yang direpresentasikan oleh $\overrightarrow{P_0P}$, (Gambar 1.13), maka Hukum Segitiga pada penjumlahan vektor menyatakan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$**.** Karena **a** dan **v** adalah dua vektor yang sejajar, maka terdapat skalar t sedemikian sehingga **a** = t**v**. Sehingga diperoleh persamaan vektor dari L adalah

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}}$$

Setiap nilai dari parameter t menentukan vektor posisi dari suatu titik pada L. Dengan kata lain, karena t bervariasi, maka garis dilacak oleh ujung vektor r. Sebagaimana pada Gambar 1.14, nilai positif dari t berkorespondensi dengan titik-titik pada L yang terletak di satu sisi dari P_0, sedangkan nilai negative dari t berkorespondensi dengan titik-titik pada L yang terletak di sisi yang lainnya dari P_0.



Gambar 1.14 Parameter t yang menentukan vektor posisi dari suatu titik pada L

Jika vektor **v** yang memberikan arah dari garis L yang ditulis sebagai $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ maka kita dapatkan $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc\rangle$. Kita juga dapat menuliskan $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ dan $\mathbf{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ sehingga persamaan vektor menjadi

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$$

Dua vektor tersebut sama jika komponen yang berkorespondensi sama. Sehingga kita dapatkan **Persamaan Parametrik** dari L yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar dengan vektor $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$.

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

dimana $t \in \mathbb{R}$

Setiap nilai dari *t* menentukan suatu titik (*x*, *y*, *z*) pada *L*.

Contoh 1

Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik dari garis yang melalui titik (5, 1, 3) dan sejajar dengan vektor **i** + 4**j** – 2**k**. Tentukan titik yang lainnya.

Penyelesaian:

$$\mathrm{r}_0 = \langle 5,1,3 \rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Maka diperoleh persamaan vektor

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$
$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

Persamaan parametriknya adalah

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

Pilih *t* = 1 maka didapat *x* = 6, *y* = 5 dan *z* = 1. Maka titik (6, 5, 1) adalah titik yang lain pada garis.

Persamaan vektor dan persamaan parametric dari suatu garis tidak unik. Jika kita mengganti titik atau parameter atau memilih vektor sejajar yang berbeda, maka persamaan akan berubah.
Secara umum, jika vektor $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ digunakan untuk mendeskripsikan arah dari suatu garis *L*, maka bilangan a, *b*, *c* dinamakan **bilangan arah** (*direction number*). Karena setiap sembarang vektor paralel **v** dapat digunakan, maka tiga

bilangan proporsional a, *b*, dan *c* dapat digunakan sebagai himpunan bilangan arah dari *L*.
Cara yang berbeda untuk mendeskripsikan *L* adalah dengan mengeliminasi parameter *t* dari persamaan parametrik. Jika a, *b*, *c* bukan bilangan 0, kita bias mendapatkan Persamaan Simetrik dari *L*.

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

<u>Contoh 2</u>
Tentukan persamaan parametrik dan persamaan simetrik dari garis yang melalui titik *A*(2, 4, -3) dan *B*(3, -1, 1). Kemudian tentukan pada titik mana garis ini berpotongan pada bidang-*xy*.

Penyelesaian
Kita tidak secara eksplisit mendapatkan vektor paralel dengan garis, tapi perhatikan bahwa vektor v dengan representasi $\overrightarrow{AB}$ adalah sejajar/paralel dengan garis dan diperoleh

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, (-1) - 2, 1 - (-4) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Bilangan arahnya adalah *a* = 1, *b* = -5 dan *c* = 4. Pilih titik P_0 = (2, 4, -3), maka kita peroleh persamaan parametrik

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

Dan persamaan simetriknya adalah

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

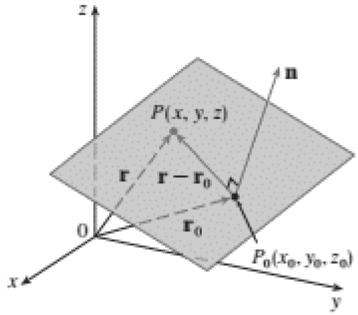
Garis ini berpotongan dengan bidang-*xy* ketika *z* = 0. Kita masukkan *z* = 0 pada persamaan simetrik sehingga diperoleh

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

Sehingga $x = \frac{11}{4}$ dan $y = \frac{1}{4}$. Jadi garis tersebut berpotongan dengan bidang-xy pada titik $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

b. Persamaan Bidang dalam Ruang Berdimensi Tiga

Walaupun garis pada ruang ditentukan oleh suatu titik dan suatu arah, maka suatu bidang pada ruang lebih sulit untuk dideskripsikan. Suatu vektor yang paralel dengan suatu bidang tidak cukup menjelaskan tentang arah dari bidang tersebut, tetapi suatu vektor yang tegak lurus dengan bidang dapat secara pasti menentukan arah dari bidang tersebut. Sehingga **suatu bidang pada ruang ditentukan oleh suatu titik $\boldsymbol{P_0(x_0, y_0, z_0)}$ pada bidang dan sebuah vektor n yang orthogonal terhadap bidang tersebut**. Vektor yang ortogonal terhadap bidang dinamakan **vektor normal** (*normal vector*).



Gambar 1.15 Titik dan vektor posisi pada bidang

Misalkan $P(x, y, z)$ adalah sebuah titik pada bidang dan $\mathbf{r_0}$ dan $\mathbf{r}$ adalah vektor posisi dari P_0 dan P. Maka vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ adalah vektor yang direpresentasikan oleh $\overrightarrow{P_0P}$ (sebagaimana pada Gambar 1.15). Vektor normal **n** *ortogonal* (tegak lurus) dengan setiap vektor pada bidang. Khususnya **n** *ortogonal* dengan $\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ sehingga kita peroleh

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0}$$

Dapat pula ditulis sebagai **Persamaan vektor suatu Bidang** sebagai berikut

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

Untuk mendapatkan persamaan skalar dari bidang, kita menuliskan $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ dan $\mathbf{r_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Maka diperoleh **Persamaan Skalar bidang** yang melalui $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **dengan vektor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ sebagai berikut

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

<u>Contoh 3</u>

Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (2, 4, -1) dengan vektor normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$. Tentukan perpotongan dengan sumbu koordinat dan gambar grafiknya.

Penyelesaian:

Diketahui bilangan arah a = 2, b = 3 dan c = 4. Dari titik $P_0 = (2, 4, -1)$ diketahui $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ dan $z_0 = -1$ sehingga diperoleh persamaan bidang adalah

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Untuk mendapatkan perpotongan dengan sumbu-x didapat ketika y = z = 0 sehingga diperoleh persamaan x = 6. Dengan cara yang sama kita peroleh perpotongan dengan sumbu-y adalah 4 dan dengan sumbu-z adalah 3. Hal ini memungkinkan kita untuk menggambar bidang yang berada pada oktan pertama.

Kita dapat menulis persamaan bidang sebagai **Persamaan Linier** dalam x, y z dengan $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ yaitu

$$ax + by + cz + d = 0$$

Jika a, b dan c semuanya tidak sama dengan 0, maka persamaan di atas adalah persamaan bidang dengan vektor normal $\langle a, b, c\rangle$.

<u>Contoh 4</u>

Tentukan titik dimana garis dengan persamaan parametrik $x = 2 + 3t,\ \ y = -4t,\ \ z = 5 + t$ berpotongan dengan bidang $4x + 5y - 2z = 18$.

Penyelesaian

Kita substitusikan x, y dan z pada persamaan parametrik ke persamaan bidang yang dipotong, sehingga diperoleh

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$
$$8 + 12t - 20t - 10 - 2t = 18$$
$$-10t = 20$$
$$t = -2$$

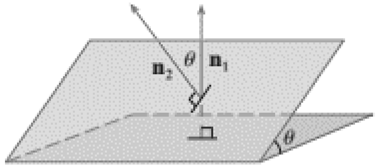
Subtitusi nilai t = –2 ke persamaan parametrik

$$x = 2 + 3(-2) = 2 - 6 = -4$$
$$y = -4(-2) = 8$$
$$z = 5 - 2 = 3$$

Jadi titik potong garis dengan bidang adalah (–4, 8, 3).

Dua bidang paralel jika normal vektornya sejajar. Misalnya bidang $x + 2y - 3z = 4$ paralel dengan bidang $2x + 4y - 6z = 3$ karena vektor normal keduanya adalah $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3\rangle$, $\mathbf{n}_2 = \langle 2,\ 4, -6\rangle$ dan $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{n}_2$.

Jika dua bidang tidak paralel maka keduanya berpotongan pada suatu garis lurus dan sudut antara kedua bidang tersebut didefinisikan sebagai sudut lancip antara normal bidang keduanya (sebagaimana pada Gambar 1.16).



Gambar 1.16 Dua bidang yang tidak paralel

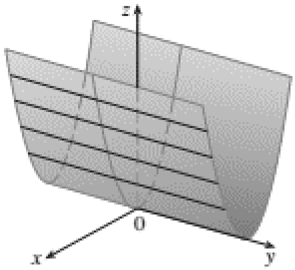
c. Permukaan Silinder dan Kuadratik

Untuk membuat grafik suatu permukaan dibutuhkan kurva-kurva perpotongan dari permukaan dengan bidang-bidang yang paralel dengan bidang koordinat. Kurva-kuva ini dinamakan **jejak** (*trace/ cross-section*) dari permukaan.

Parabolic Cylinder

Misalnya persamaan $z = x^2$

Perhatikan bahwa persamaan ini tidak mengandung *y*. Artinya setiap bidang vertikal dengan persamaan *y* = *k* yang paralel dengan bidang-*xz*, akan memotong grafik kurva dengan persamaan $z = x^2$. Jejak vertikalnya berbentuk parabola. Gambar 1.17 menunjukkan bagaimana grafik dibentuk dari parabola $z = x^2$ pada bidang-*xz* bergerak searah sumbu-*y*. Grafik bidang seperti ini dinamakan ***parabolic cylinder***.



Gambar 1.17 Grafik $z = x^2$

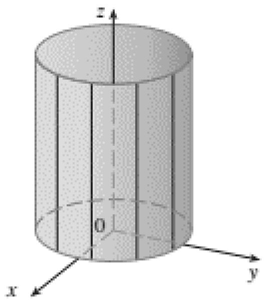
Perlu menjadi catatan bahwa **jika ada satu variabel *x, y* dan *z* yang hilang pada persamaan dari suatu permukaan, maka permukaan tersebut berbentuk silinder**.

<u>Contoh 5</u>

Sketsalah grafik permukaan $x^2 + y^2 = 1$.

Penyelesaian

Karena variable z hilang pada persamaan $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ merepresentasikan suatu lingkaran dengan jari-jari 1 pada bidang $z = k$. Maka $x^2 + y^2 = 1$ adalah silinder yang sumbunya adalah sumbu-z (sebagaimana dalam Gambar 1.18).



Gambar 1.18. Grafik $x^2 + y^2 = 1$

Elipsoid

Elipsoid termasuk dalam permukaan kuadratik (*quadratic surfaces*). Permukaan kuadratik adalah grafik persamaan berderajat-dua dari tiga variabel *x*, *y* dan *z*.

<u>Contoh 6</u>

Gunakan *trace*s (jejak-jejak) dalam membuat grafik permukaan kuadratik

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Penyelesaian

Dengan mensubtitusi $z = 0$ kita mendapatkan jejak pada bidang-*xy* adalah $x^2 + z^2/9 = 1$, dimana persamaan ini adalah persamaan elips. Secara umum, jejak pada bidang horizontal untuk $z = k$ adalah

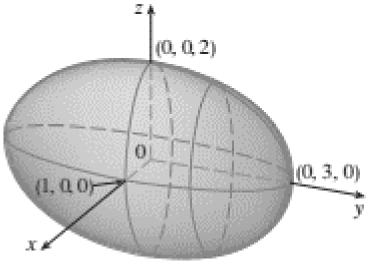
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4}, \qquad z = k$$

Persamaan ini merupakan elips dengan $k^2 < 4$ sehingga $-2 < k < 2$

Dengan cara yang sama kita dapatkan jejak secara vertikal yang juga berupa elips-elips yaitu

$$\frac{y^2}{9} + \frac{k^2}{4} = 1 - k^2, \qquad x = k \qquad (\text{jika} - 1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{k^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9}, \qquad y = k \qquad (\text{jika} - 1 < k < 1)$$



Gambar 1.19 Grafik $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Gambar 1.19 menunjukkan grafik beberapa jejak yang mengindikasikan bentuk permukaan $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Permukaan ini dinamakan ***ellipsoid*** karena seluruh jejaknya berbentuk elips.

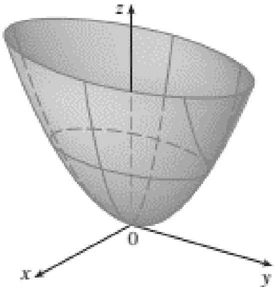
Paraboloid Eliptik

Misalkan kita memiliki persamaan $z = 4x^2 + y^2$

Jika *x* = 0, kita dapatkan $z = y^2$, jadi perpotongan bidang-*xz* dan permukaan $z = 4x^2 + y^2$ berbentuk parabola. Jika kita masukkan suatu konstanta *x* = *k*, kita peroleh $z = y^2 + 4k^2$. Hal ini bermakna bahwa jika kita mengiris grafik setiap bidang yang paralel dengan bidang-*yz*, kita dapatkan parabola yang terbuka ke atas.

Dengan cara yang sama, jika *y* = *k*, kita peroleh $z = 4x^2 + k^2$, yang merupakan parabola yang terbuka ke atas. Jika *z* = *k*, kita peroleh $4x^2 + y^2 = k$, bentuk ini merupakan keluarga elips. Dengan mengetahui bentuk jejak-jejak, maka kita dapat membuat grafiknya sebagaimana dalam Gambar 1.20.

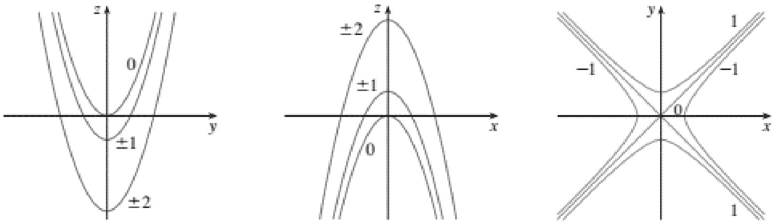
Persamaan $z = 4x^2 + y^2$ dinamakan ***paraboloid eliptik*** karena memiliki jejak yang berupa eliptikal dan parabolik.



Gambar 1.20. Grafik $z = 4x^2 + y^2$

Paraboloid Hiperbolik
Misalkan kita miliki persamaan $z = y^2 - x^2$
Jejak pada bidang vertikal $x = k$ adalah parabola $z = y^2 - k^2$ yang terbuka ke atas.
Jejak pada $y = k$ adalah parabola $z = -x^2 + k^2$ yang terbuka ke bawah

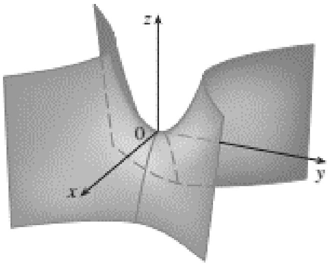
Jejak pada bidang horizontal $z = k$ adalah kurva $y^2 - x^2 = k$ yang merupakan keluarga hiperbola.
Gambar jejak-jejak tersebut direpresentasikan pada Gambar 1.21. Sedangkan Gambar 1.25 menunjukkan jejak-jejak pada sumbu koordinat tiga dimensi.



Jejak pada $x = k$ Jejak pada $y = k$ Jejak pada $z = k$

Gambar 1.21. Jejak-jejak $z = y^2 - x^2$ pada koordinat dua dimensi

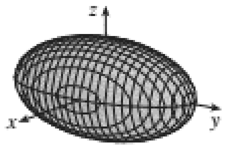
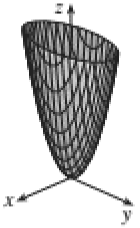
Gambar 1.22 merupakan grafik permukaan $z = y^2 - x^2$ yang merupakan bentuk ***hyperbolic paraboloid.*** Perhatikan bahwa bentuk permukaan sekitar titik asal (0,0) adalah sebuah sebuah belokan (*saddle*). Sehingga titik (0,0) dinamakan *saddle point* (titik pelana).

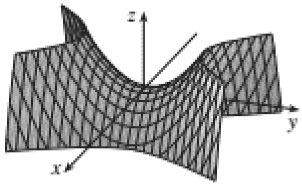
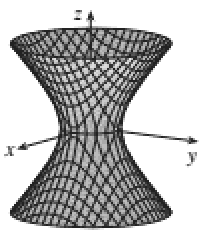
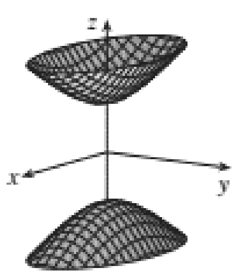
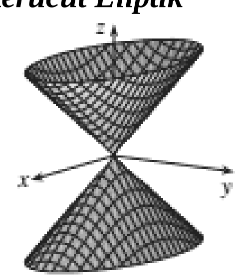


Gambar 1.22 Grafik permukaan $z = y^2 - x^2$

Secara umum berikut adalah rangkuman beberapa bentuk permukaan kuadratik.

Tabel 1.1 Grafik Permukaan Kuadratik

Permukaan	Persamaan
Elipsoid 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Seluruh jejaknya adalah elips Jika $a = b = c$ maka ellipsoid adalah bentuk bola
Paraboloid Eliptik 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b}$ Jejak horizontalnya adalah elips Jejak vertikalnya adalah parabola Variabel yang berpangkat satu menunjukkan sumbu paraboloid

Paraboloid hiperbolik  	$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b}$$ Jejak horizontalnya adalah hiperbola Jejak vertikalnya adalah parabola Grafik di samping mengilustrasikan untuk kasus $c < 0$
Hyperboloid satu lembar  	$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Jejak horizontalnya adalah elips Jejak vertikalnya adalah hiperbola Sumbu simetri berkorespondensi dengan variabel yang memiliki koefisien negatif
Hyperboloid dua lembar  	$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Jejak horizontal pada $z = k$ adalah elips, jika $k > c$ atau $k < -c$ Jejak vertikalnya adalah hiperbola Dua variabel yang bertanda negatif menunjukkan dua lembar
Kerucut Eliptik  	$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b}$$ Jejak horizontalnya adalah elips Jejak vertikalnya adalah bidang $x = k$ dan $y = k$ yang merupakan hiperbola jika $k \neq 0$, melainkan berupa pasangan garis-garis jika $k = 0$

Contoh 7
Identifikasi sketsa permukaan $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

Penyelesaian
Dengan membagi persamaan dengan (–4) kita dapatkan persamaan

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Berdasarkan Tabel 1, dapat diketahui bahwa persamaan tersebut adalah hiperboloid dua lembar. Hanya saja pada kasus ini sumbu hiperbolid adalah sumbu-*y*.
Jejak pada bidang-*xy* saat $z = 0$ adalah

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Jejak pada bidang-*yz* saat $x = 0$ adalah

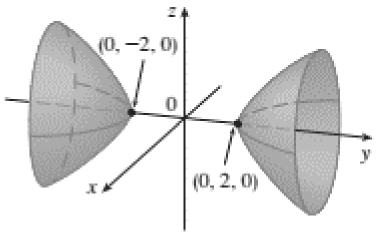
$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Permukaan tidak memiliki jejak pada bidang-*xz*, tetapi memiliki jejak horizontal pada $y = k$ untuk $|k| > 2$ yang merupakan elips, yaitu

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{k^2}{2} = 1$$

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1$$

Grafik permukaan $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$ dapat dibuat berdasarkan jejak-jejaknya sebagaimana pada Gambar 1.23.



Gambar 1.23. Grafik permukaan $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

2. RANGKUMAN

Persamaan Garis dalam Ruang Berdimensi Tiga

a. Persamaan vektor dari garis L

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

b. Persamaan Parametrik dari garis L yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan sejajar dengan vektor r $= \langle x, y, z\rangle$ adalah

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

dimana $t \in \mathbb{R}$

c. Persamaan Simetrik dari L

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Persamaan Bidang dalam Ruang Berdimensi Tiga

a. Suatu bidang pada ruang ditentukan oleh suatu titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pada bidang dan sebuah vektor n yang orthogonal terhadap bidang tersebut

b. Persamaan vektor suatu Bidang

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

c. Persamaan Skalar bidang yang melalui $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

d. Persamaan Linier dalam x, y z dengan $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ adalah

$$ax + by + cz + d = 0$$

d. Dua bidang paralel jika normal vektornya sejajar

3. LATIHAN

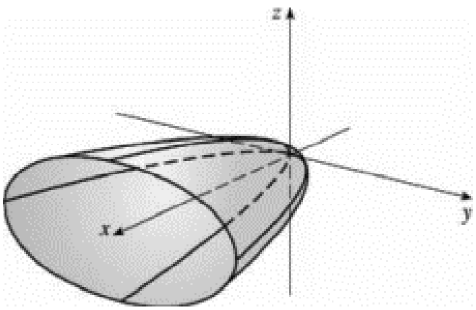
Kerjakanlah soal-soal latihan berikut

1. Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik (2, 2.4, 3.5) dan sejajar dengan vektor $\langle 1, 2, -1\rangle$
2. Tentukan persamaan vektor dan persamaan parametrik garis yang melalui titik (0, 14, -10) dan sejajar dengan garis $x = -1 + 2t, y = 6 - 3t, z = 3 + 9t$

3. Tentukan persamaan simetrik dari garis perpotongan dari bidang $4x + 3y - 7z - 1$ dan $10x + 6y - 5z = 10$
4. Tentukan persamaan simetrik dari garis perpotongan dari bidang $x + y - z = 2$ dan $3x - 2y + z = 3$
5. Tentukan persamaan vektor dari segmen garis dari titik (2, -1, 4) ke titik (4, 6, 1)
6. Tentukan persamaan vektor dari segmen garis dari titik (10, 3, 1) ke titik (5, 6, -3)
7. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik A(0, 0, 1), B(2, 0, 0) dan C(0, 3, 0)
8. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik *P*(-3, 0, 7) yang tegak lurus dengan $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
9. Tentukan titik dimana garis $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 5t$ berpotongan dengan bidang $x - y + 2z = 9$
10. Tentukan titik dimana garis $x = 1 + 2t,\ y = 4t,\ z = 2 - 3t$ berpotongan dengan bidang $x + 2y - z = -1$
11. Tentukan sudut antara bidang $3x - 6y - 2z = 15$ dan bidang $2x + y - 2z = 5$
12. Tentukan jarak antara titik (1, -2 , 4) dengan bidang $3x + 2y + 6z = 5$
13. Gunakan jejak-jejak untuk menggambar permukaan $x = y^2 + 4z^2$
14. Gunakan jejak-jejak untuk menggambar permukaan $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

KUNCI JAWABAN

1. $x = 2 + 3t, y = 2.4 + 2t, z = 3.5 - t$
3. $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{-5} = \frac{z-6}{2}$
5. $\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}), 0 \leq t \leq 1$
7. $3x + 2y + 6z = 6$
9. (2, 3, 5)
11. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$
13. Grafik fungsi berupa paraboloid eliptik dengan sumbu-x sebagai sumbu putarnya dan titik puncaknya berada pada titik asal *O*.



D. RUJUKAN

Stewart, J. 2012. Multivariable Calculus. 7th Edition. Cole, Cengage Learning.

Purcell, J. E., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. Kalkulus. Jilid II. Edisi Kedelapan. Penerbit Erlangga

Blank, B. E., Krantzs, S. G. 2011. Calculus Multivariable. 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Thomas, G. B. Jr., Weir, M.D., Hass, J. 2010. Thomas' Calculus Multivariable, 12th Edition. Pearson Education, Inc.

BAB II
TURUNAN PARSIAL

A. PENDAHULUAN

Pada saat membahas kalkulus untuk fungsi satu peubah, fungsi digambarkan pada bidang berdimensi dua. Sedangkan pada kalkulus peubah banyak, grafik fungsi digambarkan dalam ruang berdimensi tiga atau pada kasus tertentu menuju pada dimensi-*n*.

Bab ini akan membahas tentang bagian utama pertama dari kalkulus peubah banyak yaitu turunan parsial. Materi yang dijelaskan dalam Bab ini antara lain: fungsi dua peubah, kurva ketinggian dan peta kontur, turunan parsial, limit dan kontinuitas, keterdiferensialan, gradien, turunan berarah, diferensial total dan aturan rantai, penerapan turunan parsial (maksimum dan minimum, bidang singgung, hampiran, Metode Lagrange).

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu:

- Mengidentifikasi domain dan range fungsi dua peubah atau lebih
- Menentukan limit fungsi dua peubah atau lebih
- Mengidentifikasi kontinuitas fungsi dua peubah atau lebih
- Menentukan turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih
- Menentukan bidang singgung fungsi dua peubah atau lebih
- Menentukan turunan berarah dan vektor gradien
- Menggunakan aturan rantai dalam mencari turunan fungsi

B. KEGIATAN BELAJAR 4

1. URAIAN MATERI

a. Fungsi dua peubah atau lebih

Misalkan kita ingin menghitung pembayaran bulanan untuk pinjaman mobil lima tahun; yang tergantung pada jumlah uang yang dipinjam dan tingkat suku bunga. Jumlah ini dapat bervariasi secara terpisah: jumlah pinjaman dapat berubah sementara tingkat suku bunga tetap sama, atau tingkat suku bunga dapat berubah sementara jumlah pinjaman tetap sama. Untuk menghitung pembayaran bulanan, kita perlu mengetahui keduanya. Jika pembayaran bulanan adalah m, jumlah pinjaman adalah L, dan tingkat suku bunga adalah *r*, maka kita menyatakan fakta bahwa m adalah fungsi dari *L* dan *r* dengan menulis:

$$m = f(L, r)$$

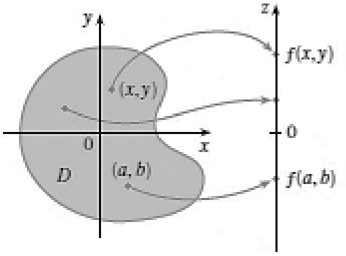
Bentuk di atas adalah contoh fungsi dengan dua peubah (variabel). Variabel *m* dinamakan variabel terikat (dependen), sedangkan *L* dan *r* dinamakan variabel bebas (independen). Huruf *f* adalah singkatan dari fungsi atau aturan yang memberikan nilai *m* sesuai dengan nilai *L* dan *r* yang diberikan.

Definisi

Fungsi dua peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari bilangan real (*x*,*y*) pada himpunan *D* dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan *f*(*x*,*y*).

Himpunan *D* dinamakan daerah asal (domain) dari *f* dan himpunan dari nilai *f* dinamakan daerah hasil (range)

Jadi dapat dipahami bahwa suatu fungsi dua peubah memiliki domain berupa pasangan berurutan (*x*, *y*) di $\mathbb{R}^2$ dan *range* berupa bilangan di $\mathbb{R}$. Salah satu cara memvisualisasikan fungsi adalah melalui diagram panah sebagaimana pada Gambar 2.1, dimana domain *D* merepresentasikan subset pada bidang-*xy* dan *range* adalah himpunan bilangan riil yang digambar pada garis, menunjukkan sumbu-z.



Gambar 2.1 Diagram panah hubungan *D* dan *range* dari *f*

Contoh 1:

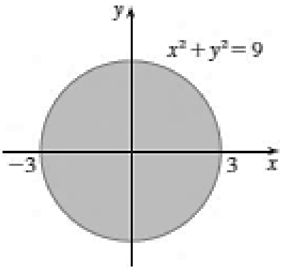
Tentukan domain dan range dari fungsi $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Penyelesaian

Domain dari *f* adalah

$D = \{(x, y)|9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 9\}$

Dimana D adalah lingkaran dengan titik pusat (0,0) dan jari-jari 3 (sebagaimana dalam Gambar 2.2)



Gambar 2.2 Grafik *D* domain $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Range dari *f* adalah

$z = \left\{z \middle| z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \epsilon D\right\}$

Karena *z* adalah bentuk akar kuadrat positif, maka $z \geq 0$

Selain itu karena $9 - x^2 - y^2 \leq 9$ kita peroleh

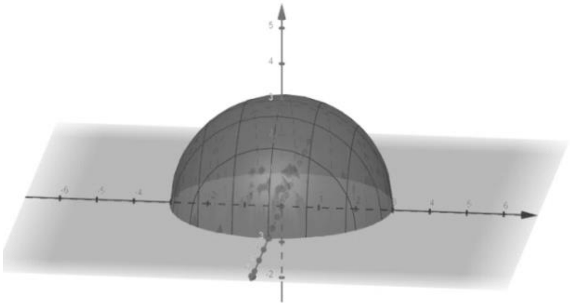
$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$

$z \leq 3$

Sehingga *range* dari *f* menjadi:

$z = \{z|0 \leq z \leq 3\} = [0,3]$

Grafik range dari f diilustrasikan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Grafik *range* $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Contoh 2

Tentukan domain dan range fungsi $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

Penyelesaian

Perhatikan bahwa $f(x, y)$ terdefinisi pada semua pasangan berurutan bilangan riil (x, y), sehingga domainnya adalah $\mathbb{R}^2$ di seluruh bidang-*xy*. *Range* dari *f* adalah himpunan semua bilangan riil, atau dapat pula dinyatakan *range f* adalah $\mathbb{R}$, semua titik sepanjang sumbu-*z*.

Ketika kita menggambar fungsi satu peubah, kita menggunakan bidang dua dimensi. Satu dimensi merupakan domainnya, dimensi yang lain untuk *range*nya. Grafik fungsi dibuat dengan memplot titik-titik dan menghubungkannya menjadi sebuahh kurva.

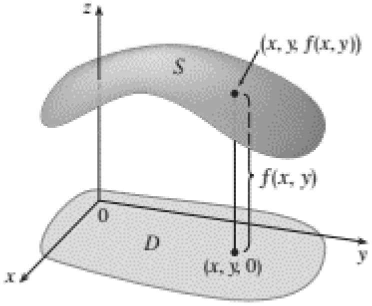
Pada grafik fungsi dengan dua peubah, kita menggunakan ruang tiga dimensi karena kita membutuhkan dua dimensi untuk domain fungsi dan satu dimensi untuk *range*nya. Grafik fungsi dua peubah berbentuk permukaan (*surface*), kita tidak mungkin memplot titik-titik dan menghubungkannya menjadi sebuah permukaan. Oleh karena itu kita membutuhkan teknik yang lebih canggih dibanding menggambar grafik fungsi satu peubah.

Ada beberapa cara dalam memvisualisasikan fungsi dua peubah, diantaranya melalui grafik, kurva ketinggian dan peta kontur.

Grafik

> **Definisi**
> Jika *f* adalah fungsi dua peubah dengan domain *D*, maka grafik *f* adalah himpunan semua titik (*x*, *y*, *z*) di $\mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga *z* = *f*(*x*,*y*) dan (x, y) berada di *D*

Sebagaimana halnya dengan grafik fungsi f satu peubah yang berupa kurva *C* dengan persamaan $y = f(x)$, grafik fungsi f dua peubah adalah permukaan *S* dengan persamaan $z = f(x, y)$. Kita dapat memvisualisasikan grafik permukaan *S* dari fungsi *f* yang melintang di atas atau bawah domain D pada bidang-xy (sebagaimana pada Gambar 2.4)

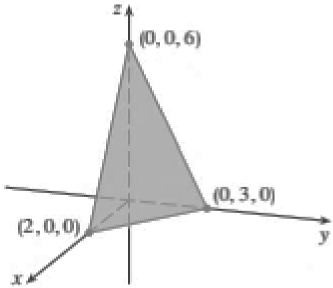


Gambar 2.4 Grafik permukaan *S* dari fungsi *f*

<u>Contoh 3</u>
Gambarlah grafik fungsi $f(x, y) = 6 - 3x - y$

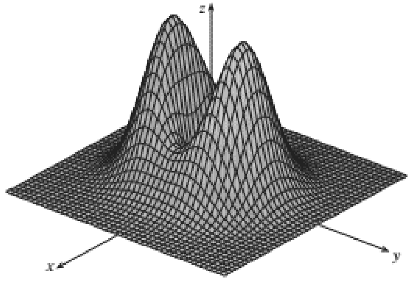
Penyelesaian
Grafik *f* dengan persamaan $z = 6 - 3x - y$ berbentuk sebuah bidang.

Untuk menggambar bidang, kita tentukan perpotongan dengan sumbu koordinat. Dengan mensubstitusikan $y = z = 0$ pada persamaan kita peroleh *x* = 2 sebagai perpotongan dengan sumbu-*x*. Dengan cara yang sama, kita dapatkan perpotongan dengan sumbu-*y* adalah 3 dan perpotongan dengan sumbu-*z* adalah 6. Sehingga kita dapat membuat sketsa grafik yang berada pada oktan pertama dengan menghubungkan titik-titik ini. Grafik fungsi f sebagaimana pada Gambar 2.5.

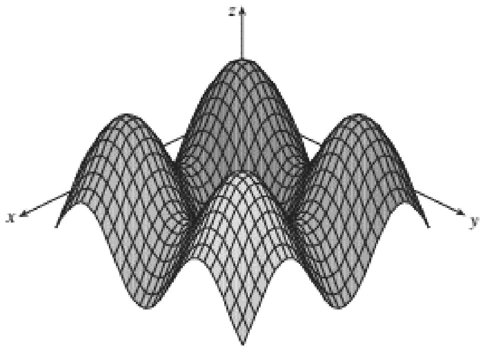


Gambar 2.5 Grafik fungsi $f(x, y) = 6 - 3x - y$

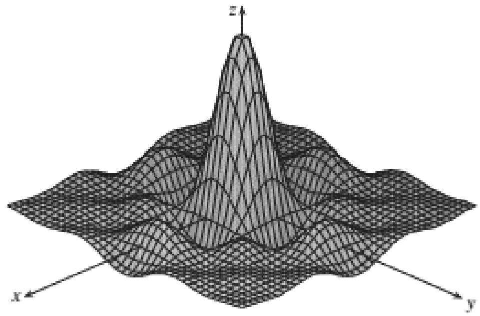
Untuk menggambar grafik fungsi dua peubah yang berupa permukaan kuadratik atau fungsi yang lebih rumit dibutuhkan program komputer. Beberapa *software* atau aplikasi yang dapat digunakan antara lain *Geogebra*, *MatLab*, *Maple* dan *Mathematica*. Gambar 2.6, 2.7 dan 2.8 berikut menunjukkan beberapa grafik fungsi dua peubah yang digambar menggunakan *software*. Kita dapat tampilan grafik fungsi yang lebih baik dengan melakukan rotasi dari sudut pandang yang berbeda-beda



Gambar 2.6 Grafik $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



Gambar 2.7 Grafik $f(x,y) = \sin x + \sin y$



Gambar 2.8 $f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$

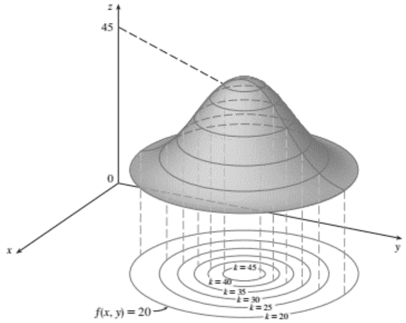
Kurva ketinggian dan Peta Kontur

Salah satu cara dalam memvisualisasikan fungsi dua peubah atau lebih adalah **peta kontur**. Metode ini diadopsi dari pembuatan peta, dimana titik-titik elevasi tetap digabungkan sehingga membentuk garis kontur atau kurva ketinggian (*level curve*).

> **Definisi**
> **Kurva ketinggian** dari fungsi *f* dua peubah adalah kurva-kurva dengan persamaan $f(x,y) = k$, dimana k adalah suatu konstanta dalam range *f*

Suatu kurva ketinggian $f(x,y) = k$ merupakan himpunan semua titik pada domain *f*, dimana *f* memenuhi nilai *k* yang diberikan.

Dengan kata lain, kurva ketinggian menunjukkan dimana grafik f memiliki tinggi k.
Seperti pada Gambar 2.9 menunjukkan hubungan antara kurva ketinggian dengan jejak-jejak horizontal. Kurva ketinggian $f(x, y) = k$ merupakan jejak-jejak grafik *f* pada bidang horizontal $z = k$ yang diproyeksikan ke bawah di bidang-*xy*. Sekumpulan kurva-kurva ketinggian dimanakan **peta kontur**.



Gambar 2.9 Grafik peta kontur

<u>Contoh 4</u>

Misalkan $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$. Hitung dan gambar kurva ketinggian yang berkorespondensi dengan irisan kurva pada ketinggian 20, 13, 5 dan 4.

Penyelesaian

Kurva ketinggian dari *f* adalah

$$x^2 + y^2 + 4 = k$$
$$x^2 + y^2 = k - 4$$

Bentuk di atas adalah lingkaran dengan pusat (0, 0) dan jari-jari $\sqrt{k-4}$

Terdapat lima kurva ketinggian untuk k = 20, 13, 5, 4 dan 4, yaitu:

$x^2 + y^2 = 16, \quad k = 20$

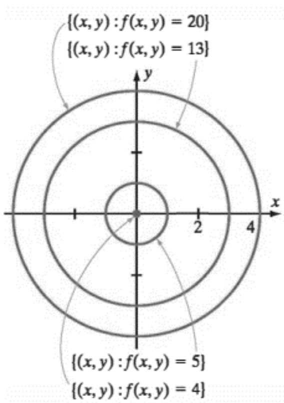
adalah lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari 4

$x^2 + y^2 = 9, \quad k = 13$

adalah lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari 3

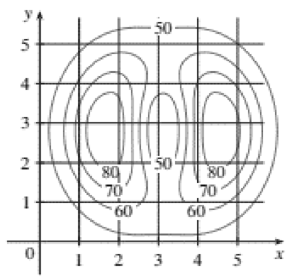
$x^2 + y^2 = 1, \quad k = 5$
adalah lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari 1

$x^2 + y^2 = 0, \quad k = 0$
adalah sebuah titik yaitu (0,0).
Maka kurva-kurva ketinggian (peta kontur) dari $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ dinyatakan pada Gambar 2.10 berikut.



Gambar 2.10 Kurva ketinggian $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

Contoh 5
Peta kontur fungsi *f* ditunjukkan oleh Gambar 2.12. Gunakan peta kontur ini untuk mengestimasi nilai *f*(1, 3) dan *f*(4, 5).



Gambar 2.11 Peta kontur fungsi *f*

Penyelesaian
Titik (1, 3) melalui jalur antara kurva ketinggian untuk nilai z = 70 dan z = 80. Sehingga kita dapat mengestimasi bahwa

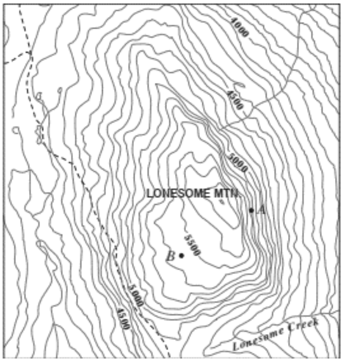
$$f(1,3) \approx 73$$

Dengan cara yang sama, untuk titik (4, 5) melalui jalur antara kurva ketinggian untuk nilai z = 50 dan z = 60. Sehingga kita dapat mengestimasi bahwa

$$f(4,5) \approx 56$$

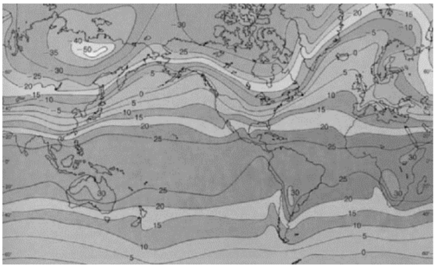
Penerapan Peta Kontur

Salah satu contoh penerapan peta kontur adalah peta topografi wilayah pegunungan, misalnya pada Gambar 2.12. Peta kontur ini menunjukkan kurva-kurva sudut eleveasi konstan untuk ketinggian di atas permukaan laut.



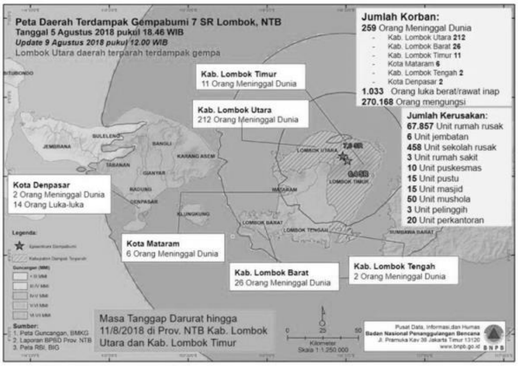
Gambar 2.12 peta topografi wilayah pegunungan

Peta kontur juga sering digunakan untuk menujukkan kondisi cuaca atau kondisi-kondisi dari berbagai titik di dalam peta. Sebagai contoh, suhu bervariasi dari satu tempat ke tempat lainnya. Andaikan $T(x, y)$ sama dengan suhu pada lokasi (x, y). Kurva ketinggian yang merepresentasikan suhu-suhu yang sama dinamakan **kurva isotermal *(ishotermal curve*)**, sebagaimana pada gambar 2.13.



Gambar 2.13 Suhu permukaan air laut rata-rata dunia pada bulan Januari dalam derajat Celsius.

Kurva isoseismik juga merupakan penerapan peta kontur dalam kehidupan sehari-hari. Kurva isoseismik (*isoseismic curve*) adalah kurva-kurva ketinggian yang bersesuaian dengan gempa yang sama pada suatu daerah, misalnya pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14. Kurva isoseismik Gempa Bumi 7 SR Lombok, 9 Agustus 2018.

Fungsi dengan peubah tiga atau lebih.

<u>Definisi</u>

Fungsi tiga peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari tiga bilangan real (x, y, z) pada domain $D \epsilon \mathbb{R}^3$dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan $f(x, y, z)$.

Misalnya, suhu T pada suatu titik di permukaan bumi tergantung pada garis bujur x dan garis lintang y dari posisi titik dan dan waktu t, sehingga dapat ditulis sebagai $T = f(x, y, t)$.

<u>Contoh 6</u>

Tentukan domain dari f jika

$$f(x, yz) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

Penyelesaian

Syarat agar f terdefinisi adalah $z - y > 0$, sehingga domain dari f adalah

$$D = \{(x, y, z) \epsilon\ \mathbb{R}^3 | z - y > 0\}$$

Contoh 7

Deskripsikan kurva ketinggian dari fungsi

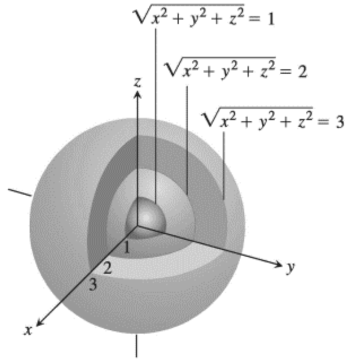
$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Penyelesaian

Nilai dari *f* adalah jarak dari titik O ke titik (*x*, *y*, *z*).
Setiap kurva dari *f* dinyatakan sebagai

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k$$

Untuk $k > 0$, kurva ketinggiannya berupa bola yang berpusat di O dengan dengan jari-jari *k* (sebagaimana dalam Gambar 2.16).



Gambar 2.16. Kurva ketinggian $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

> **Definisi**
>
> Fungsi *n* peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari n bilangan real (*x*, *y*, *z*) pada domain $D \in \mathbb{R}^n$ dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan *f*(*x*, *y*, *z*).

Misalnya, sebuah perusahaan menggunakan n jenis bahan baku yang berbeda untuk membuat sebuah produk. Jika c_i adalah biaya per unit untuk bahan baku ke-i, dan x_i adalah unit untuk bahan baku ke-i yang digunakan. Maka total biaya C untuk semua bahan baku adalah fungsi n peubah $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ yang dinyatakan

$$f(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n) = c_1x_1 + \ c_2x_2 + c_3x_3 \cdots c_nx_n$$

b. Limit dan kontinuitas

Untuk memahami limit fungsi dua peubah, mari kita bandingkan perilaku dua fungsi berikut jika *x* dan *y* mendekati 0 (atau (*x*, *y*) mendekati titik asal (0, 0))

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Tabel 1 dan 2 berikut menunjukkan nilai *f*(*x*, *y*) dan *g*(*x*,*y*) tepat pada tiga angka decimal, untuk (*x*, *y*) mendekati titik asal.

Tabel 2.1. Nilai *f*(*x*, *y*)

y	*x*						
	-1,0	-0,5	-0,2	0,0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
-0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
-0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa jika (*x*, *y*) mendekati (0, 0) maka nilai *f*(*x*, *y*). Dengan demikian dapat kita nyatakan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

Tabel 2.2. Nilai $g(x, y)$

y	x						
	-1,0	-0,5	-0,2	0,0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,000	-0,600	-0,923	-1,000	-0,923	-0,600	0,000
-0,5	0,600	0,000	-0,724	-1,000	-0,724	0,000	0,600
-0,2	0,923	0,724	0,000	-1,000	0,000	0,724	0,923
0,0	1,000	1,000	1,000		1,000	1,000	1,000
0,2	0,923	0,724	0,000	-1,000	0,000	0,724	0,923
0,5	0,600	0,000	-0,724	-1,000	-0,724	0,000	0,600
1,0	0,000	-0,600	-0,923	-1,000	-0,923	-0,600	0,000

Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa ketika (x, y) mendekati (0, 0), nilai $g(x, y)$ tidak mendekati bilangan apa pun. Dengan demikian dapat kita nyatakan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{tidak ada}$$

Secara umum kita menggunakan notasi

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Untuk mengindikasikan nilai $f(x,y)$ mendekati bilangan L ketika (x, y) mendekati titik (a, b) yang berada di sepanjang jalur dimana domain f berada. Dengan kata lain, kita dapat membuat nilai $f(x,y)$ sedekat mungkin dengan bilangan L dengan memilih titik (x, y) yang mendekati titik (a, b), tetapi tidak sama dengan (a, b)

Definisi

Misalkan f adalah fungsi dua peubah dengan domain D mencakup titik-titik yang sangat dekat dengan (a, b). Maka kita dapat mengatakan **limit $f(x,y)$ untuk (x, y) mendekati titik (a, b) adalah** L dengan menulis

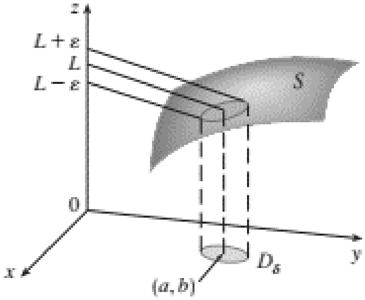
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

Jika $(x,y) \epsilon D$ dan $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} < \delta$ maka $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

Perhatikan $|f(x,y) - L|$ adalah jarak antara $f(x,y)$ dan L, dan $\sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$ adalah jarak antara titik (x, y) dan titik (a, b). Definisi di atas menyatakan bahwa jarak antara (x,y) dan L dapat dibuat kecil dengan membuat jarak titik (x, y) ke titik (a, b) kecil (tetapi tidak sama dengan 0). Jika setiap interval kecil $(L+\varepsilon, L-\varepsilon)$ yang berada di sekitar L, maka dapat menemukan cakram D_0 dengan pusat (a, b) dan jari-jari $\delta > 0$ sedemikian sehingga f memetakan semua titik di D_0 (kecuali titik (a, b)) ke interval $(L+\varepsilon, L-\varepsilon)$.

Ilustrasi yang berbeda dari definisi limit fungsi dua peubah ini direpresentasikan pada Gambar 2.17, dimana permukaan S adalah grafik dari f. Jika $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika (x, y) terbatas pada yang dilalui oleh cakram D_0 dan $(x,y) \neq (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, maka bagian berkorespondensi dengan S yang melalui bidang horizontal antara $z = L + \varepsilon$ dan $z = L - \varepsilon$.



Gambar 2.16 Ilustrasi definisi limit $f(x,y)$ untuk (x, y) mendekati titik (a, b)

Contoh 8

Tentukan apakah limit fungsi $f(x,y) = \frac{x+y+1}{x^2-y^2}$ untuk (x, y) mendekati (1, 2) ada atau tidak?

Penyelesaian

Karena f bentuknya fungsi rasional, maka perlu kita evaluasi nilai limit untuk penyebutnya terlebih dahulu, sehingga

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 - y^2) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(1,2)} y^2$$

$$= 1 - 4 = -3$$

Karena nilai limit untuk penyebutnya bukan 0, maka kita dapatkan

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y+1}{x^2-y^2} = \frac{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x+y+1)}{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x) + \lim_{(x,y)\to(1,2)}(y) + \lim_{(x,y)\to(1,2)}(1)}{-3}$$

$$= \frac{1+2+1}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Jadi limit fungsi *f* untuk (*x*, *y*) mendekati (1, 2) adalah $-\frac{4}{3}$

<u>Contoh 9</u>

Jika $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, maka apakah $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ada?

Penyelesaian

Fungsi *f* tersebut dapat didefinisikan di mana-mana pada bidang-*xy* kecuali di titik asal (0, 0).

Di seluruh titik pada sumbu-*x* selain (0, 0), nilai *f* adalah

$$f(x,0) = \frac{(x)(0)}{x^2+0} = \frac{0}{x^2} = 0$$

Jadi limit *f*(*x*, *y*) ketika (x, y) mendekati (0, 0) di sepanjang sumbu-*x* adalah

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{(x)(0)}{x^2+0} = 0$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan limit *f*(*x*, *y*) ketika (x, y) mendekati (0, 0) di sepanjang sumbu-*y* adalah

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{(0)(y)}{0+y^2} = 0$$

Walaupun kita sudah mendapatkan nilai limit yang sama sepanjang sumbu koordinat, kita perlu memeriksa pendekatan (0, 0) sepanjang garis *y* = *x*. Untuk seluruh $x \neq 0$ berlaku

$$f(x,x) = \frac{(x)(x)}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Sehingga

$f(x,y) \to \frac{1}{2}$ untuk $(x,y) \to (0{,}0)$ di sepanjang y = x

Dengan demikian karena kita mendapat nilai limit yang berbeda-beda untuk beberapa jalur, maka disimpulkan nilai limit *f* untuk (*x*, *y*) mendekati (0,0) tidak ada.

Kontinuitas pada Sebuah Titik
Definisi kontinuitas pada fungsi dua peubah tidak berbeda dengan kontinuitas pada fungsi satu peubah.

> **Definisi**
> Sebuah fungsi *f* dua peubah dikatakan kontinu pada titik (a, b) jika
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$
> Kita dapat menyatakan bahwa *f* kontinu di *D* jika *f* kontinu pada setiap titik (*a*, *b*) di *D*.

Untuk menyatakan bahwa *f*(*x*, *y*) kontinu pada titik (*a*, *b*), diperlukan syarat:

a. *f* memiliki nilai di (*a*, *b*);
b. *f* memiliki limit di (*a*, *b*);
c. Nilai f di (a, b) sama dengan nilai limitnya pada titik tersebut.

Secara intutif makna kontinuitas adalah titik (*x*, *y*) berubah sedikit maka *f*(*x*, *y*). Hal ini bermakna bahwa sebuah permukaan adalah grafik fungsi yang kontinu jika pada grafik tersebut tidak ada lubang atau patahan.

Suatu fungsi polinomial dengan dua peubah adalah jumlah bentuk $cx^m y^n$, dimana *c* adalah konstanta, *m* dan *n* adalah bilangan bulat non negatif. Fungsi rasional adalah rasio dari polinomial. Misalnya
$$f(x,y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$
adalah fungsi polinomial, sedangkan
$$g(x,y) = \frac{xy+1}{2x^2+y^2}$$
adalah fungsi rasional.

Seluruh fungsi polinomial kontinu di $\mathbb{R}^2$. Sedangkan **setiap fungsi rasional kontinu pada domainnya**.

Contoh10

Tentukan $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$

Penyelesaian

Karena $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ adalah sebuah polinomial, maka f kontinu di mana pun, sehingga kita dapat menentukan limit dengan mensubtitusi langsung

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$$
$$= 1^2 2^3 - 1^3 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$

Contoh 11

Dimanakah fungsi $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ kontinu?

Penyelesaian

Fungsi *f* tidak kontinu di (0, 0) karena fungsi tidak terdefinisi pada titik tersebut. Karena *f* adalah fungsi rasional, maka *f* kontinu pada domainnya yaitu:

$$D = \{(x,y) | (x,y) \neq (0,0)\}$$

Teorema A

Jika fungsi *g* dengan dua peubah kontinu di (*a*, *b*) dan fungsi *f* dengan satu peubah kontinu di *g*(*a*, *b*), maka fungsi komposit $f \circ g$ yang didefinisikan dengan $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$, kontinu di (*a*, *b*)

Contoh 12

Tunjukkan bahwa $F(x,y) = \sin(x^3 - 4xy + y^2)$ kontinu pada setiap titik di bidang-*xy*.

Penyelesaian

Kita dapat menyatakan $F(x, y) = f(g(x, y))$ dengan $f(t) = \sin t$ dan $g(x, y) = x^3 - 4xy + y^2$. Fungsi f kontinu di setiap bilangan t di $\mathbb{R}$. Demikian pula fungsi g adalah sebuah polinomial yang kontinu di setiap titik (x, y) di $\mathbb{R}^2$. Berdasarkan Teorema A, dapat kita simpulkan bahwa $F(x, y) = f(g(x, y))$ kontinu pula di setiap titik pada bidang tersebut.

Kontinuitas pada Sebuah Himpunan

Untuk menyatakan bahwa $f(x, y)$ kontinu pada suatu himpunan S harus berarti bahwa $f(x, y)$ kontinu di setiap titik pada himpunan tersebut.

Sebelumnya kita harus mengetahui istilah-istilah dalam himpunan pada bidang (ruang berdimensi lebih tinggi).

Definisi

Lingkungan (*neighborhood*) berjari-jari δ dari sebuah titik P adalah himpunan semua titik Q yang memenuhi $|Q - P| < \delta$

Sebuah titik P adalah **titik dalam** (*interior point*) dari himpunan S jika terdapat lingkungan P yang dimuat dalam S.

Bagian dalam (*interior*) dari S adalah himpunan seluruh titik dalam S.

Titik P adalah **titik batas** (*boundary point*) dari S jika setiap lingkungan dari P mengandung titik-titik yang berada di S dan juga titik-titik yang tidak berada di S.

Batas (*boundary*) dari S adalah himpunan seluruh titik batas dari S.

Sebuah himpunan disebut **terbuka** jika seluruh titiknya adalah titik dalam.

Sebuah himpunan disebut **tertutup** jika mengandung seluruh titik batasnya.

Jika S adalah sebuah himpunan terbuka, maka untuk menyatakan bahwa f kontinu di S secara tepat berarti bahwa f kontinu di setiap titik di S. Selain itu, jika S mengandung beberapa atau seluruh titik batas, maka kontinuitasnya harus diinterpretasikan secara lebih hati-hati. Untuk menyatakan bahwa *f* kontinu di sebuah titik batas *P* dari *S* berarti bahwa *f*(*Q*) harus mendekati *f(P*) ketika *Q* mendekati *P* melalui titik-titik di *S*.

Contoh 13
Misalkan

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 4 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Jika *S* adalah himpunan $\{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$, maka adalah benar menyatakan bahwa *f*(*x*, *y*) kontinu di *S*. Sebaliknya tidak benar menyatakan bahwa *f* kontinu di seluruh titik pada bidang.

Definisi limit dan kontinuitas pada fungsi dua peubah dan kesimpulan tentang limit dan kontinuitas seluruhnya dapat dikembangkan/ dipeluas ke fungsi tiga peubah atau lebih.

2. RANGKUMAN

Fungsi Dua Peubah atau Lebih

a. Fungsi dua peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari bilangan real (*x*,*y*) pada himpunan *D* dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan *f*(*x*,*y*).
b. Jika *f* adalah fungsi dua peubah dengan domain *D*, maka grafik *f* adalah himpunan semua titik (*x*, *y*, *z*) di $\mathbb{R}^3$ sedemikian sehingga *z* = *f*(*x*,*y*) dan (x, y) berada di *D*
c. Kurva ketinggian dari fungsi *f* dua peubah adalah kurva-kurva dengan persamaan $f(x,y) = k$, dimana k adalah suatu konstanta dalam range *f*
d. Sekumpulan kurva-kurva ketinggian dimanakan peta kontur
e. Fungsi tiga peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari tiga bilangan real (*x*, *y*, *z*) pada domain $D \epsilon \mathbb{R}^3$dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan *f*(*x*, *y*, *z*).
f. Fungsi *n* peubah adalah aturan yang memasangkan setiap pasangan berurutan dari n bilangan real (*x*, *y*, *z*) pada domain

$D \epsilon \mathbb{R}^n$dengan suatu bilangan riil tertentu yang dinotasikan *f*(*x*, *y*, *z*).

Limit dan Kontinuitas

a. Sebuah fungsi *f* dua peubah dikatakan kontinu pada titik (a, b) jika

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

b. Kita dapat menyatakan bahwa *f* kontinu di *D* jika *f* kontinu pada setiap titik (*a*, *b*) di *D*.
c. Seluruh fungsi polinomial kontinu di $\mathbb{R}^2$. Sedangkan setiap fungsi rasional kontinu pada domainnya
d. Jika fungsi *g* dengan dua peubah kontinu di (*a*, *b*) dan fungsi *f* dengan satu peubah kontinu di *g*(*a*, *b*), maka fungsi komposit $f \circ g$ yang didefinisikan dengan $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$, kontinu di (*a*, *b*)
e. Lingkungan (*neighborhood*) berjari-jari δ dari sebuah titik *P* adalah himpunan semua titik *Q* yang memenuhi $|Q - P| < \delta$
f. Sebuah titik *P* adalah titik dalam (*interior point*) dari himpunan *S* jika terdapat lingkungan *P* yang dimuat dalam *S*.
g. Bagian dalam (*interior*) dari S adalah himpunan seluruh titik dalam *S*.
h. Titik *P* adalah titik batas (*boundary point*) dari *S* jika setiap lingkungan dari *P* mengandung titik-titik yang berada di *S* dan juga titik-titik yang tidak berada di *S*.
i. Batas (*boundary*) dari S adalah himpunan seluruh titik batas dari *S*.
j. Sebuah himpunan disebut terbuka jika seluruh titiknya adalah titik dalam.

3. LATIHAN

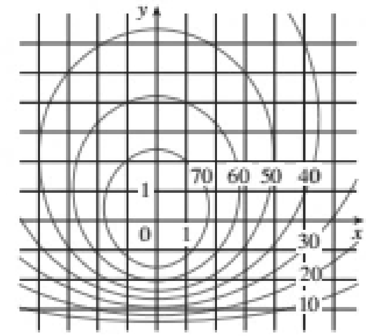
Kerjakan soal-soal latihan berikut

Tentukan domain dan *range* dari *f* berikut.

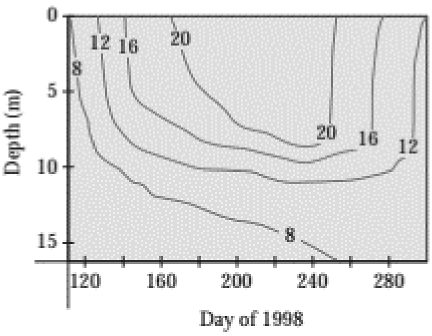
1. $f(x,y) = \cos(x + 2y)$.
2. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$.

Tentukan dan sketsa domain fungsi berikut.

3. $f(x,y) = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-1}$
4. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$
5. Misalkan $f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$, tentukan nilai $f(1,4), f(a,a^4)$ dan $f(1/x\,,x^4)$
6. Misalkan $g(x,y,z) = \sqrt{x\cos y} + z^2$, tentukan nilai $g(4,0,3)$ dan $f(2,\pi/3\,,-1)$
7. Peta kontur sebuah fungsi ditunjukkan oleh gambar berikut. Gunakan peta kontur ini untuk mengestimasi nilai $f(-3{,}3)$ dan $f(3,-2)$. Bagaimana perkiraan bentuk grafiknya?



8. Level ketinggian (isotemal) berikut menunjukkan suhu air (dalam °C) di Danau Long, Minnesota tahun 1998 merupakan fungsi kedalaman air (*depth*) dan waktu dalam tahun (*day of* 1998). Perkirakan suhu pada danau tersebut pada tanggal 9 Juni (hari ke-160 hari) pada kedalaman 10 meter dan tanggal 29 Juni (hari ke-180) pada kedalaman 5 meter.



9. Tentukan nilai $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$, jika ada
10. Tentukan nilai $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$, jika ada
11. Nyatakan himpunan S terbesar dimana $f(x,y) = \frac{x^2+3xy+y^2}{y-x^2}$ kontinu.
12. Nyatakan himpunan S terbesar dimana $f(x,y) = \sqrt{x - y + 1}$ kontinu.
13. Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada

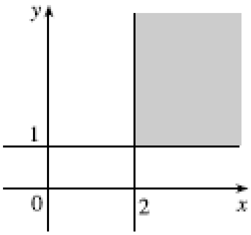
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

14. Gambarlah grafik $f(x,y) = e^{1/(x-y)}$ dengan menggunakan aplikasi atau software grafis, selanjutnya amati dimana fungsi diskontinu dan bandingkan dengan rumus dari fungsi tersebut.

3. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah jawaban soal-soal bernomor ganjil.

1. Domain f adalah $\mathbb{R}^2$ sedangkan rangenya adalah interval tertutup $[-1, 1]$
3. Domain f adalah $D = \{(x,y)|x \geq 2, y \geq 1\}$
   Grafik dari D adalah gambar berikut



5. $f(1,4) = 6$; $f(a, a^4) = a^6 + a^2$ dan $f(1/x, x^4) = 2x^2$
7. $f(-3,3) \approx 56$; $f(3,-2) \approx 35$. Pada titik (0,0) grafik menurun tajam dari atas ke bawah.
9. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2) = 1$
11. $S = \{(x,y)|y \neq x^2\}$

C. KEGIATAN BELAJAR 5

1. URAIAN MATERI

a. Turunan parsial

Secara umum, jika *f* adalah sebuah fungsi dengan dua peubah *x* dan *y*. Andaikan *x* bervariasi sedangkan *y* dijaga tetap konstan, kita sebut $y = y_0$, dimana y_0 adalah konstanta. Maka kita akan mendapatkan sebuah fungsi dengan satu peubah, dinyatakan sebagai $f(x, y_0)$. Jika *f* memiliki turunan di *x*, maka turunannya di $x = x_0$ disebut sebagai **turunan parsial *f* terhadap *x* di** (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$. Jadi

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama, **turunan parsial *f* terhadap *y* di** (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_y(x_0, y_0)$. Jadi

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta xy}$$

Terdapat beberapa alternatif notasi untuk turunan parsial, sebagaimana dijelaskan dalam rangkuman berikut.

Notasi Turunan Parsial

Jika $z = f(x, y)$, maka kita dapat menulis

Turunan parsial *f* terhadap *x* adalah

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

Turunan parsial *f* terhadap *x* adalah

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

Untuk mempermudah dalam menentukan turunan parsial *f* terhadap *x* dan turunan parsial *f* terhadap *y*, berikut dirangkum aturan yang dapat diterapkan.

> Aturan dalam menentukan Turunan Parsial *z* = *f*(*x*,*y*)
> 1. Untuk menentukan f_x, anggap *y* adalah sebuah konstanta dan turunkan *f*(*x*,*y*) terhadap *x*.
> 2. Untuk menentukan f_y, anggap *x* adalah sebuah konstanta dan turunkan *f*(*x*,*y*) terhadap *y*.

Contoh 1

Tentukan turunan parsial $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ terhadap *x* dan *y* di titik (2, 1).

Penyelesaian

Dengan menganggap *y* sebagai sebuah konstanta dan mendiferensialkan *f* terhadap *x*, kita dapatkan

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

Sehingga

$$f_x(2,1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Dengan menganggap *x* sebagai sebuah konstanta dan mendiferensialkan *f* terhadap *y*, kita dapatkan

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Sehingga

$$f_y(2,1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Contoh 2

Tentukan $\frac{\partial f}{\partial y}$ jika diketahui $f(x,y) = y \sin xy$

Penyelesaian

Dengan menganggap *x* sebagai sebuah konstanta maka kita dapatkan fungsi *f* sebagai fungsi satu peubah dengan bentuk:

$$f = u \cdot v, \qquad \text{dengan } u = y \text{ dan } v = \sin xy$$

Sehingga

$$f' = v \cdot u' + u \cdot v'$$

Selanjutnya kita mendiferensialkan *f* terhadap *y*, maka didapatkan

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = \sin xy \ \frac{\partial}{\partial y}(y) + y \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy)$$
$$= \sin xy + y \cos xy \frac{\partial}{\partial y}(xy)$$
$$= \sin xy + xy \cos xy$$

<u>Contoh 3</u>

Tentukan f_x dan f_y jika

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$$

Penyelesaian

Dengan menganggap *y* sebagai sebuah konstanta maka kita dapatkan fungsi *f* sebagai fungsi satu peubah dengan bentuk:

$$f = \frac{u}{v}, \qquad \text{dengan } u = 2y \text{ dan } v = y + \cos x$$

Sehingga

$$f' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Selanjutnya kita mendiferensialkan *f* terhadap *y*, maka didapatkan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right)$$
$$= \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(y + \cos x)(0) + 2y \sin x}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan turunan parsial *f* terhadap *y* adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right)$$

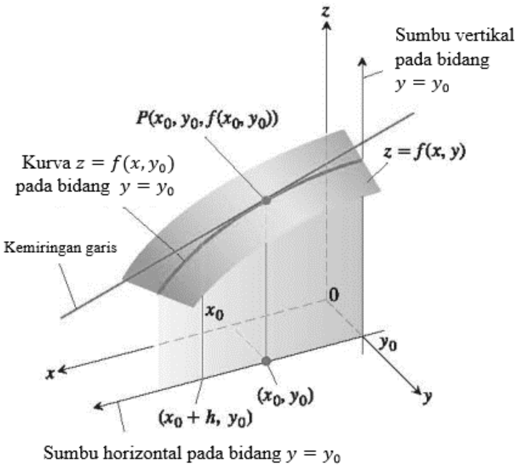
$$= \frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$
$$= \frac{(y+\cos x)(0) + 2y\sin x}{(y+\cos x)^2} = \frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

Interpretasi Turunan Parsial

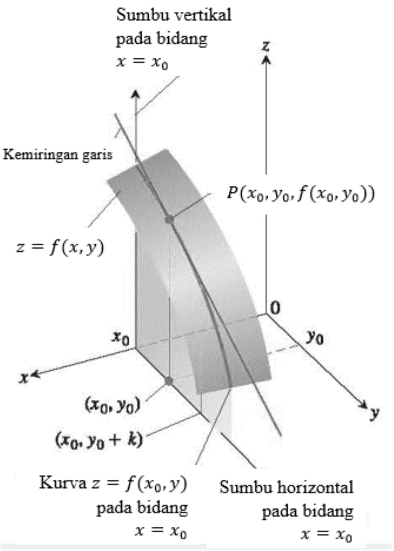
Kemiringan kurva $z = f(x, y_0)$ pada titik $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pada bidang $y = y_0$ adalah nilai **turunan parsial *f* terhadap *x* di $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$**. Pada Gambar 2.17 kemiringannya bernilai negatif. Kemiringan garis pada kurva di titik *P* adalah garis pada bidang $y = y_0$ yang melalui *P* dengan kemiringan ini. Turunan parsial *f* terhadap *x* menyatakan rata-rata perubahan *f* terhadap *x* ketika *y* dianggap tetap pada nilai y_0.

Kemiringan kurva $z = f(x_0, y)$ pada titik $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pada bidang vertikal $x = x_0$ adalah nilai **turunan parsial *f* terhadap *y* di $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$**, sebagaimana pada Gambar 2.18.

Kemiringan garis pada kurva di titik *P* adalah garis pada bidang $x = x_0$ yang melalui titik *P* dengan kemiringan ini. Turunan parsial *f* terhadap *y* menyatakan rata-rata perubahan *f* terhadap *y* ketika *x* dianggap tetap pada nilai x_0.



Gambar 2.17 Interpretasi geometris turunan parsial *f* terhadap *x*



Gambar 2.18 Interpretasi geometris turunan parsial *f* terhadap *y*

Contoh 4

Jika diketahui $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, tentukan $f_x(1,1)$ dan $f_y(1,1)$, interpretasi bilangan tersebut sebagai kemiringan garis.

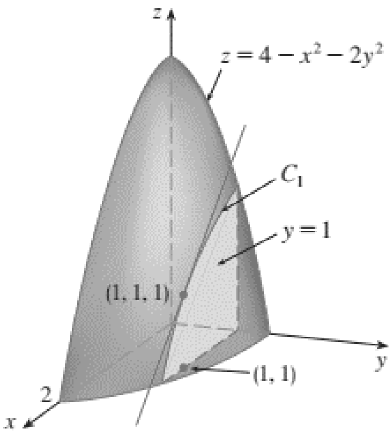
Penyelesaian

Kita dapatakan

$$f_x(x,y) = -2x$$
$$f_x(1,1) = -2$$
$$f_y(x,y) = -4y$$
$$f_x(1,1) = -4$$

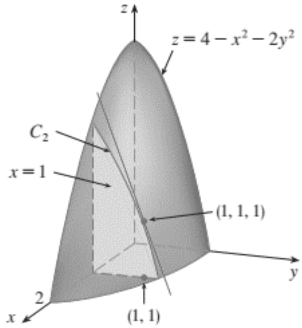
Grafik *f* adalah paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$.

Bidang vertikal $y = 1$ berpotongan dengan parabola $z = 2 - x^2$, $y = 1$ (pada Gambar 2.19 kita beri label C_1). Kemiringan bidang singgung parabola pada titik (1, 1, 1) adalah $f_x(1,1) = -2$.



Gambar 2.19 Ilustrasi f_x sebagai kemiringan garis

Dengan cara yang sama, kurva C_2 (pada Gambar 2.20) merupakan perpotongan bidang vertikal x = 1 dan parabola $z = 3 - 2x^2, x = 1$. Kemiringan bidang singgung parabola pada titik (1, 1, 1) adalah $f_y(1,1) = -4$.



Gambar 2.20 Ilustrasi f_y sebagai kemiringan garis

Turunan Parsial Fungsi Tiga Peubah atau Lebih

Notasi turunan parsial pada fungsi dua peubah juga diterapkan pada fungsi tiga peubah atau lebih. Jika $F(x, y, z)$ adalah fungsi dengan peubah *x*, *y* dan *z*, maka kita dapat menghitung $\partial F / \partial x$ dengan menganggap *y* dan *z* sebagai konstanta dan mendiferensialkan *f* terhadap *x*. Cara yang sama juga digunakan untuk menentukan turunan parsial *f* terhadap *y* dan *z*.

<u>Contoh 5</u>

Tentukan turunan parsial $F(x, y, z) = xz\sin(y^2z)$ terhadap *x*, *y* dan *z*.

Penyelesaian

Kita dapatkan turunan parsial *F* terhadap *x* sebagai berikut

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xz\sin(y^2z)) = z\sin(y^2z)$$

Turunan parsial *F* terhadap *y* adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xz\sin(y^2z)) = xz\frac{\partial}{\partial y}(\sin(y^2z)) \\ &= xz\cos(y^2z)\frac{\partial}{\partial y}(y^2z) = 2xyz^2\cos(y^2z)\end{aligned}$$

Turunan parsial *F* terhadap *y* adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xz\sin(y^2z)) \\ &= xz\frac{\partial}{\partial z}(\sin(y^2z)) + \sin(y^2z)\frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ &= xz\cos(y^2z) + x\sin(y^2z)\end{aligned}$$

Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Jika *f* adalah fungsi dua peubah dengan turunan parsial f_x dan f_y yang juga merupakan fungsi dua peubah, maka kita dapat mempertimbangkan turunan parsial kedua. Jika *z* = *f*(*x*, *y*) maka **turunan parsial kedua *f*** dinotasikan dengan

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Notasi f_{xy} (atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$) bermakna bahwa pertama kita turunkan terhadap *x* dan kemudian kita turunkan lagi terhadap *y*.

<u>Contoh 6</u>

Tentukan turunan parsial kedua fungsi

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Penyelesaian

Terlebih dahulu kita tentukan turunan parsial pertama f terhadap *x* dan *y*, kita dapatkan

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3$$
$$f_y = 3x^2y^2 - 4y$$

Untuk menentukan f_{xx}, turunkan $f_x = 3x^2 + 2xy^3$ terhadap *x*, sehingga diperoleh:

$$f_{xx} = 6x + 2y^3$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$f_{xy} = 6xy^2$$
$$f_{yx} = 6xy^2$$
$$f_{yy} = 6x^2y - 4$$

Perhatikan bahwa $f_{xy} = f_{yx}$. Hal ini menunjukkan bahwa pada turunan parsial kedua campuran f_{xy} dan f_{yx} hasilnya sama pada sebagian besar fungsi. Kondisi ini sesuai dengan Teorema yang dikemukakan oleh Alexis Clairaut (1713 – 1765).

Teorema Clairaut

Andaikan *f* terdefinisi pada cakram *D* yang memuat titik (*a*, *b*). Jika fungsi f_{xy} dan f_{yx} kontinu di *D*, maka

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Bukti

Untuk nilai yang sangat kecil *h*, dengan *h* ≠ 0, kita pertimbangkan bahwa

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)]$$
$$-[f(a, b+h) - f(a,b)]$$

Jika kita misalkan $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$ maka

$$\Delta(h) = g(a + h) + g(a)$$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, kita ketahui bahwa terdapat bilangan c antara a dan $a + h$ sedemikian sehingga

$$g(a + b) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Dengan menerapkan Teorema Nilai Rata-rata untuk f_x, kita dapatkan suatu bilangan d antara b dan $b + h$ sedemikian sehingga

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Dengan mengkombinasikan persamaan-persamaan di atas kita dapatkan

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Jika $h \to 0$ maka $(c, d) \to (a, b)$, maka kontinuitas f_{xy} pada (a, b) dinyatakan oleh

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta h}{h^2} = \lim_{(c,d) \to (a,b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b) \qquad (1)$$

Dengan cara yang sama, dapat kita nyatakan

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] \\ -[f(a + h, b) - f(a, b)]$$

Dengan menerapkan Teorema Nilai Rata-rata sebanyak dua kali, kita dapatkan kontinuitas f_{yx} pada (a, b) dinyatakan oleh

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta h}{h^2} = \lim_{(c,d) \to (a,b)} f_{yx}(c, d) = f_{yx}(a, b) \qquad (2)$$

Dengan demikian dari persamaan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

■

Turunan parsial ketiga atau lebih juga dapat didefinisikan. Misalnya

$$f_{xyy} = \left(f_{xy}\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

Contoh 7

Hitunglah f_{xxyz} jika $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$

Penyelesaian

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$
$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$
$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$
$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

2. RANGKUMAN

a. Turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_x(x_0, y_0)$ dinyatakan sebagai

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

b. Turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan sebagai $f_y(x_0, y_0)$ dinyatakan sebagai

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta xy}$$

c. Untuk menentukan f_x, anggap *y* adalah sebuah konstanta dan turunkan *f*(*x*,*y*) terhadap *x*.

d. Untuk menentukan f_y, anggap *x* adalah sebuah konstanta dan turunkan *f*(*x*,*y*) terhadap *y*.

e. Notasi f_{xx} (atau $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$) bermakna bahwa pertama kita turunkan terhadap *x* dan kemudian kita turunkan lagi terhadap *x*. Demikian juga untuk f_{xy}, f_{yx} dan f_{yy}.

3. LATIHAN

Kerjakan soa-soal latihan berikut

Tentukan turunan parsial pertama fungsi-fungsi berikut

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

2. $f(x,y) = x^4y^3 + 8x^2y$
3. $f(x,y) = e^{-y}\cos(\pi x)$
4. $f(x,y) = (2x - y)^4$
5. $f(x,y) = y^2e^{-x}$
6. $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$

Hitunglah $f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}, f_{xx}, f_{yy}$ dan f_{zz} fungsi berikut

7. $f(x,y,z) = 2x^3 + y^5z^8$
8. $f(x,y,z) = ze^{xyz}$

Untuk soal 9 – 10 buktikan bahwa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

9. $f(x,y) = 3e^{2x}\cos y$
10. $f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$
11. Jika $f(x,y) = \frac{2x-y}{xy}$,tentukan $f_x(3,-2)$ dan $f_y(3,-2)$
12. Jika $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$, tentukan $f_x(-1,4)$ dan $f_y(-1,4)$
13. Tentukan kemiringan garis singgung terhadap kurva dari perpotongan antara permukaan $36z = 4x^2 + 9y^2$ dengan $x = 3$ di titik (3, 2, 2)
14. Tentukan kemiringan garis singgung terhadap kurva dari perpotongan antara permukaan $3z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ dengan $x = 1$ di titik $\left(1,-2,\frac{1}{3}\sqrt{11}\right)$

4. KUNCI JAWABAN

Jawaban soal-soal bernomor ganjil

1. $f_x = -3y,\ f_y = 5y^4 - 3x$
3. $f_x = -y^2e^{-x},\ f_y = 2ye^{-x}$
5. $f_x = -\pi e^{-y}\sin(\pi x),\ f_y = -e^{-y}\sin(\pi y)$
7. $f_{xy} = 0,\ f_{yz} = 40y^4z^7,\ f_{xz} = 0,\ f_{xx} = 12x,$ $f_{yy} = 20y^3z^8$ dan $f_{zz} = 56y^5z^6$
9. $f_{xy} = -6e^{2x}\sin y = f_{yx}$
11. $f_x(3,-2) = \frac{1}{9}$ dan $f_y(3,-2) = -\frac{1}{2}$
13. 1

D. KEGIATAN BELAJAR 6

1. URAIAN MATERI

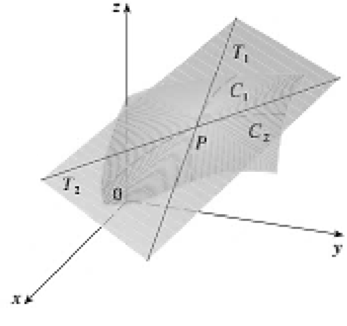
a. Bidang Singgung dan Aproksimasi Linier

Ide yang paling penting dari kalkulus satu peubah adalah ketika kita memperbesar tampilan grafik pada titik dimana f dapat didiferensialkan, grafik menjadi tidak bisa dibedakan dengan garis singgungnya. Hal yang sama juga berlaku pada fungsi dua peubah. Ketika kita memperbesar tampilan suatu titik pada permukaan dimana f dapat didiferensialkan, permukaan terlihat seperti bidang (yang mana ini adalah bidang singgung) dan kita dapat mengaproksimasi fungsi dengan sebuah fungsi linier dua peubah.

Bidang Singgung

Misalkan sebuah permukaan S memiliki persamaan $z = f(x, y)$ yang kontinu pada turunan parsial pertama dan andaikan $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah titik pada S. Andaikan C_1 dan C_2 adalah kurva-kurva yang memotong bidang vertikal $y = y_0$ dan $x = x_0$ dan permukaan S. Maka titik P melalui C_1 dan C_2.

Andaikan T_1 melalui kurva C_1 dan T_2 melalui kurva C_2. Andaikan pula masing-masing keduanya adalah garis singgung kurva C_1 dan C_2 pada titik P. Maka bidang singgung permukaan S pada titik P didefinisikan sebagai bidang yang memuat bidang singgung T_1 dan T_2 sebagaimana dalam Gambar 2.21.



Gambar 2.21 Bidang singgung permukaan S pada titik P

Jika C adalah adalah kurva terletak pada permukaan S dan melalui titik P, maka garis singgung C pada titik P juga terletak pada bidang singgung dari S. Dapat kita pahami bahwa bidang singgung dari S di titik P terdiri dari seluruh garis singgung yang mungkin pada P terhadap kurva yang terletak pada S dan melalui P. Bidang singgung pada P adalah bidang yang paling mendekati permukaan S di dekat titik P.

Persamaan garis yang melalui titik $P(x_0, y_0, z_0)$ memiliki persamaan dalam bentuk

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dengan membagi persamaan di atas dengan C dan andaikan $a = -A/C$ dan $b = -B/C$, maka kita dapat menulis persamaan di atas menjadi

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \text{ ....(1)}$$

Jika persamaan (1) merepresentasikan bidang singgung di titik P, maka perpotongannya dengan bidang $y = y_0$ haruslah merupakan garis singgung T_1. Maka persamaan (1) memberikan

$$z - z_0 = a(x - x_0) \quad \text{ketika} \quad y = y_0$$

Persamaan ini adalah persamaan garis dengan kemiringan a. Karena garis singgung $T_1 = f_x(x_0, y_0)$, maka $a = f_x(x_0, y_0)$. Dengan cara yang sama, untuk $x = x_0$) didapatkan persamaan $z - z_0 = b(y - y_0)$ yaitu persamaan garis dengan kemiringan b. Karena garis singgung $T_2 = f_y(x_0, y_0)$, maka $b = f_y(x_0, y_0)$.

Misalkan f memiliki turunan parsial yang kontinu. Persamaan bidang singgung $z = f(x, y)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

<u>Contoh 1</u>
Tentukan bidang singgung paraboloid eliptik $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ di titik (1, 1, 3).

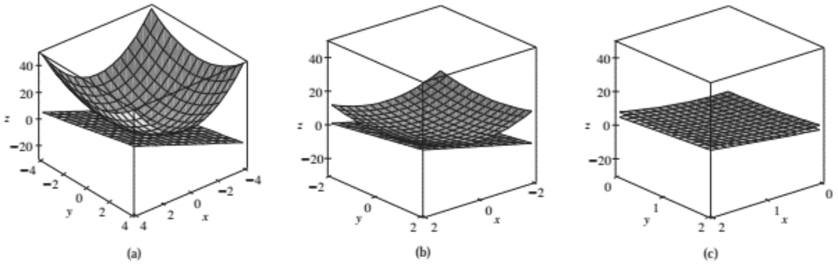
Penyelesaian
Kita dapatkan turunan parsial f adalah

$f_x(x, y) = 4x$ maka untuk (1,1) didapat $f_x(1,1) = 4$
$f_y(x, y) = 2y$ maka untuk (1,1) didapat $f_y(1,1) = 2$

Sehingga didapatkan persamaan bidang singgung f di titik (1, 1, 3) adalah

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$
$$z = 4x + 2y - 3$$

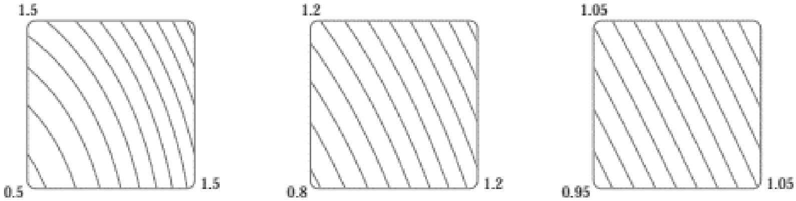
Gambar 2.22 (a) berikut adalah grafik paraboloid eliptik f dan bidang singgungnya di titik (1, 1, 3)



Gambar 2.24 Tampilan f yang diperbesar terhadap titik (1,1,3)

Gambar 2.22 (b) dan (c) adalah tampilan grafik f yang diperbesar terhadap titik (1, 1, 3), sehingga pada Gambar 2.22 (c) didapat grafik yang mendatar yang diperkirakan merupakan bidang singgungnya.

Gambar 2.23 adalah peta kontur $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ yang diperbesar tampilannya pada titik (1, 1), sehingga kurva-kurva ketinggiannya menyerupai garis-garis yang sejajar.



Gambar 2.25 Peta kontur *f* yang diperbesar terhadap titik (1,1,3)

Aproksimasi Linier

Pada Contoh 1 kita dapatkan persamaan bidang singgung $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ di titik (1, 1, 3) adalah $z = 4x + 2y - 3$. Berdasarkan pandangan visual pada Gambar 2.23 dan 2.24, diperoleh fungsi dua peubah yang merupakan aproksimasi terhadap $f(x,y)$ ketika (x,y) mendekati (1, 1), yaitu:

$$L(x,y) = 4x + 2y - 3$$

Fungsi L dinamakan linierisasi fungsi ***f*** pada (1, 1) dan aproksimasi

$$f(x,y) \approx 4x + 2y - 3$$

dinamakan aproksimasi linier atau aproksimasi bidang singgung *f* pada (1, 1).

Secara umum, persamaan bidang singgung fungsi dua peubah *f* pada titik (*a*, *b*) adalah

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Fungsi linier dimana grafik merupakan bidang singgungnya, dinyatakan sebagai

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

dinamakan **linierisasi fungsi *f* pada titik (*a*, *b*)** dan aproksimasi

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

dinamakan **aproksimasi linier** atau **aproksimasi bidang singgung *f*** pada titik (*a*, *b*).

Pertimbangkan fungsi dua peubah *z* = *f*(*x*, *y*) dan andaikan *x* berubah dari a ke $a + \Delta x$ dan *y* berubah dari *b* ke $b + \Delta y$. Maka ***increment*** (penambahan) yang berkorespondensi dengan *z* adalah

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a,b)$$

Increment Δz merepresentasikan perubahan nilai f ketika (x, y) berubah dari (a, b) menjadi $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Sehingga kita dapat mendefinisikan keterdiferensialan suatu fungsi dua peubah sebagai berikut

Definisi
Jika $z = f(x, y)$, maka f terdiferensialkan di (a, b) apabila Δz diekspresikan dalam bentuk

$$\Delta z = f_x(a, b) + f_y(a, b) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

dimana ε_1 dan $\varepsilon_2 \to 0$ sebagai $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

Kadangkala sulit menggunakan definisi di atas untuk mengecek keterdiferensialan suatu fungsi. Teorema berikut memberikan suatu kondisi yang lebih mudah untuk mengetahui keterdiferensialan.

Teorema
Jika turunan parsial f_x dan f_x berada di dekat (a, b) dan kontinu di (a, b), maka f dapat didiferensialkan di (a, b)

Contoh 2

Tunjukkan bahwa $f(x, y) = xe^{xy}$ dapat didiferensialkan di (1, 0) dan temukan linierisasi pada titik tersebut. Kemudian gunakan aproksimasi f(1.1, -0.1).

Penyelesaian

Turunan parsialnya adalah

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$
$$f_x(1,0) = e^{(1)(0)} + (1)e^0 = e^0 + 0 = 1$$
$$f_y(x, y) = x^2 e^{xy}$$
$$f_y(1, 0) = 1^2 e^{(1)(0)} = 1$$

Karena f_x dan f_y adalah fungsi yang kontinu, maka f dapat didiferensialkan. Linierisasinya adalah

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1{,}0) + f_x(1{,}0)(x-1) + f_y(1{,}0)(y-0) \\ &= 1 + 1(x-1) + 1\cdot y = x + y \end{aligned}$$

Sedangkan aproksimasi liniernya adalah

$$f(x,y) \approx f(1{,}0) + f_x(1{,}0)(x-1) + f_y(1{,}0)(y-0)$$
$$f(x,y) \approx x + y$$

Sehingga

$$f(1.1,-0.1) \approx 1.1 + (-0.1) = 1$$
$$((1.1)e^{(1.1)(-0.1)} \approx 1$$

Kita bandingkan dengan nilai aktual

$$f(1.1,-0.1) = (1.1)e^{(1.1)(-0.1)} = 1.1e^{-0.11} \approx 0.9854$$

Diferensial Total

Untuk fungsi satu peubah *y* = *f*(*x*) yang dapat didiferensialkan, kita dapat mendefinisikan diferensial *dx* sebagai sebuah variabel independen, artinya *dx* dapat diberi nilai jika ada bilangan riil. Maka diferensial *y* didefinisikan sebagai

$$dy = f'(x)dx$$

Pada fungsi dua variabel *z* = *f*(*x*, *y*) yang dapat didiferensialkan, kita dapat mendefinisikan diferensial *dx* dan *dy* sebagai variabel independen. artinya *dx* dan *dy* dapat diberi nilai jika ada bilangan riil. Maka diferensialkan *dz*, juga dinamakan diferensial toal, yang didefinisikan sebagai

$$\boxed{dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Jika $dx = \Delta x = x - a$ dan $dy = \Delta y = y - b$, maka diferensial *z* menjadi

$$dz = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Sehingga aproksimasi linier dapat ditulis sebagai

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

<u>Contoh 3</u>

a. Jika $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, tentukan diferensial *dz*.
b. Jika x berubah dari 2 ke 2.05 dan y berubah dari 3 ke 2.96, bandingkan nilai Δz dan *dz*.

Penyelesaian

a. Diferensial total *dz* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy \end{aligned}$$

b. Substitusi $x = 2$, $dx = \Delta x = 2.05 - 2 = 0.05$, $y = 3$ dan $dx = \Delta x = 2.96 - 3 = -0.4$, sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} dz &= (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)(0.05) + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3)(-0.04) \\ &= (13)(0.05) + (0)(-0.04) = 0.65 \end{aligned}$$

Perubahan *z* adalah

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3) \\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - \\ &\quad [(2)^2 + 3(2)(3) - (3)^2] \\ &= 0.6449 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\Delta z \approx dz$, tetapi *dz* lebih mudah dihitung

Fungsi Tiga Peubah atau Lebih

Aproksimasi linier, keterdiferensial dan diferensial pada fungsi ini dapat didefinisikan sebagaimana pada fungsi dua peubah.

Aproksimasai linier pada fungsi tiga peubah diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \approx f(a, b, c) &+ f_x(a, b, c)(x - a) \\ &+ f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) \end{aligned}$$

Jika $w = f(x, y, z)$, maka ***increment*** dari *w* adalah

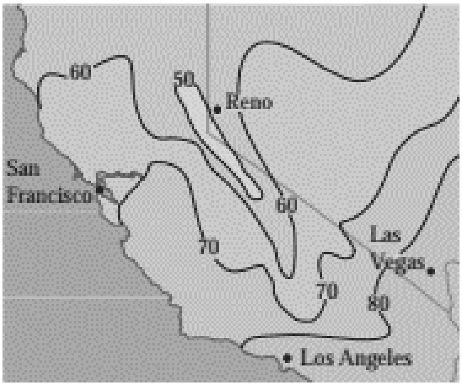
$$\Delta w = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$$

Diferensial total dw didefinisikan sebagai

$$dw = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$
$$= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

b. Turunan Berarah dan Vektor Gradien

Peta cuaca pada Gambar 2.24 menunjukkan peta kontur fungsi suhu $T(x, y)$ untuk wilayah California dan Nevada pada pukul 0.3.00 PM di suatu hari pada bulan Oktober. Kurva ketinggian atau isotermal menghubungkan lokasi dengan suhu yang sama. Misalkan kita pilih wilayah Reno, maka turunan parsial T_x pada suatu lokasi adalah rata-rata perubahan suhu terhadap jarak jika kita bepergian ke arah timur dari Reno. T_y adalah rata-rata perubahan suhu terhadap jarak jika kita bepergian ke arah utara. Tapi bagaimana jika kita ingin mengetahui rata-rata perubahan suhu ketika kita akan bepergian ke arah tenggara (menuju ke Las Vegas), atau menuju ke arah yang lain? Untuk menyelesaikan masalah tersebut kita gunakan **Turunan Berarah**, yang memungkinkan kita untuk menemukan rata-rata perubahan suatu fungsi dua peubah atau lebih pada berbagai arah.



Gambar 2.24 Peta kontur fungsi suhu $T(x, y)$ di California dan Nevada pada bulan Oktober

Turunan Berarah

Jika $z = f(x, y)$ maka turunan parsial f_x dan f_y didefinisikan sebagai

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Kedua formula tersebut merepresentasikan rata-rata perubahan z pada arah x dan y, yaitu arah pada vektor satuan **i** dan **j**.

Misalkan kita ingin mengetahui rata-rata perubahan z pada titik (x_0, y_0) pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Pertimbangkan permukaan S dengan persamaan $z = f(x, y)$ dan andaikan $z_0 = f(x_0, y_0)$ maka titik $P(x_0, y_0)$ melalui S. Bidang vertikal yang melalui P pada arah **u** memotong S pada suatu kurva C (sebagaimana pada Gambar 2.25). Kemiringan garis singgung T terhadap C pada titik P adalah rata-rata perubahan z pada arah **u**.

Jika $Q(x, y, z)$ adalah titik lain di C. Sedangkan P'dan Q' adalah proyeksi dari P dan Q pada bidang-xy. Maka vektor $\overrightarrow{PQ}$ paralel dengan **u**, sehingga

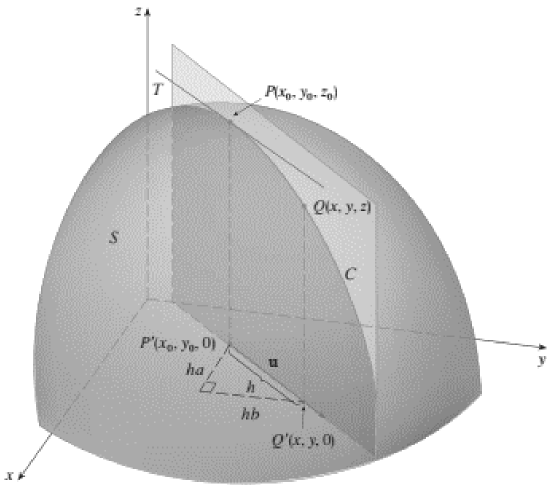
$$\overrightarrow{PQ} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

untuk beberapa skalar h.

Oleh karena itu $x - x_0 = ha$ dan $y - y_0 = hb$, maka $x = x_0 + ha$ dan $y = y_0 + hb$, sehingga

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Jika kita mabil limitnya untuk $h \to 0$, kita dapatkan rata-rata perubahan z (terhadap jarak) pada arah **u**, yang dinamakan **turunan berarah *f* pada arah u**.



Gambar 2.25 Kemiringan garis singgung *T* terhadap *C* pada titik *P*

> Definisi
> Turunan berarah f di titik $P(x_0, y_0)$ pada arah $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ adalah
>
> $$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
>
> Jika limitnya ada

Jika $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1,0\rangle$, maka $D_i f = f_x$. Dan jika $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$, maka $D_j f = f_y$. Dengan kata lain, turunan parsial f terhadap *x* dan *y* adalah kasus khusus dari turunan berarah.

<u>Contoh 4</u>

Gunakan Gambar 2.24 untuk mengestimasi nilai turunan berarah fungsi suhu (temperatur) pada wilayah Reno menuju ke arah tenggara (atau arah ke Las Vegas).

Penyelesaian

Kita dapat memperkirakan turunan berarah $D_u T$ dengan menghitung rata-rata perubahan suhu antara titik dimana garis berpotongan dengan kurva ketinggian atau isotermal $T = 50$ dan T

= 60. Suhu pada titik tenggara dari Reno adalah T = 60°F dan suhu pada titik barat laut dari Reno adalah T = 50°F. Jarak antara kedua titik diperkirakan 75 mil. Jadi rata-rata perubahan suhu pada arah tenggara adalah

$$D_u T \approx \frac{60-50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13°\mathrm{F/mil}$$

Untuk menghitung turunan berarah suatu fungsi dapat digunakan rumus pada Teorema berikut.

Teorema

Jika f adalah fungsi yang dapat didiferensialkan terhadap x dan y, maka f memiliki turunan berarah pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ dan

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

Bukti

Jika kita mendefinisikan suatu fungsi g dengan satu variabel h dimana

$$g(h) = (x_0 + ha, y_0 + hb)$$

Maka berdasarkan definisi turunan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+ha, y_0+hb) - g(x_0,y_0)}{h} \\ &= D_u f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Di satu sisi, kita juga dapat menyatakan $g(h) = f(x,y)$ dimana $x = x_0 + ha,\ \ y = y_0 + hb$, sehingga didapat

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

Jika kita pilih h = 0, maka $x = x_0,\ \ y = y_0$ dan

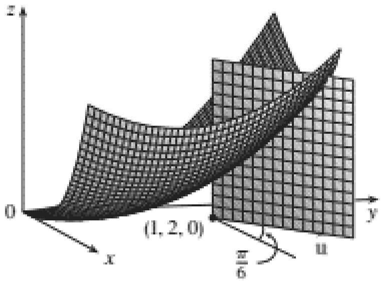
$$g'(0) = f_x((x_0,y_0)a + f_y((x_0,y_0)b$$

Sehingga diperoleh

$$D_u f(x_0,y_0) = f_x((x_0,y_0)a + f_y((x_0,y_0)b \qquad \blacksquare$$

<u>Contoh 5</u>
Tentukan turunan berarah $D_u f(x,y)$ jika
$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$
Pada titik (1,2) dan arah vektor satuan **u** dengan sudut $\theta = {}^{\pi}/_{6}$.

Penyelesaian
Jika vektor **u** membentuk suatu sudut θ dengan sumbu-*x* (sebagaimana dalam Gambar 2.26), maka kita dapat menyatakan $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$. Sehingga kita peroleh
$$\mathbf{u} = \langle \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rangle = \langle \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2} \rangle$$
Selanjutnya kita tentukan turunan parsial *f* terhadap *x* dan *y*, yaitu
$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$$
$$f_y(x,y) = -3x + 8y$$
Sehingga didapat
$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= (3x^2 - 3y)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + (-3x + 8y)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(3\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}y\right) + (8y - 3x)\right] \end{aligned}$$
Maka didapat turunan berarah *f* pada titik (1, 2) dengan arah vektor satuan **u** adalah
$$\begin{aligned} D_u f(1,2) &= \frac{1}{2}\left[\left(3\sqrt{3}(1)^2 - 3\sqrt{3}(2)\right) + (8(2) - 3(1))\right] \\ &= \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Gambar 2.26. Turunan berarah *f* pada titik (1, 2) dengan arah vektor satuan **u**

<u>Contoh 6</u>

Andaikan $f(x, y) = 1 + 2x + y^3$. Tentukan turunan bearah *f* pada titik (2, 1) dengan arah dari P ke Q(14, 6).

Penyelesaian

Terlebih dahulu kita tentukan turunan parsial *f* terhadap *x* dan *y*, yaitu

$$f_x(x, y) = 2 \qquad f_x(2,1) = 2$$
$$f_y(x, y) = 3y^2 \qquad f_y(2,1) = 3(1)^2 = 3$$

Selanjutnya mencari arah yang bersesuaian, yaitu dari titik *P*(2,1) ke *Q*(14, 6). Maka didapat

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 14 - 2, 6 - 1\rangle = \langle 12, 5\rangle = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

Karena $\overrightarrow{PQ}$ bukan sebuah vektor satuan, maka harus mengubahnya menjadi vektor satuan **u**, sehingga

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{\sqrt{144 + 25}}$$
$$= \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{13} = \langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13}\rangle$$

Maka didapat turunan berarah *f* pada titik (2, 1) dengan arah vektor satuan **u** adalah

$$D_u f(2,1) = (2)\left(\frac{12}{13}\right) + (3)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{24 + 15}{13} = 3$$

<u>Vektor Gradien</u>

Turunan berarah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dapat ditulis sebagai hasil kali titik (*dot product*) dari dua vektor.

$$\begin{aligned} D_u f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \langle a, b\rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Definisi
Jika *f* adalah fungsi dengan peubah *x* dan *y*, maka **gradien** dari *f* adalah fungsi vektor ∇f (dibaca "del *f*") dapat didefinisikan sebagai

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Hubungan turunan berarah dan vektor gradien

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$$

<u>Contoh 7</u>
Tentukan turunan berarah $f(x,y) = xe^y + \cos xy$ pada titik (2, 0) dengan arah vektor $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Penyelesaian
Vektor satuan **u** dengan arah **v** adalah

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{9+16}}$$
$$= \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \rangle$$

Turunan parsial f pada titik (2, 0) diberikan oleh

$$f_x(x,y) = e^y - y\sin xy$$
$$f_x(2,0) = e^0 - (0)\sin(2\cdot 0) = 1$$
$$f_y(x,y) = xe^y - x\sin xy$$
$$f_y(2,0) = (2)(e^0) - (2)\sin(2\cdot 0) = 2$$

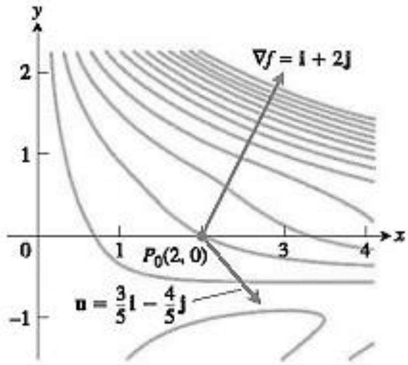
Maka gradien *f* pada titik (2, 0) adalah

$$\nabla f(2,0) = f_x(2,0)\mathbf{i} + f_y(2,0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \langle 1, 2\rangle$$

Turunan berarah f pada titik (2, 0) dengan arah vektor satuan u adalah

$$D_u f(2,0) = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle = \left(\frac{3}{5}\right)(1) + \left(-\frac{4}{5}\right)(2) = -1$$

Gambar ∇f sebagai sebuah vektor ditunjukkan oleh Gambar 2.27. Gambar yang sama juga menunjukkan beberapa kurva ketinggian dari *f*. Rata-rata dimana *f* berubah pada titik (2, 0) dengan arah u adalah -1.



Gambar 2.27 Hubungan ∇f dan kurva ketinggian dari *f*

Kita evaluasi *dot product* pada rumus berikut

$$D_u f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

dimana θ adalah sudut antara vektor ∇f dengan u, sehingga didapat sifat-sifat berikut.

Sifat-sifat turunan berarah $D_u f = |\nabla f| \cos \theta$

1. Fungsi f meningkat dengan cepat ketika θ = 1 atau θ = 0 dan u adalah arah dari ∇f. Fungsi f **meningkat lebih cepat** pada arah vektor gradien ∇f di titik P. Turunan pada arah ini adalah
$$D_u f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|$$
2. Dengan cara yang sama, fungsi f menurun dengan cepat ketika $\theta = \pi$ dan **u** adalah arah dari ∇f. Fungsi f **menurun** lebih cepat pada arah $-|\nabla f|$. Turunan pada arah ini adalah
$$D_u f = |\nabla f| \cos \pi = -|\nabla f|$$
3. Setiap arah **u** yang ortogonal terhadap vektor gradien $\nabla f \neq 0$ adalah arah perubahan nol pada f karena $\theta = {}^{\pi}/_{2}$ dan
$$D_u f = |\nabla f| \cos\left({}^{\pi}/_{2}\right) = |\nabla f| \cdot 0 = 0$$

Turunan berarah dan gradien pada fungsi dua peubah, juga berlaku pada fungsi tiga peubah atau lebih.

Jika $f(x, y, z)$ adalah fungsi tiga peubah yang dapat didiferensialkan dan $\mathbf{u} = \langle a, b. c\rangle$, maka f memiliki turunan pada arah vektor satuan **u** yaitu

$$D_u f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Vektor gradien f dinyatakan sebagai

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Turunan berarah f juga dapat dinyatakan sebagai

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

<u>Contoh 8</u>

Tentukan arah dimana fungsi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

a. Meningkat lebih cepat pada titik (1, 1)
b. Menurun lebih cepat pada titik (1, 1)
c. Apakah arah perubahan nol dari *f* pada titik (1, 1)?

Penyelesaian

a. Fungsi *f* meningkat lebih cepat pada arah ∇f di titik (1, 1). Gradiennya adalah

$$\nabla f(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$
$$\nabla f(1,1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Arahnya adalah vektor satuan u yaitu

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

b. Fungsi *f* meningkat lebih cepat pada arah $-\nabla f$ di titik (1, 1), yaitu pada arah vektor satuan

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

c. Arah perubahan nol dari *f* pada titik (1, 1) adalah ortogonal terhadap ∇f yaitu

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \text{ dan } -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

<u>Contoh 8</u>

Misalkan suhu pada titik (*x*, *y*, *z*) pada ruang dinyatakan oleh fungsi

$$f(x,y,z) = \frac{80}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}$$

dimana *T* diukur dalam derajat Celsius, sedangkan *x*, *y*, *z* dalam meter. Pada arah mana suhu meningkat lebih cepat pada titik (1, 1, -2)? Berapakah rata-rata maksimum peningkatannya?

Penyelesaian
Gradien dari *T* adalah

$$\nabla T(x,y,z) = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{j}$$

$$-\frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}(-x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k})$$

Gradien dari *T* pada titik (1, 1, -2) adalah

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{(1+1^2+2\cdot 1^2+3\cdot 2^2)^2}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

$$= \frac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

Fungsi *T* meningkat dengan cepat di titik (1, 1, -2) pada arah $\nabla T = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$, atau ekuivalen dengan arah vektor $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ atau pada arah vektor satuan

$$\mathbf{u} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}|} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{41}} = -\frac{1}{\sqrt{41}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{41}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{41}}\mathbf{k}$$

Rata-rata maksimum peningkatan *f* pada titik (1, 1, -2) adalah panjang skalar vektor gradiennya yaitu

$$|\nabla T| = \left|\frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\right| = \frac{5}{8}\sqrt{41}$$

Maka Rata-rata maksimum peningkatan suhu adalah $\frac{5}{8}\sqrt{41}\,{}^\circ\mathrm{C}/m$

Turunan berarah dan Gradien terhadap Kurva Ketinggian

Andaikan permukaan S adalah grafik fungsi dengan tiga peubah $F(x,y,z)$ dengan persamaan kurva permukaan $F(x,y,z) = k$ dan andaikan titik $P(x_0, y_0, z_0)$ berada pada S. Andaikan C sebagai kurva pada permukaan S dan melalui titik P. Kurva C dideskrisikan oleh fungsi vektor yang kontinu $\mathbf{r}(t) =$

$\langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Misalkan t_0 adalah nilai parameter yang berkorespondensi dengan *P*, sehingga $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$.

Karena *C* berada pada *S*, maka setiap titik $(x(t), y(t), z(t))$ harus memenuhi persamaan S, yaitu

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Jika *x*, *y* dan *z* adalah fungsi yang dapat didiferensialkan terhadap *t* dan *F* juga dapat didiferensialkan, maka kita dapat menggunakan aturan rantai untuk mendiferensialkan kedua sisi pada persamaan di atas, yaitu

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Karena $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ dan $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$ maka kita dapat menyatakan persamaan di atas menjadi sebuah *dot product* yaitu

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Secara khusus, ketika $t = t_0$ kita dapatkan $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ sehingga

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

Hal ini menujukkan bahwa $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ tegak lurus dengan $\mathbf{r}'(t_0)$. Jika $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, **bidang singgung terhadap kurva ketinggian** $F(x, y, z) = k$ pada titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah bidang yang melalui P dan memiliki vektor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, persamaannya adalah

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

Garis normal terhadap *S* adalah garis yang melalui *P* dan tegak lurus dengan bidang singgung. Arah garis normal ditentukan oleh vektor gradien $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Persamaan simetriknya adalah

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Contoh 9

Tentukan persamaan bidang singgung adn garis normal pada titik (-2, 1, -3) terhadap elipsoid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

Penyelesaian

Elipsoid tersebut adalah bidang ketinggian (*level surface*) dengan *k* = 3 dari fungsi

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Turun parsial pertama F pada titik (-2, 1, -3) adalah

$F_x(x, y, z) = \frac{1}{2}x$, maka $F_x(-2,1,-3) = -1$

$F_y(x, y, z) = 2y$, maka $F_y(-2,1,-3) = 2$

$F_z(x, y, z) = \frac{2}{9}z$, maka $F_z(-2,1,-3) = -\frac{2}{3}$

Persamaan bidang singgung pada titik $(-2,1,-3)$ adalah

$$-1(x+2) + 2(x-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0$$

Jika disederhanakan akan diperoleh persamaan

$$3x - 6y + 2z = 18 = 0$$

Persamaan simetrik dari garis normal adalah

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$

2. RANGKUMAN

Bidang Singgung dan Aproksimasi Linier

a. Misalkan *f* memiliki turunan parsial yang kontinu. Persamaan bidang singgung $z = f(x, y)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

b. Linierisasi fungsi *f* pada titik (*a*, *b*) adalah

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

c. Aproksimasi linier atau aproksimasi bidang singgung *f* pada titik (*a*, *b*) adalah

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

d. Jika *z* = *f*(*x*, *y*), maka *f* terdiferensialkan di (a, b) apabila Δz diekspresikan dalam bentuk

$$\Delta z = f_x(a,b) + f_y(a,b) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

dimana ε_1 dan $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ sebagai $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0{,}0)$

e. Jika turunan parsial f_x dan f_x berada di dekat (*a*, *b*) dan kontinu di (*a*, *b*), maka *f* dapat didiferensialkan di (*a*, *b*)

f. Jika diketahui fungsi dua peubah $z = f(x, y)$, maka diferensial total *dz* adalah

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Turunan Berarah dan Vektor Gradien

a. Turunan berarah *f* di titik $P(x_0, y_0)$ pada arah $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ adalah

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limitnya ada

b. Jika *f* adalah fungsi yang dapat didiferensialkan terhadap *x* dan *y*, maka *f* memiliki turunan berarah pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ dan

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

c. Jika *f* adalah fungsi dengan peubah *x* dan *y*, maka **gradien** dari *f* adalah fungsi vektor ∇f (dibaca “del *f*”) dapat didefinisikan sebagai

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

d. Hubungan turunan berarah dan vektor gradien

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

e. Fungsi *f* meningkat dengan cepat ketika $\theta = 1$ atau $\theta = 0$ dan u adalah arah dari ∇f. Fungsi *f* meningkat lebih cepat pada arah vektor gradien ∇f di titik *P*. Turunan pada arah ini adalah

$$D_u f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|$$

f. Fungsi *f* menurun dengan cepat ketika $\theta = \pi$ dan **u** adalah arah dari ∇f. Fungsi *f* menuru**n** lebih cepat pada arah $-|\nabla f|$. Turunan pada arah ini adalah

$$D_u f = |\nabla f| \cos \pi = -|\nabla f|$$

g. Setiap arah **u** yang ortogonal terhadap vektor gradien $\nabla f \neq 0$ adalah arah perubahan nol pada *f* karena $\theta = {}^{\pi}/_{2}$ dan

$$D_u f = |\nabla f| \cos\left({}^{\pi}/_{2}\right) = |\nabla f| \cdot 0 =$$

h. Persamaan bidang singgung terhadap kurva ketinggian $F(x, y, z) = k$ pada titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

i. Persamaan simetrik bidang singgung terhadap kurva ketinggian $F(x, y, z) = k$ pada titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut

Tentukan persamaan bidang singgung terhadap permukaan yang diberikan pada titik yang ditentukan

1. $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0; (1, 3, \sqrt{7})$
2. $z = 2e^{3y} \cos(2x); (\pi/3, 0, -1)$

Jelaskan mengapa fungsi berikut terdiferensialkan pada titik yang diberikan. Kemudian tentukan linierisasi $L(x)$ fungsi tersebut pada titik yang diberikan

3. $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5); (2, 3)$
4. $f(x, y) = x^3 y^4; (1, 1)$

5. Tentukan seluruh titik pada permukaan $z = x^2 - 2xy - y^2 - 8x + 4y$ dimana bidang singgungnya adalah horizontal.
6. Tentukan seluruh titik pada permukaan $z = 2x^2 + 3y^2$ dimana bidang singgungnya sejajar dengan bidang $8x - 3y - z = 0$

Tentukan turunan berarah f di titik P pada arah a

7. $f(x, y) = x^3 y; P = (1, 2); \mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
8. $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2; P = (3, -2); \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

Tentukan gradient f, kemudian evaluasi gradient pada titik P dan tentukan rata-rata perubahan f di titik P pada arah vektor satuan **u**.

9. $f(x, y) = \sin(2x + 3y); P = (-6, 4); \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})$
10. $f(x, y) = \frac{y^2}{x}; P = (1, 2); \mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j})$

11. Ke arah manakah vektor u dimana $f(x,y) = -x^2 - y^2$ menurun paling cepat pada titik P(-1, 2)?
12. Ke arah manakah vektor u dimana $f(x,y) = \sin(3x - y)$ menurun paling cepat pada titik $P(\pi/6\,,\ \pi/4)$?
13. Ketinggian sebuah gunung di atas pemukaan laut pada titik (x, y) adalah $300e^{-\left((x^2+2y^2)/100\right)}$ meter. Sumbu x positif mengarah ke timur dan sumbu-y negatif mengarah ke utara. Seorang pendaki tepat berada pada titik (10, 10). Jika pendaki tersebut bergerak kea rah barat laut, apakah ia akan mendaki atau menurun, dan pada kemiringan berapa?
14. Dekat sebuah pelampung, kedalaman sebuah danah pada titik dengan koordinat (x, y) adalah $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, dimana x, y dan z diukur dalam meter. Seorang nelayan dengan sebuah perahu kecil berangkat pada titik (80, 60) dan bergerak ke arah pelampung, yang lokasinya pada (0, 0). Apakah air di bawah perahu dalam atau dangkal saat perahu itu sampai pada pelampung tersebut? Jelaskan.

4. KUNCI JAWABAN

Kunci jawaban untuk soal-soal bernomor ganjil

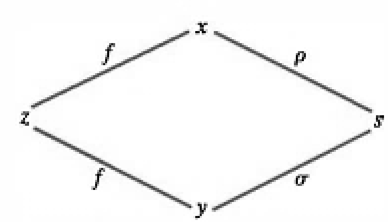
1. $(x-1) - 3(y-3) + \sqrt{7}(z - \sqrt{7})$
3. $f_x = \frac{xy}{xy-5} + \ln(xy - 5);\ f_y = \frac{x^2}{xy-5};\ f_x(2{,}3) = 6$ dan $f_y(2{,}3) = 4$. Karena f_x dan f_y kontinu untuk $xy > 5$, maka f kontinu di (2, 3). Linierisasi f pada titik (2, 3) adalah $L(x,y) = 6x + 4y - 23$
5. (3, -1, -14)
7. $\frac{8}{5}$
9. $\nabla f(x,y) = 2\cos(2x + 3y)\,\mathbf{i} + 3\cos(2x + 3y)\mathbf{j}$
   $\nabla f(-6{,}4) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
   $D_u f(-6, 4) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$
11. $\frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
13. Turun; $-300\sqrt{2}\,e^{-3}$

E. KEGIATAN BELAJAR 7

1. URAIAN MATERI

a. Aturan rantai

Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi dua peubah x dan y. Andaikan pula $x = \rho(t)$ dan $y = \sigma(t)$ adalah fungsi dengan peubah *t*. Kondisi ini direpresentasikan secara skematis pada Gambar 2.28. Kita perhatikan bahwa *z* tergantung dari *x* dan *y*, yang masing-masingnya tergantung tergantung dari *t*. Jadi secara tidak langsung *z* tergantung pada *s*, sehingga kita dapat mempertimbangkan dz/ds. Kondisi ini dinamakan **Aturan Rantai** (*Chain Rule*).



Gambar 2.28 Hubungan $z = f(x, y), x = \rho(t)$ dan $y = \sigma(t)$

Teorema

Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di *x* dan *y*. Andaikan pula

$$x = \rho(t) \text{ dan } y = \sigma(t)$$

adalah fungsi yang terdiferensialkan di *t*

Maka $z = f(\rho(t), \sigma(t))$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di *t* dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\sigma}{dt}$$

Kita juga dapat menyatakan persamaan ini dalam bentuk

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bukti

Andaikan $x = \rho(t + \Delta t), y = \sigma(t + \Delta t), x_0 = \rho(t),\ y_0 = \sigma(t)$. Maka kita dapat menyatakan

$$
\begin{aligned}
f\big(\rho(t+\Delta t),\sigma(t+\Delta t)\big) - f(\rho(t),\sigma(t)&\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\varepsilon_1\right)\cdot\big(\rho(t+\Delta t)-\rho(t)\big)\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\varepsilon_2\right)\cdot\big(\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)\big)
\end{aligned}
$$

Dengan membagi kedua sisi dengan Δt kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
\frac{f\big(\rho(t+\Delta t),\sigma(t+\Delta t)\big) - f(\rho(t),\sigma(t)}{\Delta t}&\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\varepsilon_1\right)\cdot\left(\frac{\rho(t+\Delta t)-\rho(t)}{\Delta t}\right)\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\varepsilon_2\right)\cdot\left(\frac{\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)}{\Delta t}\right)
\end{aligned}
$$

Untuk $\Delta t \to 0$ maka persamaan pada sisi kiri akan mendekati $\partial z/\partial x$. Sedangkan pada sisi kanan akan mendekati $d\rho/dt$ dan $d\sigma/dt$ dimana koefisien ε_1 dan ε_2 keduanya mendekati 0. Setelah kita mengambil limit pada kedua sisi, akan didapat bentuk persamaan

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\sigma}{dt}$$ ■

<u>Contoh 1</u>

Diketahui $z = f(x,y) = x^2 + y^3$, $x = \sin(t)$ dan $y = \cos(t)$. Hitunglah dz/dt

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan rantai, kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\sigma}{dt}\\
&= (2x)(\cos t) + (3y^2)(-\sin t)\\
&= 2\sin t\cos t - 3\cos^2 t\sin t
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Ketika sebuah tabung tegak dipanaskan, jari-jari *r* dan ketinggian *h* meningkat, sehingga luas permukaan *S* juga meningkat. Andaikan pada waktu sesaat ketika *r* = 10 cm dan *h* = 100 cm, *r* meningkat 0.2 cm per jam dan *h* meningkat 0.5 cm per jam. Seberapa cepatkah peningkatan *S* pada waktu tersebut?

Penyelesaian

Rumus luas permukaan tabung adalah

$$S = 2\pi rh + 2\pi r$$

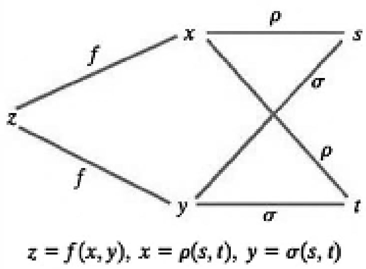
Jadi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r)(0.2) + (2\pi r)(0.5)$$

Untuk *r* = 10 dan *h* = 100, didapat

$$\frac{ds}{dt} = (2\pi \cdot 100 + 4\pi \cdot 10)(0.2) + (2\pi \cdot 10)(0.5)$$
$$= 58\pi \text{ cm}^2/\text{jam}$$

Jika fungsi $z = f(x, y)$ untuk masing-masing peubah x dan y tergantung pada lebih dari satu peubah lain. Secara skematis diilustrasikan oleh Gambar 2.31. Misalnya kita andaikan $x = \rho(s, t)$ dan $y = \sigma(s, t)$. Maka turan rantainya dijelaskan dalam teorema berikut



Gambar 2.29 Hubungan $z = f(x, y), x = \rho(s, t)$ dan $y = \sigma(s, t)$

Teorema
Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di x dan y. Andaikan pula

$$x = \rho(s, t) \text{ dan } y = \sigma(s, t)$$

adalah fungsi yang terdiferensialkan di s dan t.
Maka $z = f(\rho(s, t), \sigma(s, t))$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di s dann t dan

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Secara umum, kita juga dapat menyatakan persamaan di atas dalam bentuk

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Contoh 3
Diketahui fungsi $z = f(x, y) = \ln(x + y^2)\,, x = se^t,\ y = te^{-s}$.
Tentukan $\partial z/\partial s$ dan $\partial z/\partial t$.

Penyelesaian
Pertama kita diferensialkan z terhadap s, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= \left(\frac{1}{x + y^2}\right)e^t + \left(\frac{2y}{x + y^2}\right)\left(t(-e^{-s})\right)\\ &= \left(\frac{1}{se^t + (te^{-s})^2}\right)e^t + \left(\frac{2te^{-s}}{se^t + (te^{-s})^2}\right)(-te^{-s})\end{aligned}$$

Selanjutnya adalah diferensial *z* terhadap *t* yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$
$$=\left(\frac{1}{x+y^2}\right)(se^t)+\left(\frac{2y}{x+y^2}\right)(e^{-s})$$
$$=\left(\frac{1}{se^t+(te^{-s})^2}\right)(se^t)+\left(\frac{2te^{-s}}{se^t+(te^{-s})^2}\right)(e^{-s})$$

Turunan Implisit

Kita misalkan persamaan $F(x,y)=0$ mendefinisikan secara implisit *y* sebagai fungsi yang terdiferensialkan di *x*, yaitu *y* = *f*(*x*), dimana $F\big(x,f(x)\big)=0$ untuk seluruh *x* yang ada pada domain *y*. Jika F dapat didiferensialkan, maka kita dapat menggunakan aturan rantai untuk mendifrensialkan kedua ruas persamaan $F(x,y)=0$ terhadap x, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Karena $dx/dx=1$, maka jika $\partial F/\partial x\neq 0$ kita dapat menyelesaikan **turunan implisit** dy/dx yaitu

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x}{F_y}}$$

<u>Contoh 4</u>

Tentukan *y'* dari $x^3+y^3=6xy$.

Penyelesaian

Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$F(x,y)=x^3+y^3-6xy$$

Sehingga *y'* adalah turunan implisit yang dinyatakan oleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 3y}{y^2 - 3x}$$

Kasus turunan implisit yang lain adalah pada fungsi dengan variabel bebas lebih dari satu. Jika *z* adalah fungsi implisit dari *x* dan y yang didefinisikan oleh persamaan $F(x, y, z) = 0$, maka dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap *x*, didapat

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{y}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Karena

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad dan \quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

Maka persamaan menjadi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Jika $\partial F/\partial x \neq 0$ maka kita dapat menyelesaikan turunan implisit $\partial z/\partial x$. Dengan cara yang sama kita juga dapat menyelesaikan $\partial z/\partial y$.

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$

<u>Contoh 5</u>

Jika $F(x, y, z) = x^3 e^{y+z} - y\sin(x - z) = 0$ mendefinisikan *z* secara implisit sebagai fungsi *x* dan *y*, maka tentuka $\partial z/\partial x$

Penyelesaian

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{2xe^{y+z} - y\cos(x - z)}{x^3 e^{y+z} + y\cos(x - z)}$$

2. RANGKUMAN

a. Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di x dan y. Andaikan pula $x = \rho(t)$ dan $y = \sigma(t)$adalah fungsi yang terdiferensialkan di t. Maka $z = f(\rho(t), \sigma(t))$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di t dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

b. Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di x dan y. Andaikan pula $x = \rho(s, t)$ dan $y = \sigma(s, t)$adalah fungsi yang terdiferensialkan di s dan t. Maka $z = f(\rho(t), \sigma(t))$ adalah fungsi yang terdiferensialkan di s dan t dan

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

c. Untuk menyelesaikan turunan implisit dy/dx digunakan aturan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

d. Untuk menyelesaikan turunan implisit dy/dx dengan variabel bebas lebih dari satu digunakan aturan

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

Gunakan Aturan Rantai untuk menentukan dz/dt. Nyatakan jawaban akhir dalam *t*.

1. $z = x^2y^3, x = t^3, y = t^2$
2. $z = x^2y - y^2x, x = \cos t\,, y = \sin t$
3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, x = \ln t,\ y = \cos t$
4. $z = xe^{y/z}, x = t^2, y = 1 - t, z = 1 + 2t$

Gunakan Aturan Rantai untuk menentukan $\partial z/\partial s$ dan $\partial z/\partial t$. Nyatakan jawaban akhir dalam *s* dan *t*.

5. $z = x^2y^3,\ x = s\cos t\,, y = s\sin t$
6. $z = e^{x+2y}, x = s/t\,, y = t/s$
7. Jika $z = x^2y, x = 2r + s, y = 1 - st^2$, tentukan $\partial z/\partial t$ untuk $s = 1$ dan $t = -2$.
8. Jika $z = xy + x + y, x = r + s + t, y = rst$, tentukan $\partial z/\partial s$ untuk $r = 1$, $s = -1$ dan $t = 2$

Gunakan Aturan rantai untuk menentukan dy/dx

9. $x^3 + 2x^2y - y^3 = 0$
10. $x^2\cos y - y^2\sin x = 0$

11. Bagian sebuah pohon biasanya digergaji atau dipoting yang berbentuk seperti silinder tegak. Jika bagian ini tumbuh ½ inci per tahun dan tingginya bertambah 8 inci per tahun, seberapa cepatkan volume pertumbuhannya ketika jari-jarinya 20 inci dan tingginya 200 inci? Nyatakan jawaban Anda dalam *board feet* per tahun (1 *board feet* = 1 inci × 12 inci × 12 inci).
12. Pasir dituangkan pada suatu tumpukan yang berbentuk kerucut sedemikian hingga pada waktu sesaat tertentu tingginya adalah 100 inci dan meningkat 3 inci per menit; jari-jari dasarnya adalah 40 inci dan meningkat 2 inci per menit. Seberapa cepatkah peningkatan volume pada waktu tersebut.
13. Suhu pada sebuah titik (*x*, *y*) adalah *T*(*x*, *y*), diukur dalam ℃. Sebuah serangga berjalan sehingga posisinya setelah t detik dinyatakan oleh $x = \sqrt{1 + t}, y = 2 + \frac{1}{3}t$, dimana x dan y diukur dalam cm. Fungsi suhu memenuhi $T_x(2{,}3) = 4$ dan

$T_y(2,3) = 3$. Seberapa cepat suhu meningkat pada jalur serangga bergerak setelah 3 detik?

14. Suhu sebuah lempengan besi di titik (x, y) adalah e^{-x-3y} derajat. Seekor semut berjalan ke arah timur laut dengan kecepatan $\sqrt{8}$ kaki per menit (yaitu $dx/dt = dy/dt = 2$). Dari sudut pandang sang semut bagaimanakah perubahan suhu terhadap waktu ketika semut itu melintasi titik asal?

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah jawaban soal-soal yang bernomor ganjil

1. $\frac{dz}{dt} = 12t^{11}$
3. $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 t+\cos^2 t}}\left(\frac{\ln t}{t} - \cos t \sin t\right)$
5. $\frac{\partial z}{\partial s} = s^4 \cos t\ \sin^3 t + 3s^5 \cos^2 t\ \sin^3 t$

   $\frac{\partial z}{\partial t} = -2s^5 \cos t\ \sin^4 t + 3s^5 \cos^3 t\ \sin^2 t$
7. 72
9. $(3x^2 + 4xy)/(3y^2 - 2x^2)$
11. Suhu meningkat dengan kecepatan 2 ℃/detik
13. 244,35 *board feet* per tahun

F. RUJUKAN

Stewart, J. 2012. Multivariable Calculus. 7th Edition. Cole, Cengage Learning.

Purcell, J. E., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. Kalkulus. Jilid II. Edisi Kedelapan. Penerbit Erlangga

Blank, B. E., Krantzs, S. G. 2011. Calculus Multivariable. 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Thomas, G. B. Jr., Weir, M.D., Hass, J. 2010. Thomas' Calculus Multivariable, 12th Edition. Pearson Education, Inc.

BAB II
PENERAPAN TURUNAN PARSIAL

A. Pendahuluan

Salah satu penerapan dari turunan parsial yang paling penting adalah penyelesaian masalah optimasi. Dalam masalah optimasi kita mencari nilai terbesar dan terkecil dari suatu fungsi. Pada bagian ini kita memperkenalkan jenis lain dari masalah optimasi, yaitu kita mencari nilai maksimum dan minimum fungsi yang dikenai konstrain atau disebut pula fungsi kendala. Penyelesaian masalah optimasi ini dinamakan Metode Lagrange.

Bab ini akan membahas tentang penerapan turunan parsial dalam masalah optimasi yaitu (a) nilai maksimum dan minimum, dan (b) Metode *Lagrange*.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu:

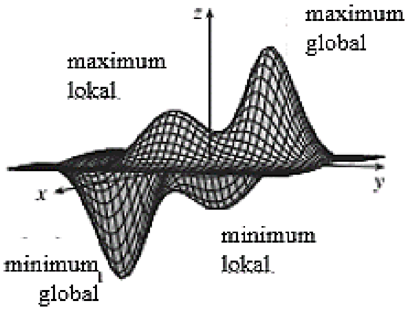
- Terampil dalam menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi dua peubah atau lebih.
- Terampil dalam menggunakan Metode Lagrange menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi dua peubah atau lebih.

B. KEGIATAN BELAJAR 8

1. URAIAN MATERI

a. Maksimum dan Minimum

Sama halnya dengan fungsi satu peubah, turunan fungsi dua peubah juga dapat digunakan untuk mengetahui maksimum dan minimum fungsi. Perhatikan puncak dan lembah dari fungsi f dalam Gambar 3.1. Terdapat dua titik (a, b) dimana f memiliki **maksimum lokal**, dimana $f(a, b)$ lebih besar dari nilai-nilai di sekitar $f(x, y)$. Nilai terbesar dari kedua nilai tersebut dinamakan maksimum absolut (**maksimum global**). Selain itu, terdapat juga dua titik (a, b) dimana f memiliki **minimum lokal**, dimana $f(a, b)$ lebih kecil dari nilai-nilai di sekitar $f(x, y)$. Nilai terkecil dari kedua nilai tersebut dinamakan minimum absolut (**maksimum global**).



Gambar 3.1 Posisi nilai optimum suatu fungsi

Definisi 1
Suatu fungsi dua variable memiliki **maksimum lokal** pada (a, b) jika $f(x, y) \leq f(a, b)$ ketika (x, y) dekat (a,b). Bilangan $f(a, b)$ dinamakan **nilai maksimum lokal**. Jika $f(x, y) \geq f(a, b)$ ketika (x, y) dekat (a,b), maka f memiliki **minimum lokal**. Bilangan $f(a, b)$ dinamakan **nilai minimum lokal.**

Jika pertidaksamaan pada Definisi 1 berlaku untuk semua titik pada domain f, maka f memiliki sebuah maksimum global dan minimum global di (a, b).

Teorema 1
Jika f memiliki maksimum atau minimum lokal di (a, b) dan turunan parsial pertama fungsi f ada, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$

Bukti
Misalkan $g(x) = f(x, b)$ memiliki maksimum atau minimum lokal di (a, b), maka $g'(x) = 0$ berdasarkan Teorema Fermat. Tetapi karena $g'(a) = f_x(a, b)$ maka $f_x(a, b) = 0$. Dengan cara yang sama, dengan mengaplikasikan Teorema Fermat pada fungsi $G(y) = f(a, y)$, kita dapatkan $f_y(a, b) = 0$. ■

Suatu titik dinamakan titik kritis (titik stasioner) dari f jika $f_x(a,b) = 0$ dan $f_y(a,b) = 0$. Berdasarkan Teorema 1 dapat dinyatakan bahwa f memiliki maksimum atau minimum lokal di (a, b), maka (a, b) adalah titik kritis dari f. Walaupun tidak semua titik kritis mencapai maksimum atau minimum. Pada titik kritis, fungsi mungkin memiliki maksimum lokal atau minimum lokal atau bukan keduanya.

Contoh 1

Tentukan nilai maksimum atau minimum dari fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Penyelesaian

Kita dapatkan turunan parsial pertama dari f yaitu:

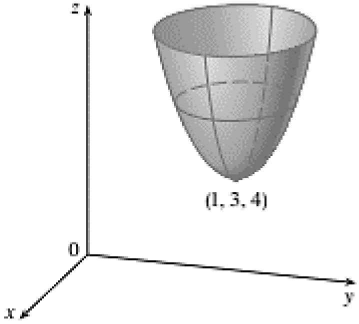
$$f_x = 2x - 2$$
$$f_y = 2y - 6$$

Turunan parsial pertama ini sama dengan 0 ketika $x = 1$ dan $y = 3$. Sehingga diperoleh hanya satu titik kritis yaitu (1, 3).

Dengan melengkapi kuadrat sempurna, kita dapatkan

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$$

Karena $(x-1)^2 \geq 0$ dan $(y-3)^2 \geq 0$, maka kita dapatkan $4 \geq 0$ untuk semua nilai x dan y. Sehingga $f(1,3) = 4$ adalah nilai maksimum global. Hal ini dapat dikonfirmasi secara geometris dari grafik f, dimana paraboloid memiliki puncak pada (1, 3, 4) sebagaimana pada Gambar 3.2.



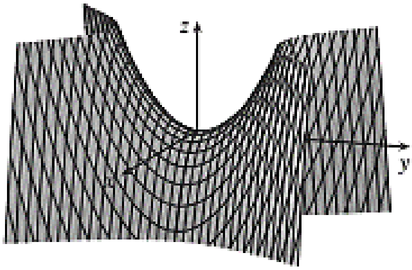
Gambar 3.2 Grafik $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

Contoh 2
Tentukan nilai ekstrem dari $f(x,y) = y^2 - x^2$

Penyelesaian
Kita dapatkan $f_x = -2x$ dan $f_y = 2y$
Karena $f_x(a,b) = 0$ dan $f_y(a,b) = 0$, maka $x = 1$ dan $y = 0$. Sehingga diperoleh titik kritis (0, 0).

Untuk titik-titik pada sumbu-*x* kita dapatkan $y = 0$, maka $f(x,y) = -x^2 < 0$ (jika $x \neq 0$)
Untuk titik-titik pada sumbu-*y* kita dapatkan $x = 0$, maka $f(x,y) = y^2 > 0$ (jika $x \neq 0$).

Maka setiap cakram dengan jari-jari (0, 0) yang memuat titik-titik dimana f bernilai positif yang sekaligus juga bernilai negatif. Maka $f(0,0) = 0$ bukan sebuah nilai ekstrem. Maka f tidak memiliki nilai ekstrem (sebagaimana pada Gambar 3.3)



Gambar 3.3 Grafik $f(x,y) = y^2 - x^2$

Grafik f pada Gambar 3.3 adalah hiperbolik paraboloid $z = y^2 - x^2$ yang memiliki garis singgung (z = 0) di titik asal (0, 0). Perhatikan bahwa $f(0,0) = 0$ adalah sebuah maksimum pada arah sumbu-x dan merupakan sebuah minimum pada arah sumbu-y. Sekitar titik (0, 0) grafik berbentuk sebuah pelana (saddle), sehingga titik ini dinamakan **titik pelana** (*saddle point*) dari *f*.

Untuk mengetahui apakah suatu titik adalah sebuah nilai ekstrem dari, dilakukan **Uji Turunan Parsial kedua.**

Uji Turunan Parsial Kedua
Misalkan parsial kedua dari f kontinu pada cakram dengan pusat (a, b) dan andaikan $f_x(a,b) = 0$ dan $f_y(a,b) = 0$ (di sini (a, b) adalah titik kritis dari f). Andaikan

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

a. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a,b) > 0$, maka $f(a,b)$ adalah minimum lokal
b. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a,b) < 0$, maka $f(a,b)$ adalah maksimum lokal
c. Jika $D < 0$, maka $f(a,b)$ bukan maksimum atau minimum lokal

Catatan
Pada kasus (c), titik (a, b) dinamakan titik pelana (*saddle point*) dari *f*.
Jika D = 0, tes tidak memberikan infomasi apa pun. *f* mungkin memiliki maksimum lokal atau minimum lokal di (a, b) atau (a, b) mungkin sebuah titik pelana.
Rumus D dapat pula dinyatakan sebagai determinan

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

Contoh 3
Tentukan minimum dan maksimum lokal serta titik pelana dari fungsi

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Penyelesaian
Pertama kita tentukan titik kritis dengan mencari turunan parsial pertama

$$f_x = 4x^3 - 4y$$
$$f_y = 4y^3 - 4x$$

Dengan membuat turunan pertama ini menjadi sama dengan 0, kita dapatkan persamaan

$$x^3 - y = 0 \text{ dan } 4y^3 - 4x = 0$$

Untuk menyelesaikan kedua persamaan ini, kita subtitusi $y = x^3$ ke persamaan kedua, sehingga didapat

$$\begin{aligned} 0 &= x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \end{aligned}$$

Kita dapatkan akar-akar: $x = 0$, $x = 1$ dan $x = -1$. Sehingga terdapat tiga titik kritis: (0, 0), (1, 1) dan (–1, –1).

Selanjutnya kita tentukan turunan parsial kedua

$$f_{xx} = 12x^2$$
$$f_{yy} = 12y^2$$
$$f_{xy} = -4$$

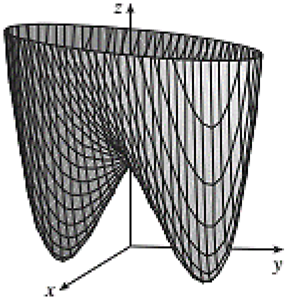
Sehingga,

$$D = (12x^2)(12y^2) - (-4)^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Uji turunan parsial kedua

- Karena $D(0,0) = -16 < 0$, maka (0,0) adalah titik pelana
- Karena $D(1,1) = 128 > 0$ dan $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, maka $f(1, 1) = -1$ adalah nilai minimum lokal.
- Karena $D(-1,-1) = 128 > 0$ dan $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$, maka $f(-1, -1) = -1$ adalah nilai minimum lokal.

Grafik f ditunjukkan pada Gambar 3.4 berikut



Gambar 3.4 Grafik $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

<u>Contoh 4</u>

Sebuah balok tanpa tutup dibuat menggunakan karton dengan luas 12 m^2. Tentukan volume balok maksimum yang dapat dibuat.

Penyelesaian

Misalkan panjang, lebar dan tinggi balok dalam meter adalah *x*, *y* dan *z*

Maka volume balok adalah

$$V = xyz$$

Kita dapat menyatakan V sebagai fungsi dua peubah x dan y dengan menggunakan fakta bahw luas permukaan balok tanpa tutup adalah

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Untuk menyelesaikan persamaan, kita dapatkan

$$z = \frac{12 - xy}{2x + 2y}$$

sehingga fungsi V dapat dinyatakan sebagai

$$V = xy\frac{12 - xy}{2x + 2y} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Selanjutnya kita hitung turunan parsial kedua

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Jika V maksimum, maka ${\partial V}/_{\partial x} = 0$ dan ${\partial V}/_{\partial x} = 0$, karena *x* = 0 atau *y* = 0 memberikan *V* = 0 (nilai ini tidak kita gunakan), maka kita menyelesaikan persamaan berikut

$$12 - 2xy - x^2 = 0$$

$$12 - 2xy - y^2 = 0$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas didapat $x^2 = y^2$ maka $x = y$. Jika kita substitusikan $x = y$ pada kedua persamaan akan kita dapatkan $12 - 3x^2 = 0$, sehingga didapat *x* = 2 dan *y* = 2 (kita ambil nilai postif karena berkaitan dengan ukuran panjang sisi balok).

Oleh karena itu, kita dapatkan nilai *z* berikut

$$z = \frac{12 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = 1$$

Subtitusi $x = 2$, $y = 2$ dan $z = 1$ sehingga diperoleh

$$V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa volume maksimum balok yang dapat dibuat adalah $V = 4\text{m}^2$ yang didapat ketika ukuran balok adalah panjang = 2m, lebar = 2m dan tinggi = 1m.

Nilai Maksimum dan Minimum Global

Pada fungsi satu peubah, Teorema Nilai Ekstrem menyatakan bahwa jika *f* kontinu pada sebuah interval tertutup [*a*, *b*], maka *f* memiliki nilai maksimum global dan nilai minimum global. Hal yang sama juga berlaku untuk fungsi dua peubah, hanya saja sebagaimana interval tertutup yang memiliki titik pangkal, suatu **himpunan tertutup** di $\mathbb{R}^2$ adalah salah satu yang mencakup seluruh titik batas. Suatu **titik batas** *D* adalah titik (*a*, *b*) sedemikian sehingga setiap cakram (*disk*) dengan pusat (*a*, *b*) mencakup titik di *D* dan juga titik di luar *D*. Misalnya, cakram:

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Cakram ini terdiri dari seluruh titik pada dan di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 1$, adalah sebuah himpunan tertutup karena terdiri dari seluruh titik-titik batas (yaitu titik-titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$). Jadi apabila satu titik pada kurva dihilangkan, maka himpunan tersebut dikatakan bukan tertutup lagi.

Himpunan terbatas di $\mathbb{R}^2$ adalah salah satu yang tercakup dalam beberapa cakram (*disk*), dengan kata lain terbatas yang diperluas (*finite in extend*).

> **Teorema Nilai Ekstrem Fungsi Dua Peubah**
> Jika *f* kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas *D* di $\mathbb{R}^2$, maka *f* memiliki suatu nilai maksimum global $f(x_1, y_1)$ pada titik (x_1, y_1) di D dan suatu nilai minimum global $f(x_2, y_2)$ pada titik (x_2, y_2) di *D*.

Jika f memiliki sebuah titik ekstrem di (x_1, y_1), maka (x_1, y_1) kemungkinan adalah sebuah titik kritis dari f atau titik batas dari *D*.

Cara mencari nilai maksimum atau minimum global suatu fungsi kontinu *f* pada himpunan tertutup dan terbatas *D*:

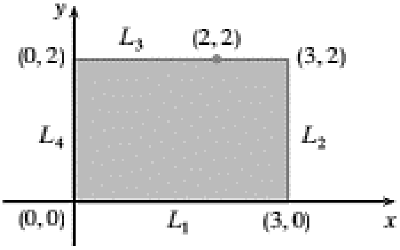
1. Temukan nilai *f* pada titik kritis *f* di *D*.
2. Temukan nilai ekstrem *f* pada batas *D*.
3. Nilai terbesar dari langkah 1 dan 2 adalah nilai maksimum global, nilai terkecil dari dari langkah 1 dan 2 adalah nilai minimum global

Contoh 5

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ pada persegi panjang $D = \{(x, y) | 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

Penyelesaian

Karena *f* adalah fungsi polinomial, maka *f* kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas *D* (yaitu titik-titik dalam persegi panjang *D* sebagaimana pada Gambar 3.5), dimana $f_x = f_y = 0$ dan titik-titik batasnya.



Gambar 3.5 Sketsa daerah *D*

a. Titik dalam

   Titik ini diperoleh ketika $f_x = f_y = 0$ sehingga

$$f_x = 2x - 2y = 0$$
$$f_y = -2x + 2 = 0$$

   Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas secara simultan, didapat titik tunggal (1, 1) dan nilai *f*(1, 1) = 2.

b. Titik batas dari D, yang terdiri dari empat segmen garis: L_1, L_2, L_3 dan L_4.

Pada L_1 didapat $y = 0$ sehingga

$$f(x,y) = f(x,0) = x^2$$

yaitu fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $0 \leq x \leq 3$. Nilai ekstremnya terjadi pada titik batas (0,0) dan (3,0) adalah

Untuk titik (0,0) maka $f(0,0) = 0$
Untuk titik (3,0) maka $f(3,0) = 9$

Pada L_2 didapat $x = 3$ sehingga

$$f(x,y) = f(3,y) = 9 - 4y$$

yaitu fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $0 \leq y \leq 2$. Dengan cara yang sama, didapat nilai ekstremnya terjadi pada titik batas (3, 2) adalah $f(3,2) = 0$

Pada L_3 didapat $y = 2$ sehingga

$$f(x,y) = f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

yaitu fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $0 \leq x \leq 3$. Dengan cara yang sama, didapat nilai ekstremnya terjadi pada titik batas (2, 2) dan (2, 0) adalah $f(2,2) = 0$ dan $f(0,2) = 4$.

Pada L_3 didapat $x = 0$ sehingga

$$f(x,y) = f(0,y) = 2y$$

yaitu fungsi yang terdefinisi pada interval tertutup $0 \leq y \leq 2$. Dengan cara yang sama, didapat nilai ekstremnya terjadi pada titik batas (2, 2) dan (2, 0) adalah $f(0,2) = 4$ dan $f(0,0) = 0$.

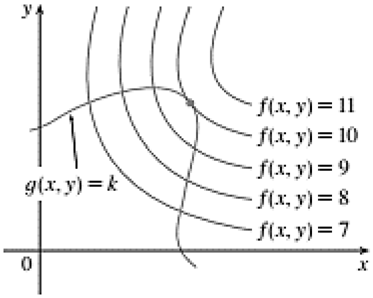
c. Setelah kita mendaftar nilai ekstremnya yaitu $f(1, 1) = 2$; $f(0,0) = 0$; $f(3,0) = 9$; $f(3,2) = 0$; $f(2,2) = 0$; $f(0,2) = 4$, maka didapat

Nilai maksimum golobal f di D adalah $f(3,0) = 9$
Nilai minimum golobal f di D adalah $f(0,0) = f(2,2) = 0$

b. Metode Lagrange

Ketika kita akan mencari nilai ekstrem suatu fungsi yang domainnya adalah *konstrain* (batasan) yang berada di dalam subset tertentu dari bidang (berupa sebuah cakram) atau bias disebut juga permasalahan **ekstrem terkendala**, misalnya: daerah segitiga tertutup, atau sepanjang sebuah kurva. Metode yang paling tepat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah **Metode Lagrange**.

Jika kita mencari nilai ekstrem fungsi $f(x, y)$ yang dikenai fungsi kendala $g(x, y) = k$. Hal ini bermakna bahwa kita mencari nilai ekstrem $f(x, y)$ ketika titik (x, y) terbatas pada yang terletak pada kurva $g(x, y) = k$. Gambar 3.8 menunjukkan beberapa kurva ketinggian dari f yang memiliki persamaan $f(x, y) = c$, dimana c = 7, 8, 9, 10, 11. Untuk meminimumkan $f(x, y)$ yang dikenai fungsi kendala $g(x, y) = k$, dicari nilai terbesar k sedemikian hingga kurva ketinggian $f(x, y) = c$ berpotongan dengan $g(x, y) = k$. Berdasarkan Gambar 3.6, kondisi ini terjadi ketika kedua kurva ini saling menginggung satu sama lain, atau dengan kata lain keduanya memiliki garis singgung yang sama. Dengan demikian, garis normalnya berada pada titik (x_0, y_0). Maka vektor gradient kedua kurva ini parallel, yaitu dapat dinyatakan sebagai $\nabla f((x_0, y_0) = \lambda \nabla g((x_0, y_0)$ untuk beberapa nilai skalar λ yang dinamakan **Pengali Lagrange** (*Lagrange Multiplier*)



Gambar 3.6 Kurva ketinggian dari f dengan persamaan $f(x, y) = c$

Andaikan fungsi f memiliki suatu nilai ekstrem pada titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada permukaan S, dan andaikan C adalah sebuah kurva dengan persamaan vektor $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ yang terletak pada S dan melalui titik P. Jika t_0 adalah nilai vektor yang berkorespondensi dengan titik P, maka $(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Fungsi komposit $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ merepresentasikan nilai f pada kurva. Karena f memiliki suatu nilai ekstrem pada titik $P(x_0, y_0, z_0)$, maka h memiliki suatu titik ekstrem di t_0, Sehingga $h(t_0) = 0$. Jika f terdiferensialkan, maka kita dapat menggunakan aturan rantai dan menyatakan

$$
\begin{aligned}
0 &= h'^{(t_0)} \\
&= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) \\
&\quad + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0)
\end{aligned}
$$

Hal ini menunjukkan bahwa vektor gradien $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ tegak lurus vektor tangen $\mathbf{r}'(t_0)$ untuk setiap kurva C. Karena kita ketahui bahwa vektor gradien $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ juga tegak lurus dengan vektor tangen $\mathbf{r}'(t_0)$. Hal ini bermakna bahwa $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dan $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ haruslah paralel.

Metode Lagrange

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x, y)$ yang dikenakan fungsi kendala (konstrain) $g(x, y) = k$ dapat dilakukan dengan cara:

1. Tentukan nilai x, y, z dan λ dengan menyelesaikan secara simultan
$$\nabla f((x_0, y_0) = \lambda \nabla g((x_0, y_0)$$
dan
$$g(x, y) = k$$

2. Evaluasi seluruh seluruh titik (x, y, z) yang merupakan hasil langkah (1). Nilai terbesar adalah nilai maksimum dari f, dan nilai terkecilnya adalah nilai minimum dari f.

Contoh 6

Sebuah balok tanpa tutup dibuat menggunakan karton dengan luas 12 m^2. Tentukan volume maksimum balok yang dapat dibuat.

Penyelesaian

Misalkan panjang, lebar dan tinggi balok dalam meter adalah x, y dan z

Maka kita akan memaksimumkan fungsi volume balok yaitu

$$V = xyz$$

Dengan konstrain, fungsi luas permukaan balok tanpa tutup, yaitu

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Dengan menggunakan Metode Lagrange, kita menyelesaikan secara simultan persamaan $\nabla f = \lambda \nabla g$ dengan $g(x, y, z) = 12$ sehingga didapat persamaan

$V_x = \lambda g_x$

$V_y = \lambda g_y$

$V_z = \lambda g_z$

$2xz + 2yz + xy = 12$

Didapat

$$yz = \lambda(2z + y) \quad (1)$$
$$xz = \lambda(2z + x) \quad (2)$$
$$xy = \lambda(2x + 2y) \quad (3)$$
$$2xz + 2yz + xy = 12 \quad (4)$$

Dengan mengalikan (1) dengan x, (2) dengan y dan (3) dengan z, didapatkan persamaan

$$xyz = \lambda x(2z + y) \quad (5)$$
$$xyz = \lambda y(2z + x) \quad (6)$$
$$xyz = \lambda z(2x + 2y) \quad (7)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (5) dan (6) diperoleh

$$2xz + xy = 2yz + xy$$
$$xz = yz$$

Karena $xz = yz$, kemungkinannya adalah $x = 0$ atau $x = y$. Untuk $x = 0$ tidak kita pilih karena mengakibatkan $V = 0$. Jadi yang mungkin adalah $x = y$.

Dengan menyelesaikan persamaan (6) dan (7) dipeoleh persamaan

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$
$$xy = 2xz$$
$$y = 2z$$

Karena $x = y$ dan $y = 2z$ maka kita dapatkan $x = y = 2z$. Selanjutnya subtitusi $x = y = 2z$ ke persamaan (4) sehingga diperoleh

$$2(2z)(z) + 2(2z)(z) + (2z)(2z) = 12$$
$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$
$$12z^2 = 12$$
$$z^2 = 1$$

Karena *x*, *y*, dan *z* harus postif maka kita pilih *z* =1 sehingga *x* = 2 dan *y* = 2.

Contoh 7

Tentukan nilai ekstrem $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ pada cakram $x^2 + y^2 \leq 1$.

Penyelesaian

Kita akan menentukan nilai ektrem $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ dengan fungsi kendala $x^2 + y^2 = 1$.

Dengan menggunakan Metode Lagrange, kita menyelesaikan secara simultan persamaan $\nabla f = \lambda \nabla g$ dengan $g(x, y, z) = 1$ sehingga didapat persamaan

$$V_x = \lambda g_x$$
$$V_y = \lambda g_y$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Didapat

$$2x = \lambda 2x \qquad (1)$$
$$4y = \lambda 2y \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (3)$$

Dari persamaan (1) didapat *x* = 0 atau $\lambda = 1$. Jika *x* = 0 disubtitusi ke persamaan (3), maka didapat $y = \pm 1$.

Jika $\lambda = 1$ disubtitusi ke persamaan (3), maka didapat *y* = 0. Jika *y* = 0 disubtitusi ke persamaan (3), didapat $x = \pm 1$

Oleh karena itu diperoleh beberapa titik kritis, yaitu $(0,0),(1,0),(-1,0),(0,1)$ dan $(0,-1)$.

Kita evalusi nilai fungsi f pada setiap titik kritisnya.

$$f(0,0)=0$$
$$f(\pm 1,0)=1$$
$$f(0,\pm 1)=2$$

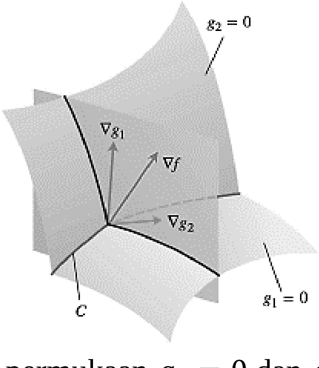
Jadi nilai maksimum f pada cakram $x^2+y^2\leq 1$ adalah $f(0,\pm 1)=2$ dan $f(0,0)=0$.

Nilai Ekstrem dengan dua *Konstrain*

Misalnya kita ingin mencari nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x,y,z)$ yang diberikan dua fungsi kendala (*konstrain*) $g_1(x,y,z)=0\ dan\ g_2(x,y,z)=0$ dimana g_1 dan g_2 dapat didiferensialkan dan ∇g_1 dan ∇g_2 tidak paralel.

Misalnya f memiliki sebuah nilai ekstrem pada titik $P(x_0,y_0,z_0)$. Kita dapat menggunakan Metode Lagrange dengan menggunakan dua pengali Lagrange yaitu λ dan μ yaitu mencari nilai x,y,z,λ dan μ dengen menyelesai secara simultan persamaan-persamaan

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2\\ g_1(x,y,z)=0\\ g_2(x,y,z)=0\end{gathered}}$$

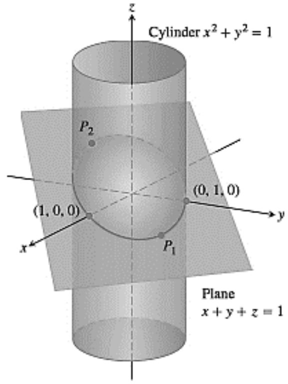


Gambar 3.7 Grafik permukaan $g_1=0$ dan $g_2=0$ yang saling berpotongan

Permukaan $g_1 = 0$ dan $g_2 = 0$ berpotongan pada kurva yang mulus, sebut kurva *C* (sebagaimana Gambar 3.7). Sepanjang kurva ini terlihat titik-titik dimana *f* memiliki nilai maksimum dan minimum lokal relatif terhadap nilai-nilai yang lain pada kurva. Titik-titik tersebut adalah titik-titik dimana ∇f orthogonal terhadap C. Tetapi ∇g_1 dan ∇g_2 juga orthogonal terhadap C karena titik-titik ini terletak pada permukaan $g_1 = 0$ dan $g_2 = 0$. Sehingga ∇f adalah bidang yang ditentukan oleh ∇g_1 dan ∇g_2, yang bermakna bahwa $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$, untuk beberapa λ dan μ. Karena titik-titik yang kita cari juga berada juga pada permukaan $g_1 = 0$ dan $g_2 = 0$, maka koordinatnya harus memenuhi $g_1(x, y, z) = 0\ dan\ g_2(x, y, z) = 0$.

Contoh 8

Bidang $x + y + z = 1$ memotong silinder $x^2 + y^2 = 1$ pada sebuah elips (sebagaimana Gambar 3.11). Tentukan titik-titik pada elips yang terletak paling jauh dan paling dekat dengan titik asal.



Gambar 3.8 Grafik bidang $x + y + z = 1$ dan silinder $x^2 + y^2 = 1$

Penyelesaian

Jarak antara titik (*x*, *y*, *z*) terhadap titik asal (0, 0, 0) adalah

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Kita nyatakan kuadrat jarak

$$d^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

merupakan fungsi yang akan kita cari nilai ektremnya dengan *kontrain* (fungsi kendala)

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$
$$g_1(x,y,z) = x + y + z - 1$$

Dengan Metode Lagrange, kita menyelesaikan secara simultan persamaan

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_1$$
$$g_1(x,y,z) = 0$$
$$g_2(x,y,z) = 0$$

Sehingga kita dapatkan

$$2x = \lambda 2x + \mu \quad (1)$$
$$2y = \lambda 2y + \mu \quad (2)$$
$$2z = \mu \quad (3)$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (4)$$
$$x + y + z - 1 \quad (5)$$

Subtitusi persamaan (3) ke (1) dan (2) didapat

$$2x = 2\lambda x + 2z \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x = z$$
$$2y = 2\lambda y + 2z \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)y = z$$

Jika dua persamaan di atas diselesaikan secara simultan maka didapat $\lambda = 1$ dan $z = 0$ atau $\lambda \neq 1$ dan

$$x = y = \frac{z}{1-\lambda}$$

Jika z = 0, penyelesaian persamaan (4) dan (5) secara simultan mendapatkan titik-titik pada elips yang bersesuaikan yaitu titik (1, 0 ,0) dan (0, 1, 0).

Jika $x = y$, maka persamaan (4) menjadi

$$x^2 + x^2 = 1$$
$$2x^2 = 1$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sedangkan pada persamaan (5) didapat

$$x + x + z = 1$$
$$z = 1 - 2x$$

Jika $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ maka $z = 1 \pm \sqrt{2}$

Sehingga diperoleh titik-titik yang bersesuaian yaitu

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \quad dan\ P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

Walaupun P_1 dan P_2 memberikan maksimum lokal pada f, namun P_2 memiliki posisi yang lebih jauh dari titik asal dibandingkan dengan P_1.

Sedangkan titik pada elips yang paling dekat dengan titik asal adalah (1, 0 ,0) dan (0, 1, 0).

2. RANGKUMAN

a. Suatu fungsi dua variable memiliki maksimum lokal pada (*a*, *b*) jika $f(x, y) \leq f(a, b)$ ketika (*x*, *y*) dekat (*a*,*b*). Bilangan *f*(*a*, *b*) dinamakan nilai maksimum lokal. Jika $f(x, y) \geq f(a, b)$ ketika (*x*, *y*) dekat (*a*,*b*), maka *f* memiliki minimum lokal. Bilangan *f*(*a*, *b*) dinamakan nilai minimum lokal.

b. Jika *f* memiliki maksimum atau minimum lokal di (*a*, *b*) dan turunan parsial pertama fungsi f ada, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$

c. Misalkan parsial kedua dari f kontinu pada cakram dengan pusat (*a*, *b*) dan andaikan $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$ (di sini (*a*, *b*) adalah titik kritis dari *f*). Andaikan

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2$$

Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a, b) > 0$, maka $f(a, b)$ adalah minimum lokal

Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(a, b) < 0$, maka $f(a, b)$ adalah maksimum lokal

Jika $D < 0$, maka $f(a, b)$ bukan maksimum atau minimum lokal

Jika f kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas *D* di $\mathbb{R}^2$, maka *f* memiliki suatu nilai maksimum global $f(x_1, y_1)$ pada titik (x_1, y_1) di D dan suatu nilai minimum global $f(x_2, y_2)$ pada titik (x_2, y_2) di D

d. Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x, y)$ yang dikenakan fungsi kendala (konstrain) $g(x, y) = k$ dapat dilakukan dengan cara:
   - Tentukan nilai x, y, z dan λ dengan menyelesaikan secara simultan $\nabla f = \lambda \nabla g$ dan $g(x, y) = k$
   - Evaluasi seluruh seluruh titik (x, y, z) yang merupakan hasil langkah (1). Nilai terbesar adalah nilai maksimum dari f, dan nilai terkecilnya adalah nilai minimum dari f.

e. Cara yang sama digunakan menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x, y)$ yang dikenakan fungsi dua fungsi kendala, yaitu dengan menyelesaikan secara simultan persamaan $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$; $g_1(x, y, z) = 0$ $g_2(x, y, z) = 0$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

1. Andaikan (1, 1) adalah titik kritis fungsi f yang kontinu pada turunan parsial kedua. Apa yang dapat disimpulkan jika $f_{xx}(1,1) = 4, f_{yy}(1,1) = 1, f_{xy}(1,1) = 2$
2. Andaikan (0, 2) adalah titik kritis fungsi f yang kontinu pada turunan parsial kedua. Apa yang dapat disimpulkan jika $f_{xx}(0,2) = -1, f_{yy}(0,2) = 6, f_{xy}(0,2) = 1$

Tentukan seluruh titik kritis fungsi berikut. Nyatakan apakah setiap titik tersebut memberikan nilai maksimum lokal, minimum lokal atau merupakan titik pelana.

3. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4x$
4. $f(x, y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

Tentukan nilai maksimum global dan minimum global dari f di S dan nyatakan dimana nilai-nilai tersebut terjadi

5. $f(x, y) = 3x + 4y; S = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$
6. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1; S = \{(x, y) | -1 \le x \le 3, -1 \le y \le 4\}$
7. Tentukan jarak terpendek antara titik (2, 0, -3) dengan bidang $x + y + z = 1$.

8. Sebuah kotak yang memiliki volume 32.000 cm^3 dibuat menggunakan bahan kardus. Tentukan dimensi (ukuran) kotak sedemikian sehingga dapat meminimalkan luas kardus yang digunakan.

Gunakan pengali Langrange untuk menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi pada konstrain yang diberikan

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $g(x, y) = xy - 1 = 0$
10. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$; $g(x, y) = x - y - 6 = 0$
11. $f(x, y, z) = x + 2y$; $g_1(x, y, z) = x + y + z = 1$; $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2 = 4$
12. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $g_1(x, y, z) = x + y - z = 0$; $g_2(x, y, z) = x^2 + 2z^2 = 1$

13. Suhu (dalam °C) pada suatu titik (x, y, z) di ruang diberikan oleh fungsi $F(x, y, z) = 8x - 4y + 2z$. Tentukan suhu maksimum dan minimum pada titik tersebut jika berada pada permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 21$.
14. Material untuk alas dari sebuah kotak persegi panjang berharga tiga kali per kaki kuadrat dibanding material untuk sisi-sisi dan atapnya. Tentukan kapasitas terbesar dari kotak seperti ini jika jumlah uang yang tersedia untuk membeli material adalah 12 dollar dan material alas seharga 0.6 dollar per kaki kuadrat

4. KUNCI JAWABAN

Berikut ini adalah jawaban soal-soal bernomor ganjil.

1. Karena $D(1,1) = 7 > 0$ dan $f_{xx}(1,1) = 4$, maka $f(1,1)$ adalah nilai minimum lokal *f*.
3. (2, 0), titik minimum lokal
5. Maksimum global di (1, 1) dan minimum global di (0, -1)
7. $d = 2/\sqrt{3}$
9. Nilai minimum *f* adalah $f(1,1) = 2$
11. Titik kritis f adalah $\left(1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$, nilai maksimumnya adalah $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ dan nilai minimunya adalah $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
13 Suhu maksimum = 21°C dan suhu minimum = –42°C.

C. RUJUKAN

Stewart, J. 2012. Multivariable Calculus. 7th Edition. Cole, Cengage Learning.

Purcell, J. E., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. Kalkulus. Jilid II. Edisi Kedelapan. Penerbit Erlangga

Blank, B. E., Krantzs, S. G. 2011. Calculus Multivariable. 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Thomas, G. B. Jr., Weir, M.D., Hass, J. 2010. Thomas' Calculus Multivariable, 12th Edition. Pearson Education, Inc.

BAB V
INTEGRAL LIPAT

A. PENDAHULUAN

Pada kalkulus satu peubah, pembahasan tentang integral dibahas setelah turunan, demikian juga pada integral lipat. Prinsip yang hampir sama dengan integral pada fungsi satu peubah berlaku juga pada integral lipat. Walaupun ada beberapa perbedaan karena kita dihadapkan dengan fungsi dengan dua peubah atau lebih. Terdapat notasi dan topik yang baru yang lebih luas dibandingkan dengan membahas integral pada fungsi satu peubah.

Bab ini akan membahas tentang definisi integral lipat dua pada daerah persegi panjang, integral lipat dua, integral lipat dua pada daerah bukan persegi panjang, integral lipat dua pada koordinat polar, integral lipat tiga, integral lipat tiga pada koordinat silinder, integral lipat tiga pada koordinat bola.
Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu:

- Menentukan integral lipat dua pada daerah persegi panjang.
- Menentukan integral lipat dua pada daerah bukan persegi panjang.
- Mengkonversi integral dua lipat pada koordinat kartesius ke koordinat polar.
- Menentukan integral dua lipat tiga pada berbagai fungsi peubah banyak.
- Mengkonversi integral lipat pada koordinat kartesius ke koordinat silinder.
- Mengkonversi integral lipat pada koordinat kartesius ke koordinat bola.

B. KEGIATAN BELAJAR 9

1. URAIAN MATERI

a. Integral Lipat Dua pada daerah Persegi Panjang

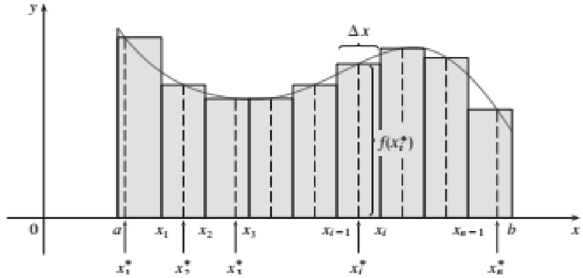
Pertama kita ulang kembali integral pada fungsi satu peubah. Jika *f*(*x*) terdefinisi pada $a \leq x \leq b$, maka kita mulai $[x_{i-1,} x_i]$ dengan mempartisi interval $[a, b]$ menjadi n sub interval dengan panjang yang sama yaitu $\Delta x = (b - a)/n$ dan kita pilih salah satu titik sampel, sebut $x_i{}^*$ yang berada pada sub interval. Maka jumlah Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\,\Delta x$$

Selanjutnya kita ambil limitnya untuk untuk $n \to \infty$ untuk mendapatkan definisi integral f dari a ke b yaitu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\,\Delta x$$

Untuk $f(x) \geq 0$, jumlah Riemann dapat diinterpretasikan sebagai jumlah luas dari persegi panjang-persegi panjang (sebagaimana pada Gambar 4.1) dan $\int_a^b f(x)\,dx$ adalah luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ dari a ke b.



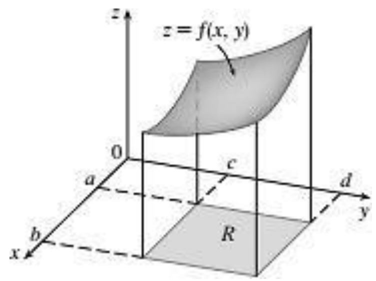
Gambar 4.1 Jumlah Riemann pada fungsi satu peubah

Prinsip yang sama juga berlaku pada fungsi dua peubah f yang terdefinisi pada daerah persegi panjang tertutup

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Andaikan $f(x, y) \geq 0$, maka grafik f adalah permukaan dengan persamaan $z = f(x, y)$. Andaikan S adalah benda padat yang terletak di atas R dan berada di bawah grafik f (sebagaimana Gambar 4.2), yaitu

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}\}$$



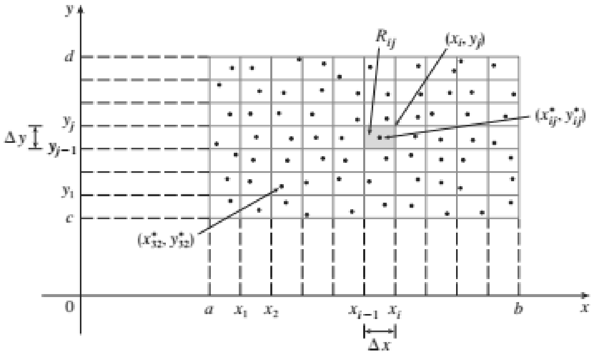
Gambar 4.2 Grafik benda padat S di bawah f dan di atas R

Tujuan utama kita adalah menentukan volume S.

Pertama, kita bagi persegi panjang R menjadi sub persegi panjang, yang selanjutnya pembagian pada interval $[a, b]$, menjadi m sub-interval $\left[x_{i-1,} x_i\right]$ dengan panjang $(b-a)/m$ dan pembagian pada interval $[c, d]$ menjadi m sub-interval $\left[y_{j-1,} y_j\right]$ dengan panjang $(d-c)/n$. Dengan menggambar garis sejajar sumbu koordinat dengan titik ujung sub interval, sehingga kita dapatkan sub-persegi panjang

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \left[x_{i-1,} x_i\right] \times \left[y_{j-1,} y_j\right] \\ &= \left\{(x, y) \middle| x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\right\} \end{aligned}$$

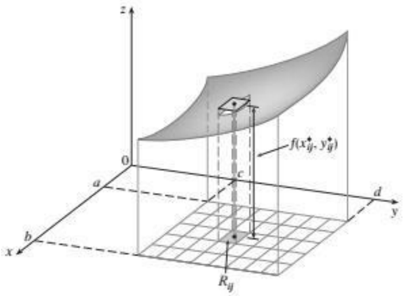
Luas masing-masing sub-persegi panjang $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$

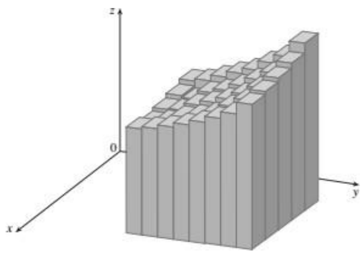


Gambar 4.3 Sub-sub persegi panjang R_{ij} yang merupakan partisi dari R

Jika kita pilih titik sampel $\left(x_i{}^*, y_j{}^*\right)$ pada setiap R_{ij} dengan membuat balok ramping yang alasnya R_{ij} dan tinggi $f\left(x_i{}^*, y_j{}^*\right)$ sebagaimana Gambar 4.4. Keseluruhan balok yang dipartisi sebagaimana Gambar 4.5 Maka volume balok ini adalah

$$f\left(x_i{}^*, y_j{}^*\right) \cdot \Delta A$$





Gambar 4.4 Balok partisi R_{ij} Gambar 4.5 Jumlah Rieman di $\mathbb{R}^3$

Sehingga aproksimasi total S adalah

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i{}^*, y_j{}^*\right) \cdot \Delta A$$

Aproksimasi ini menjadi lebih baik jika m dan n diperbesar, sehingga diperoleh definisi integral lipat dua.

<u>Definisi</u>

Integral lipat dua f terhadap persegi panjang R adalah

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i{}^*, y_j{}^*\right) \cdot \Delta A$$

Sehingga jika $f(x,y) \geq 0$, maka volume V dari benda padat yang berada di atas persegi panjang R dan dibawah permukaan $z = f(x,y)$ adalah

$$V = \iint_R f(x,y) dA$$

Contoh 1

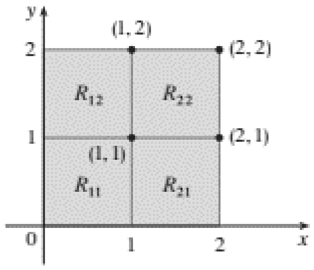
Estimasi volume benda padat yang berada di atas persegi $R = [0, 2] \times [0, 2]$ dan berada di bawah permukaan $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Bagi R menjadi empat bagian persegi dan pilih titik sampel pada bagian pojok kanan atas setiap persegi R_{ij}.

Penyelesaian

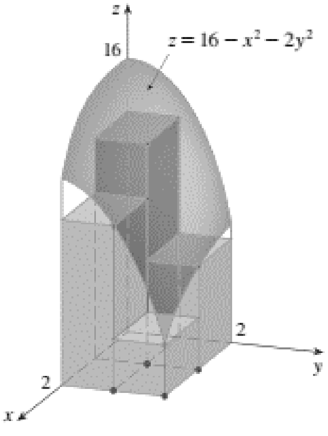
Persegi R ditunjukkan oleh Gambar 4.6. Grafik fungsi $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ adalah paraboloid eliptik dan luas masing-masing persegi yang dipartisi menjadi empat bagian adalah $\Delta A = 1$.

Aproksimasi volume benda padat (Gambar 4.7) dengan jumlah Riemann dengan $m = n = 2$ adalah

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x, y) \cdot \Delta A \\ &= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$



Gambar 4.6 Grafik partisi *R*



Gambar 4.7 Grafik permukaan *z* dan balok-balok partisi

Aturan Titik Tengah

Aturan ini menggunakan jumlah Riemann untuk mengaproksimasi integral lipat dua, dimana titik sampel $\left(x_i^*, y_j^*\right)$ pada setiap R_{ij}

adalah titik tengah $(\overline{x_i}, \overline{y_j})$. Dimana $\overline{x_i}$ adalah titik tengah $[x_{i-1},\ x_i]$ dan $\overline{y_i}$ adalah titik tengah $[y_{i-1},\ y_i]$, maka berlaku

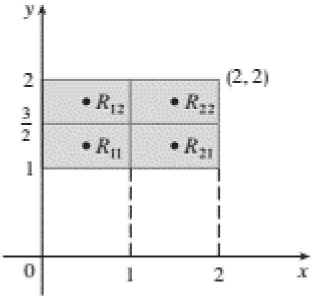
$$\iint_R f(x,y)dA \approx \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}) \cdot \Delta A$$

<u>Contoh 2</u>

Gunakan aturan titik tengah dengan $m = n = 2$ untuk mengestimasi $\iint_R (x - 3y^2)dA$ pada daerah persegi $R = \{(x,y)|0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$.

Penyelesaian

Kita akan mengevaluasi $f(x,y) = x - 3y^2$ pada pusat empat sub persegi sebagaimana Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Grafik partisi *R*

Dengan menggunakan aturan titik tengah didapat titik $(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$, $(\overline{x_2}, \overline{y_1}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$, $(\overline{x_2}, \overline{y_2}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ dan $(\overline{x_1}, \overline{y_2}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$. Luas setiap sub persegi adalah $\Delta A = \frac{1}{2}$. Sehingga

$$\iint_R (x - 3y^2)dA \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}) \cdot \Delta A$$

$$= f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)\Delta A + f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)\Delta A$$

$$= \left(-\frac{67}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{139}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{51}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{123}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{95}{8} \approx -11.875$$

Sifat-Sifat Integral Lipat Dua

Asumsikan seluruh integral lipat dua ada, maka kita dapatkan sifat-sifat linieritas dari integral lipat dua yaitu

Sifat 1

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

Sifat 2

$$\iint_R c\, f(x,y)dA = c \iint_R f(x,y)dA$$

dimana *c* adalah konstanta

Sifat 3

Jika $f(x,y) \geq g(x,y)$ untuk seluruh (*x*, *y*) di *R*, maka

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

b. Integral Berulang

Andaikan *f* adalah fungsi dua peubah yang dapat terintegralkan pada persegi panjang $R = [a,b] \times [c,d]$. Kita gunakan notasi $\int_c^d f(x,y)dy$ dengan maksud bahwa *x* dianggap tetap dan *f*(*x*, *y*) diintegralkan terhadap *y* untuk *y* dari *c* ke *d*. Prosedur ini dinamakan **integral parsial terhadap y**. Selanjutnya $\int_c^d f(x,y)dy$ adalah bilangan yang tergantung pada nilai *x* sehingga didefinisikan sebagai fungsi dengan peubah *x*.

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

Jika kita mengintegralkan fungsi *A* terhadap *x* untuk *x* dari *a* ke *b*, kita dapatkan

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Maka integral sebelah kiri dinamakan **integral berulang.** Dapat pula dinyatakan

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Artinya pertama-tama kita integralkan terhadap *y* untuk *y* dari *c* ke *d*, baru kemudian diintegral lagi terhadap *x* untuk *x* dari *a* ke *b*.

<u>Contoh 3</u>

Hitunglah$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\ dydx$

Penyelesaian

Dengan menganggap *x* adalah konstanta, kitada dapatkan

$$\int_1^2 x^2 y\ dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2$$

Kosekuensinya

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\ dydx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\ dy\right] dx$$

$$= \int_0^3 \frac{3}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{2}3^3 - 0 = \frac{27}{2}$$

Teorema berikut memberikan cara praktis dalam menentukan integral lipat dua dengan mengekspresikan sebuah integral berulang (*iterated integral*).

Teorema Fubini

Jika *f* kontinu pada persegi panjang

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\}$, maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx\ = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy$$

Contoh 4

Hitunglah $\iint_R f(x,y)dA$, untuk $f(x,y) = 100 - 6x^2y$ dan $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$

Penyelesaikan

Dengan menggunakan Teorema Fubini kita dapatkan

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(100 - 6x^2y)\, dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}[100x - 2x^3y]_0^2\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1}(200 - 16y)\, dy$$

$$= [200y - 8y^2]_{-1}^{1} = 400$$

Dengan cara mengubah urutan integrasi, kita juga akan mendapatkan nilai yang sama untuk

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{0}^{2}\int_{-1}^{1}(100 - 6x^2y)\, dydx$$

Contoh 5

Tentukan volume benda padat *S* yang dibatasi oleh paraboloid eliptik $x^2 + 2y^2 + z = 16$, bidang *x* = 2, bidang *y* = 2 dan bidang koordinat.

Penyelesaian

Benda padat S dibatasi oleh bidang *x* = 2, bidang *y* = 2 dan bidang koordinat, kita dapatkan

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$$

Dengan menyatakan $z = f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2 6$, maka

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)dA$$

$$= \int_0^2\int_0^2(16 - x^2 - 2y^2)\, dxdy$$

$$= \int_0^2\left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2xy^2\right]_0^2\, dy$$

$$= \int_0^2\left(\frac{88}{3} - 4y^2\right)\, dy$$

$$= \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

2. RANGKUMAN

Integral Lipat Dua pada Daerah Persegi Panjang

a. Integral lipat dua f terhadap persegi panjang R adalah

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\big(\, x_i, y_j\big) \cdot \Delta A$$

b. V dari benda padat yang berada di atas persegi panjang R dan dibawah permukaan $z = f(x,y)$ adalah

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

c. Aproksimasi interal lipat dua dengan Aturan Titik Tengah dinyatakan oleh

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota}) \cdot \Delta A$$

$\overline{x_\iota}$ adalah titik tengah $[x_{i-1},\, x_i]$ dan $\overline{y_\iota}$ adalah titik tengah $[y_{i-1},\, y_i]$.

Integral Berulang

a. Integral berulang dinyatakan sebagai

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

b. Jika f kontinu pada persegi panjang $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\}$, maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini

1. Estimasi volume benda padat yang berada di bawah permukaan $z = xy$ dan berada di atas persegi panjang $R = \{(x, y)|0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 4\}$. Gunakan aturan titik tengah untuk mendapatkan jumlah Riemann dengan m = 3 dan n = 2.
2. Jika $R = [0, 2] \times [0, 2]$, gunakan jumlah Riemann dengan m = 2 dan n = 3 untuk mengestimasi nilai $\iint_R (1 - xy^2) dA$. Ambil titik sampel pada pojok kanan bawah masing-masing partisi persegi panjang.

Andaikan $R = \{(x, y)|0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$,
$R_1 = \{(x, y)|0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$
$R_2 = \{(x, y)|0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$

Andaikan pula

$\iint_R f(x, y) dA = 3$; $\iint_R g(x, y) dA = 5$, dan $\iint_{R_1} g(x, y) dA = 2$

Gunakan sifat-sifat integral untuk menghitung soal-soal berikut ini

3. $\iint_R [3f(x, y) - g(x, y)] dA$
4. $\iint_{R_1} [2g(x, y) + 3] dA$

Hitunglah integral berulang berikut.

5. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\, dy\, dx$
6. $\int_{-1}^2 \int_0^3 (x^3y - 2xy^2)\, dx\, dy$
7. $\int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 (x^2 \sin y)\, dx\, dy$
8. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x)\, dx\, dy$

Hitunglah integral lipat dua berikut

9. $\iint_R \sin(x - y) dA$;
   $R = \left\{(x, y)\middle|0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

10. $\iint_R (y + xy^{-2})dA$;
    $R = \{(x, y)|0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$

11. Tentukan volume benda padat yang berada di bawah bidang $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ dan berada di atas persegi panjang $R = [-1, 2] \times [-1, 1]$
12. Tentukan volume benda padat yang berada di bawah paraboloid hiperbolik $z = 3y^2 - x^2 + 2$ dan berada di atas persegi panjang $R = [-1, 1] \times [1, 2]$
13. Tentukan volume tetrahedron yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $z = 6 - 2x - 3y$.
14. Benda padat oktan pertama yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat, bidang $2x + y - 4 = 0$ dan bidang $8x + y - 4z = 0$.

4. KUNCI JAWABAN

Berikut ini adalah jawaban soal-soal bernomor ganjil.

1. $V \approx 144$
3. 4
5. 222
7. 0
9. 0
11. 51
13. 6

C. KEGIATAN BELAJAR 10

1. Uraian Materi

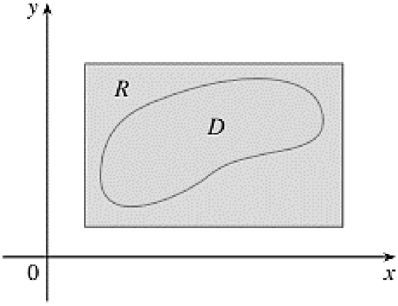
a. Integral Lipat Dua pada Daerah Bukan Persegi Panjang

Dalam integral lipat dua, kita tidak hanya mengintegral fungsi *f* pada daerah persegi panjang tapi juga pada daerah *D* yang bentuknya lebih umum.

Misalkan *D* adalah daerah terbatas, yang bermakna bahwa kita bisa mengelilinginya dengan suatu daerah persegi panjang seperti Gambar 4.9. Maka kita dapat mendefinisikan fungsi *F* dengan domain *R* sebagai

Persamaan (1)

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{jika } (x,y) \text{ di } D \\ 0, & \text{jika } (x,y) \text{ di } R \text{ bukan } D \end{cases}$$



Gambar 4.9 Daerah terbatas *D* yang dikelilingi oleh persegi panjang *R*

Jika *F* terintegralkan terhadap *R*, maka definisi **integral *f* terhadap *D*** adalah

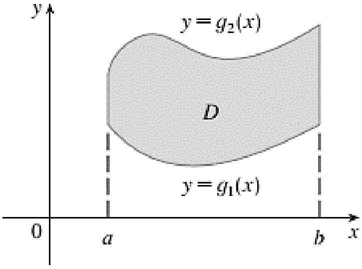
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

Dimana *F* adalah persamaan (1)

Sebuah daerah bidang *D* dikatakan **Tipe I** jika terletak di antara dua fungsi x yang kontinu, sehingga

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, g_1 \le y \le g_2\}$$

Dimana g_1 dan g_2 kontinu pada [a, b]. Daerah Tipe I ditunjukkan oleh Gambar 4.10.



Gambar 4.10 Daerah tipe I

Berikut adalah rumus yang digunakan untuk menghitung integral lipat dua pada daerah *D* Tipe I.

Jika f kontinu pada daerah *D* tipe I yaitu sedemikian sehingga

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ g_1 \leq y \leq g_2\}$$

Maka

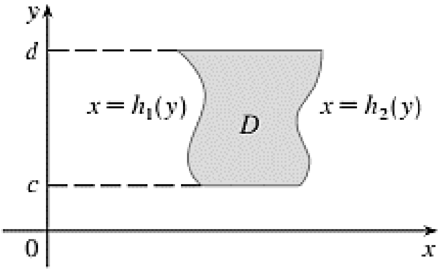
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x, y)\, dydx$$

Kita juga daerah bidang **Tipe II** yang dinyatakan sebagai
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d,\ h_1 \leq x \leq h_2\}$

Dengan menggunakan metode yang sama kita dapatkan integral lipat dua pada daerah *D* Tipe II.

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} f(x, y)\, dxdy$$

Daerah *D* tipe II diilustrasikan Gambar 4.11.



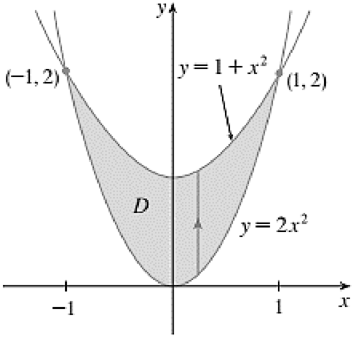
Gambar 4.11 Daerah Tipe II

Contoh 1

Hitunglah $\iint_D (x + 2y)\, dA$, dimana *D* adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$.

Penyelesaian
Parabola berpotongan ketika $2x^2 = 1 + x^2$, maka $= x^2 = 1$, sehinga didapatkan $x = \pm 1$. Selanjutnya kita sketsa *D* sebagaimana Gambar 5.13.
Berdasarkan sketsa daerah *D*, diketahui bahwa *D* termasuk daerah Tipe I, sehingga

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$



Gambar 4.13 Grafik daerah *D* Tipe I Soal Contoh 1

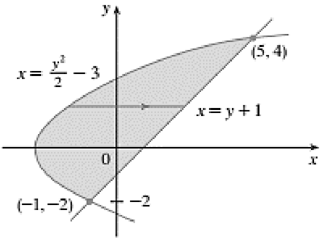
Sehingga kita dapatkan perhitungan integral lipat dua sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} [xy - y^2]_{2x^2}^{1+x^2}\, dx \\ &= \int_{-x}^{x} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\ &= \left[-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{32}{15}\end{aligned}$$

<u>Contoh 2</u>

Hitunglah $\iint_D xy\, dA$, dimana *D* daerah yang dibatasi oleh garis $y = x - 1$ dan parabola $y^2 = 2x + 6$

Penyelesaian



Gambar 4.13 Grafik *D* Tipe II soal contoh 2

Berdasarkan Gambar 4.16, *D* termasuk tipe II sehingga

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\right\}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\, dA &= \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\, dxdy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{4}y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}y^6 + y^4 + \frac{2}{3}y^3 - 4y^2\right]_{-2}^{4} \\
&= 36
\end{aligned}$$

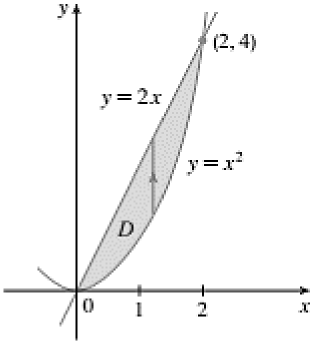
<u>Contoh 3</u>

Tentukan volume benda padat yang terletak di bawah paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan berada di atas daerah *D* pada bidang-*xy* yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ dan parabola $y = x^2$.

Penyelesaian

Setelah kita mensketsa daerah *D* (gambar 4.14), diperoleh bahwa daerah *D* adalah Tipe I yang dapat dinyatakan sebagai

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$



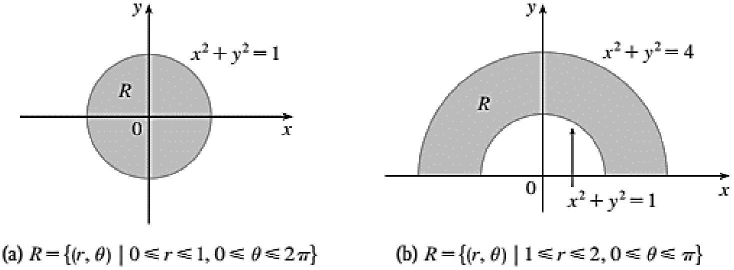
Gambar 4.14 Sketsa daerah *D* Tipe I soal contoh 3

Maka volume benda padat di bawah $z = x^2 + y^2$ dan di atas *D* adalah

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dydx$$
$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_{x^2}^{2x} dx$$
$$= \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{3} x^6 - x^4 + \tfrac{14}{3} x^3\right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{21} x^7 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{7}{6} x^4\right]_0^2 = \frac{216}{35}$$

b. Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar

Misalkan kita akan mencari integral lipat dua $\iint_R f(x, y) dA$ dimana *R* seperti pada Gambar 4.17. Pada kasus ini, mendeskripsikan daerah *R* pada koordinat kartesius lebih sulit dilakukan, namun mudah pada koordinat polar.



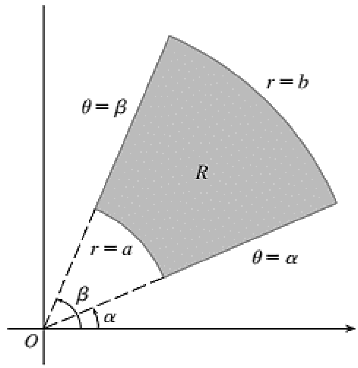
Gambar 4.15 Sketsa daerah *R* (kasus khusus)

Suatu titik pada koordinat polar (r, θ) berkaitan dengan (x, y) pada koordinat kartesius yang dinyatakan persamaan berikut.

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

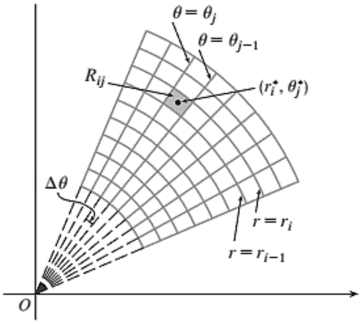
Daerah pada Gambar 4.15 adalah kasus khusus pada koordinat polar. Daerah *R* pada Gambar 4.16 dinyatakan sebagai

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$



Gambar 4.16 Daerah *R* pada koordinat polar

Untuk menghitung integral lipat dua $\iint_R f(x,y)dA$ pada koordinat polar, kita membagi interval $[a, b]$ menjadi m sub interval $[r_{i-1}, r_i]$ yang memiliki lebar yang sama yaitu $\Delta x = (b-a)/m$, dan kita membagi interval $[\alpha, \beta]$ menjadi n sub interval $\left[\theta_{j-1}, \theta_j\right]$ yang memiliki lebar yang sama yaitu $\Delta x = \Delta\theta = (\alpha - \beta)/n$. Maka pada lingkaran-lingkaran $r = r_i$ dan sinar-sinar $\theta = \theta_j$ membagi persegi panjang polar R menjadi persegi panjang polar yang banyak, seperti pada Gambar 4.17.



Gambar 4.17 Partisi-partisi persegi panjang polar

Pusat dari sub persegi panjang polar dinyatakan oleh

$$R_{ij} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\right\}$$

yang memiliki koordinat

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_i^* = \frac{1}{2}(\theta_{i-1} + \theta_i)$$

Selanjutnya kita menghitung luas R_{ij} menggunakan fakta bahwa luas sektor lingkaran dengan jari-jari r dan sudut pusat θ adalah $\frac{1}{2}r^2\theta$. Luas daerah R_{ij} adalah

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-j}^2\,\Delta\theta = \frac{1}{2}\left(r_i^2 - r_{i-j}^2\right)\Delta\theta$$
$$= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i + r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta$$

Koordinat pusat persegi panjang polar adalah $\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)$, sehingga jumal Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)\Delta A_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right) r_i^*\,\Delta r\Delta\theta$$

Jika menyatakan $g(r,\theta) = r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ maka jumlah Riemann menjadi

Sehingga jumlah Riemann untuk integral lipat dua adalah

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta)\; dr\; d\theta$$

Maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^{\,*}\cos\theta_j^{\,*}, r_i^{\,*}\sin\theta_j^{\,*}\right)\Delta A_i$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g\left(r_i^{\,*}\cos\theta_j^{\,*}, r_i^{\,*}\sin\theta_j^{\,*}\right)\Delta r\Delta\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta)\; dr\; d\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\; dr\; d\theta$$

Perubahan ke Koordinat Polar pada Integral Lipat Dua
Jika f kontinu pada sebuah persegi panjang polar yang diberikan oleh $a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta$, dimana $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, maka

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\; dr\; d\theta$$

Integral Berulang
Rumus di atas menjadi lebih berguna ketika kita menuliskan integral lipat pada koordinat kutub menjadi integral berulang.

<u>**Contoh 4**</u>
Tentukan volume benda padat di atas persegi panjang polar
$R = \left\{(r,\theta)\middle| 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$
dan di bawah permukaan $z = e^{x^2+y^2}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \left(e^{x^2+y^2}\right) dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_1^3 e^{r^2}\, r\, dr\right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_1^3 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(e^9 - e^0\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{8}\left(e^9 - e^0\right) = 3181 \end{aligned}$$

Integral pada Daerah Umum

Jika *f* kontinu pada sebuah daerah polar dalam bentuk

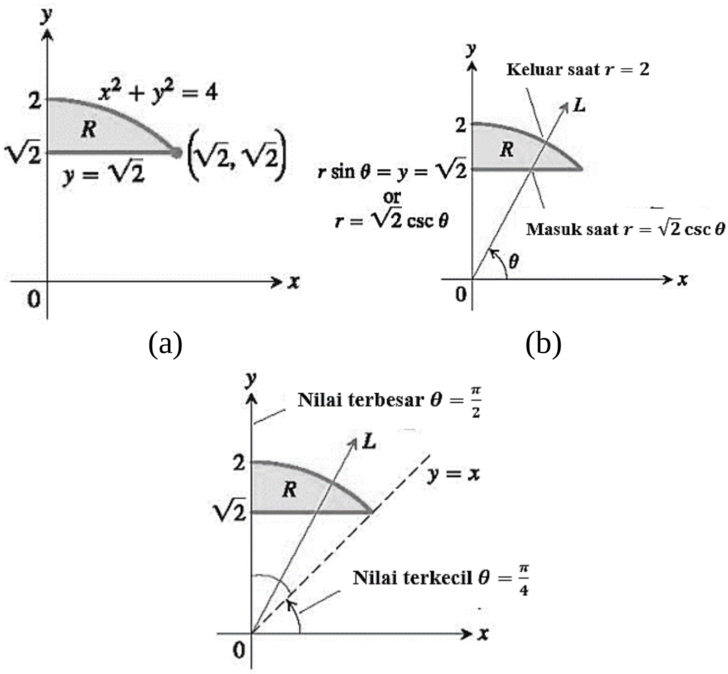
$$R = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$

Maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Prosedur dalam menentukan batas integrasi pada koordinat kartesius juga berlaku untuk koordinat polar. Untuk menghitung $\iint_R f(r,\theta)dA$ terhadap daerah *R* pada koordinat polar, pertama-tama kita integralkan *f* terhadap *r* baru kemudian terhadap θ, mengikuti lang-langkah berikut:

1. Sketsa daerah dan labeli kurva batasnya. (Gambar 4.18 (b))
2. Tentukan batas nilai *r* pada integrasi. Bayangkan sinar L dari titik asal memotong melalui *R* ke arah kenaikan r. Beri tanda nilai *r* dimana *L* dimasukkan dan meninggalkan *R*, maka nilai ini adalah batas *r* pada integrase. Nilai *r* ini biasanya tergantung pada sudut θ yang digunakan *L* sebagai sumbu-*x* positif. (Gambar 4.18 (b))
3. Tentukan batas θ pada integrasi. Tentukan nilai terkecil dan terbesar dari θ yang membatasi R. Nilai ini adalah batas θ untuk integrasi. (Gambar 4.18 (c))



Gambar 4.18 Prosedur penentuan batas-batas integrasi pada koordinat polar

Sehingga turunan berulang f pada daerah R seperti pada Gambar 4.20 (c) adalah

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{2}\csc\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

Contoh 5

Tentukan batas integral fungsi $f(r,\theta)$ terhadap daerah R yang terletak pada *cardioid* $r = 1 + \cos\theta$ dan bagian luar lingkaran $r = 1$.

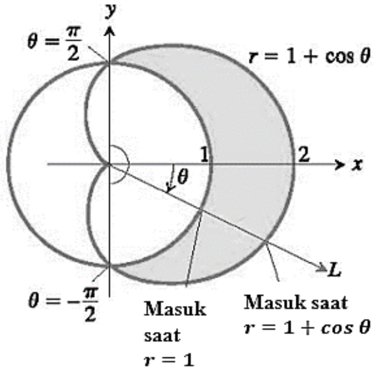
Penyelesaian

1. Kita buat sketsa *cardioid* $r = 1 + \cos\theta$ dan bagian luar lingkaran $r = 1$. (Gambar 4.19)

2. Selanjutnya kita tentukan batas r pada integrasi. Sebuah sinar L dari titik asal masuk ke R saat $r = 1$ dan keluar pada saat $r = 1 + \cos\theta$.
3. Terakhir kita menentukan batas θ. Sinar L dari titik asal yang memotong R bergerak dari $\theta = \frac{\pi}{2}$ ke $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Sehingga turunan berulang f pada daerah R seperti pada adalah

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$



Gambar 4.19 Grafik *cardioid* $r = 1 + \cos\theta$

Jika $f(r, \theta)$ adalah fungsi konstanta bernilai 1, maka integral f terhadap daerah tertutup R adalah luas dari R.

$$\boxed{A = \iint_R dA = \iint_R r\, dr\, d\theta}$$

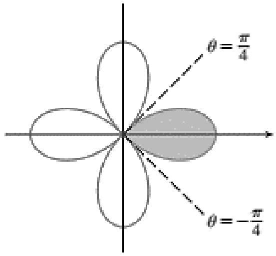
<u>Contoh 6</u>

Gunakan integral lipat dua untuk mencari luas daerah tertutup satu kelopak dari empat kelopak mawar $r = \cos 2\theta$

Penyelesaian

Dari sketsa kurva pada Gambar 4.20, kita dapatkan bahwa satu kelopak diberikan oleh daerah

$$R = \left\{(r,\theta) \middle| -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos 2\theta \right\}$$



Gambar 4.20 Grafik empat kelopak mawar $r = \cos 2\theta$

Sehingga diperoleh luas satu kelopak

$$A(R) = \iint_R dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

Contoh 7

Tentukan volume benda padat yang berada di bawah paraboloid $z = x^2 + y^2$, di atas bidang-*xy* dan di dalam tabung $x^2 + y^2 = 2x$.

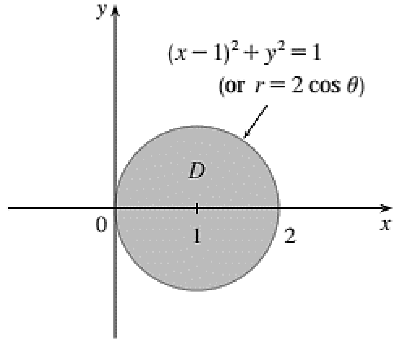
Penyelesaian

Setelah kita melakukan melengkapi kuadrat sempurna

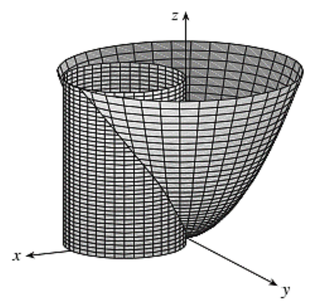
$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Sehingga *D* adalah lingkaran dengan pusat (1, 0) dan jari-jari 1. Benda padat tersebut berada di atas cakram *D* yang dibatasi oleh

$x^2 + y^2 = 2x$ yang merupakan lingkaran (Gambar 4.21 dan Gambar 4.22).



Gambar 4.21 Grafik *D*



Gambar 4.24 paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan tabung $x^2 + y^2 = 2x$

Pada koordinat polar, $x^2 + y^2 = r^2, x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$. Sehingga persamaan $x^2 + y^2 = 2x$ dikonversi ke koordinat polar menjadi $r^2 = 2r\cos\theta$ atau $r = 2\cos\theta$.
Maka daerah cakram *D* dinyatakan sebagai

$$D = \left\{(r,\theta) \middle| -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$$

Sehingga dapat dihitung volume berikut

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2 + y^2)dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta) d\theta \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta \\
&= 2\left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

2. RANGKUMAN

Integral Lipat Dua pada Daerah Bukan Persegi Panjang

a. Jika f kontinu pada daerah D tipe I yaitu sedemikian sehingga
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ g_1 \leq y \leq g_2\}$$
Maka
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x, y)\, dydx$$

b. Jika f kontinu pada daerah D tipe II yaitu sedemikian sehingga
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d,\ h_1 \leq x \leq h_2\}$$
Maka
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1}^{h} f(x, y)\, dxdy$$

Integral Lipat Dua pada Koordinat Polar

a. Jika f kontinu pada sebuah persegi panjang polar yang diberikan oleh $a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta$, dimana $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, maka
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

b. Jika f kontinu pada sebuah daerah polar dalam bentuk
$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$
Maka
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut

1. Hitunglah
$$\int_0^1 \int_0^{3x} x^2\, dydx$$
2. Hitunglah
$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} 2x\, e^y\, dxdy$$
3. Hitunglah

$$\int_0^{\pi/9}\int_{\pi/4}^{3r} \sec^2\theta \; d\theta dr$$

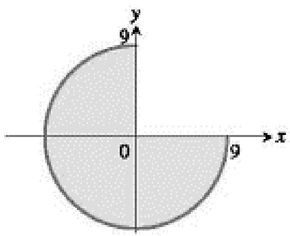
4. Hitunglah

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} 6r\cos\theta \; dr d\theta$$

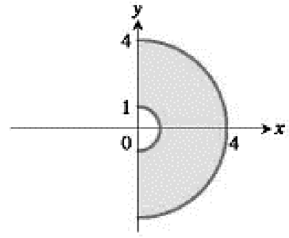
5. Hitunglah $\iint_D x\cos y\, dA$, dengan D dibatasi oleh $y = 0$, $y = x^2$ dan $x = 1$.
6. Hitunglah $\iint_D (x^2 + 2y)\, dA$, dengan D dibatasi oleh $y = x, y = x^3$ dan $x \geq 0$.

Deskripsikan daerah berikut pada koordinat polar.

7.



8.



9. Hitunglah $\iint_D x^2 y\, dA$ dimana D adalah setengah cakram pada bagian atas dari titik asal dengan jari-jari 5.
10. Hitunglah $\iint_D (2x - y)\, dA$ dimana D adalah daerah pada kuadran pertama yang tertutup oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan garis $x = 0$ serta $y = x$.

Tentukan luas daerah yang dideskripsikan berikut

11. Daerah antara grafik $r = 6 - \sin\theta$ dan $r = 1 + \cos\theta$.
12. Daerah pada kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $r = 3\sin 2\theta$ dan $r = 4 - \cos\theta$.

Gunakan integral lipat dua pada koordinat polar untuk menentukan volume benda padat berikut

13. Benda padat yang dibatasi oleh permukaan $z = -x^2 - y^2 + 4$ dan bidang-*xy*.
14. Benda padat yang dibatasi oleh paraboloid $z = 3x^2 + 3y^2 - 7\; dan\; z = -x^2 - y^2 + 9$

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah jawaban soal-soal bernomor ganjil

1. $\frac{3}{4}$
3. $(3\ln 2 - \pi)/9$
5. $\frac{1}{2}(1 - \cos(1))$
7. $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 9$
9. $D = \{(r, \theta)|0 \leq r \leq 5,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$

   $\iint_D x^2 y\, dA = \frac{1250}{3}$
11. 35π
13. 8π

D. KEGIATAN BELAJAR 11

1. Uraian Materi

a. Integral Lipat Tiga pada Koordinat Kartesius

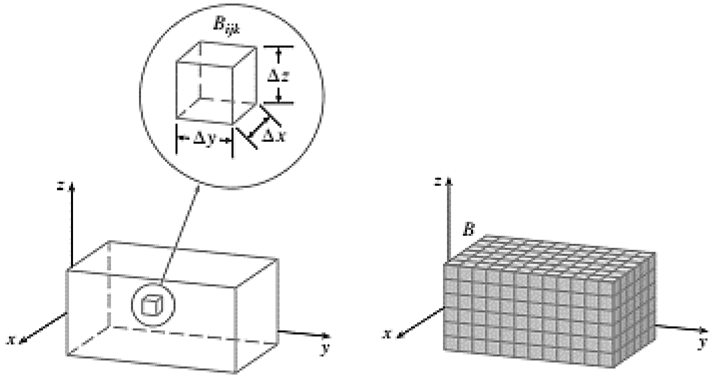
Seperti halnya kita mendefinisikan integral pada fungsi satu peubah dan integral lipat dua pada fungsi dua peubah, kita juga mendefinisikan integral lipat tiga pada fungsi tiga peubah dengan cara yang sama. Misalnya kita ambil contoh sederhana fungsi *f* yang terdefinisi pada kotak persegi panjang:

$$B = \{(x, y, z)|a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Langkah pertama adalah kita membagi *B* menjadi beberapa sub-kotak. Kita membaginya pada interval [*a*, *b*] menjadi *l* sub interval $[x_{i-1}, x_i]$ dengan lebar yang sama Δx, selanjutnya membagi interval [*c*, *d*] menjadi *m* sub interval dengan lebar Δy, dan membagi lagi interval [*r*, *s*] menjadi *n* sub interval dengan lebar Δz. Bidang yang dilalui oleh titik ujung masing-masing interval sejajar dengan bidang koordinat yang membagi kotak *B* menjadi *lmn* sub-kotak yang dinyatakan

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

Sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 4.23. Setiap sub-kotak memiliki volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.



Gambar 4.23 Jumlah Riemann lipat tiga

Maka kita dapat menyatakan **jumlah Riemann lipat tiga** adalah

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f({x_{ijk}}^*, {y_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*) \Delta V$$

Dimana $({x_{ijk}}^*, {y_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*)$ berada dalam B_{ijk}. Secara analog sebagaimana dalam definisi integral lipat dua, kita dapat mendefinisikan integral lipat tiga berdasarkan limit jumlah Riemann lipat tiga.

Definisi
Integral lipat tiga *f* terhadap kotak *B* adalah

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f({x_{ijk}}^*, {y_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*) \Delta V$$

jika limitnya ada

Integral lipat tiga selalu ad ajika f kontinu. Kita dapat memilih salah satu titik sampel pada sembarang sub-kotak, namun jika kita memilih titik $\left(x_i, y_j, z_k\right)$, maka kita bias mendapatkan bentuk integral lipat tiga yang lebih sederhana, yaitu

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right)\Delta V$$

Seperti halnya dalam integral lipat tiga, metode dalam mengevaluasi integral lipat lipat tiga adalah dengan menyatakannya dalam bentuk integral berulang.

Teorema Fubini
Jika f kontinu pada kotak persegi panjang yang dinyatakan oleh

$$B = \{(x,y,z)| a \le x \le b,\ c \le y \le d, r \le z \le s\}$$

Maka

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

jika limitnya ada

<u>Contoh 1</u>

Tentukan integral lipat tiga $\iiint_B\ xyz^2 dV$, dimana B adalah kotak persegi panjang yang dinyatakan sebagai

$$B = \{(x,y,z)|\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$$

Penyelesaian
Berdasarkan Teorema Fubini didapatkan integral f terhadap x, y dan z, yaitu

$$\iiint_B (xyz^2)dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 (xyz^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{0}^{3} \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{2} x^2 y z^2\right]_0^1 \, dy\, dz$$

$$= \int_{0}^{3} \left[\frac{1}{4} y^2 z^2\right]_{-1}^{2} \, dz = \int_{0}^{3} \frac{3}{4} z^2 \, dz$$

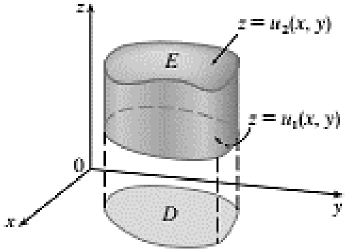
$$= \left[\frac{1}{4} z^3\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Integral lipat tiga pada daerah umum yang terbatas
Definisi yang sama sebagaimana pada integral lipat dua pada daerah bukan persegi panjang, kita dapatkan definisi integral lipat tiga pada daerah umum yang terbatas (bukan berupa kotak persegi panjang).

Misalkan *E* adalah **benda padat tipe 1** yang merupakan daerah antara grafik dua fungsi yang kontinu terhadap *x* dan *y* yang dinyatakan

$$E = \{(x, y, z) |\ (x, y) \epsilon D,\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

dimana *D* adalah proyeksi *E* pada bidang-*xy* sebagaimana pada Gambar 4.26. Perlu menjadi catatan adalah batas atas benda padat E adalah permukaan dengan persamaan $z = u_2(x, y)$ dan batas bawahnya adalah $z = u_1(x, y)$.



Gambar 4.24 Benda padat Tipe 1

Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 1) adalah

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dA$$

Selanjutnya, apabila proyeksi D pada pada bidang-*x*y adalah tipe I yang dinyatakan sebagai

$$E = \{(x,y,z)|\ a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 1) adalah

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z) dz\, dy\, dx$$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan integral fungsi $f(x,y,z) = 4x - 12z$ terhadap kotak

$$B = \{(x,y,z)|1 \le x \le 2, x \le y \le 2x, y - x \le z \le y\}$$

Penyelesaian

Berdasarkan Teorema Fubini kita dapatkan

$$\iiint_B (4x - 12z) dV = \int_1^2 \int_x^{2x} \int_{y-x}^{y} (4x - 12z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_x^{2x} [4xz - 6z^2]_{y-x}^{y}\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_x^{2x} [(4xy - 6y^2) - (4x(y - x) - 6(y - x)^2]\, dy\, dx$$

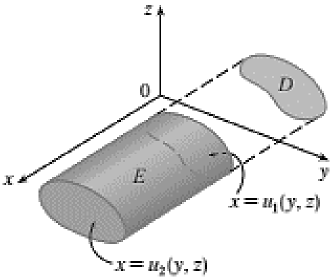
$$= \int_1^2 \int_x^{2x} (10x^2 - 12xy)\, dy\, dx = \int_1^2 [10x^2y - 12xy^2]_x^{2x}$$

$$= \int_1^2 (-8x^3)dx = [-2x^4]_1^2 = -30$$

Apabila *D* adalah daerah Tipe II yang dinyatakan oleh
$E = \{(x, y, z) |\ c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$

Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe I) adalah

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$



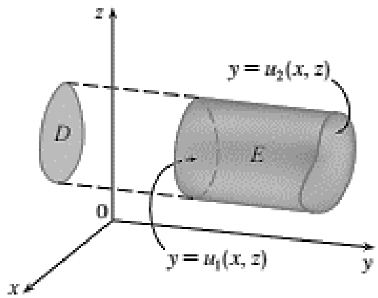
Gambar 4.25 Benda padat Tipe 2

Sebuah **benda padat tipe 2** (sebagaimana Gambar 4.25) yang dinyatakan oleh

$$E = \{(x, y, z) |\ (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 2) adalah

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$



Gambar 4.26 Benda padat Tipe 3

Sebuah **benda padat tipe 3** (sebagaimana Gambar 4.26) yang dinyatakan oleh

$$E = \{(x, y, z) |\ (x, z) \in D, u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\}$$

Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 3) adalah

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dA}$$

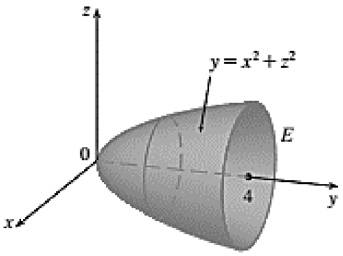
Contoh 3

Tentukan $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, dimana E adalah daerah yang dibatasi oleh paraboloid $y = x^2 + z^2$ dan bidang $y = 4$.

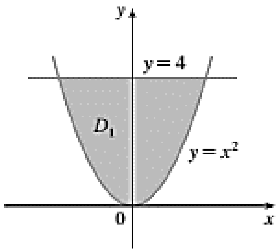
Penyelesaian

Benda padat *E* ditunjukkan oleh Gambar 4.30, dimana diketahui *E* adalah daerah tipe 1, maka kita membutuhkan proyeksinya terhadap bidang-*xy* yaitu D_1 yang berupa daerah parabolik pada Gambar 4.31. Jejak $y = x^2 + z^2$ pada bidang $z = 0$ adalah parabola $y = x^2$.

Dari $y = x^2 + z^2$ kita dapatkan $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, sehingga batas bawah dari E adalah $z = -\sqrt{y - x^2}$ dan batas atasnya adalah $z = \sqrt{y - x^2}$.



Gambar 4.27 Benda padat *E*



Gambar 4.28 Proyeksi *E* pada bidang-*xy*

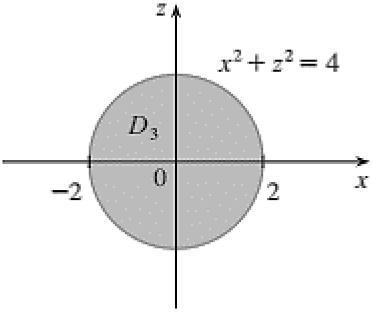
Dengan demikian, E adalah daerah tipe 1 yang dapat dinyatakan sebagai

$$E = \left\{(x, y, z) \middle| -2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\right\}$$

Sehingga kita dapatkan

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\,dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\,dzdydx$$

Walaupun bentuk di atas benar, namun sulit untuk diselesaikan. Sehingga misalkan kita mempertimbangkan *E* sebagai daerah tipe 3. Maka D_3 adalah proyeksi *E* terhadap bidang-*xz* yang berupa cakram $x^2 + z^2 \le 4$ sebagaimana Gambar 4.32.



Gambar 4.32 Proyeksi *E* pada bidang-*xz*

Dengan demikian didapatkan batas kiri dari E adalah paraboloid $y = x^2 + z^2$ dan batas kanannya adalah bidang $y = 4$. Atau dapat dinyatakan $u_1(x,z) = x^2 + z^2$ dan $u_1(x,z) = 4$.

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA$$

$$= \iint_{D_3} \left[y\sqrt{x^2 + z^2} \right]_{x^2+z^2}^{4} dA$$

$$= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Bentuk yang paling akhir ini akan mudah diselesaikan jika kita mengkonversinya menjadi koordinat polar pada bidang-*xz*, dimana $r^2 = x^2 + z^2, x = r\cos\theta\ \ dan\ z = r\sin\theta$.
Dari Gambar 4.30 diperoleh bahwa

$$D_3 = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Sehingga didapatkan

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \iint_{D_3} (4 - (x^2 + z^2))\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4 - r^2)\, r\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4r^2 - r^4)\ dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{64}{15}\ d\theta$$

$$= \left[\frac{64}{15} \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{128}{5} \pi$$

<u>Contoh 4</u>

Nyatakan integral berulang $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ sebagai integral lipat tiga dan nyatakan kembali sebagai integral lipat tiga dengan urutan yang berbeda, pertama integralkan terhadap *x*, kemudian terhadap *z* dan terhadap *y*.

Penyelesaian

Kita dapat menyatakan

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x,y,z)\, dV$$

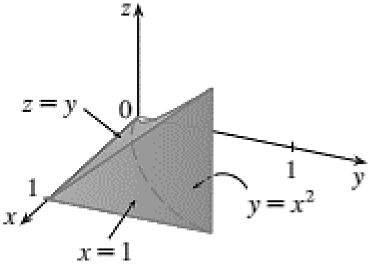
Dimana $E = \{(x,y,z)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le y\}$. Deskripsi dari *E* memungkinkan kita untuk membuat proyeksinya terhadap tiga bidang koordinat, yaitu:

Pada bidang-*xy* $D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$

$= \left\{(x,y)\middle|0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\right\}$

Pada bidang-*yz* $D_2 = \{(y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le z \le y\}$

Pada bidang-*xz* $D_2 = \{(y,z)|0 \le x \le 1, 0 \le z \le x^2\}$



Gambar 4.30 Sketsa benda padat *E* soal contoh 4

Bentuk benda padat *E* ditunjukkan oleh Gambar 4.30, terlihat bahwa *E* dibatasi oleh $z = 0, x = 1, y = z$ dan silinder parabolik $y = x^2$ (atau $x = \sqrt{y}$).

Jika pertama integralkan terhadap *x*, kemudian terhadap *z* dan terhadap *y*, maka alternative deskripsi *E* yang dapat kita gunakan adalah

$$E = \left\{(x,y,z)\middle|0 \le y \le 1, 0 \le z \le y, \sqrt{y} \le x \le 1\right\}$$

Sehingga dapat kita nyatakan

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

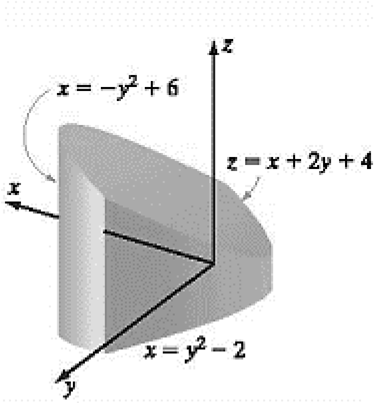
Volume suatu daerah pada ruang
Andaikan terdapat kasus khusus dimana $f(x,y,z) = 1$ untuk seluruh titik di *D*, maka integral lipat tiga direpresentasikan sebagai volume dari *D.*

Definisi
Volume suatu daerah tertutup dan terbatas *D* pada ruang adalah

$$V = \iiint_D dV$$

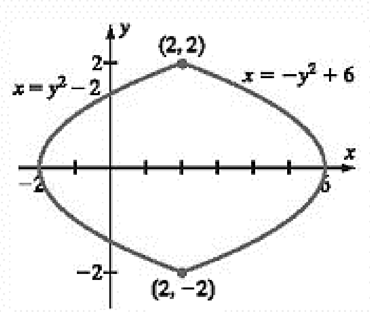
<u>Contoh 5</u>
Hitunglah volume benda padat tiga dimensi *U* yang dibatasi oleh silinder parabolik $x = y^2 - 2$ dan $x = -y^2 + 6$, di atas bidang $z = x + 2y + 4$ dan di bawah bidang $z = -x - 4$.

Penyelesaian



Gambar 4.31 Sketsa benda padat *U* soal contoh 5

Benda padat *U* ditunjukkan oleh Gambar 4.34. Terlihat bahwa grafik $x = y^2 - 2$ dan $x = -y^2 + 6$ berada pada sisi vertikal *U*. Proyeksi *U* terhadap bidang-*xy* adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $x = y^2 - 2$ dan $x = -y^2 + 6$ yang berpotongan pada titik (2, 2) dan (2, –2) sebagaimana Gambar 5.35. Dari ilustrasi ini didapat bahwa nilai *y* berada pada interval [–2, 2].



Gambar 4.32 Grafik parabola $x = y^2 - 2$ dan $x = -y^2 + 6$

Untuk setiap nilai *y*, Gambar 4.32 menunjukkan bahwa interval nilai *x* adalah dari $x = y^2 - 2$ sampai $x = -y^2 + 6$.
Sedangkan untuk nilai *z*, batas bawahnya adalah $z = -x - 4$ dan batas atasnya adalah $z = x + 2y + 4$.
Sehingga didapatkan perhitungan volume *U* adalah

$$V(U) = \iiint_U dV = \int_{-2}^{2} \int_{y^2-2}^{-y^2+6} \int_{-x-4}^{x+2y+4} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{y^2-2}^{-y^2+6} \big((x + 2y + 4) - (-x - 4)\big) dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{y^2-2}^{-y^2+6} (2x + 2y + 8) dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} [x^2 + 2xy + 8x]_{y^2-2}^{-y^2+6}$$

$$= [96 + 16y - 24y^2 - 4y^3]_{-2}^{2} = 256$$

2. RANGKUMAN

a. Integral lipat tiga *f* terhadap kotak *B* adalah

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f({x_{ijk}}^*, {y_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*)\Delta V$$

jika limitnya ada

b. Jika *f* kontinu pada kotak persegi panjang yang dinyatakan oleh

$$B = \{(x,y,z)|a \le x \le b,\ c \le y \le d, r \le z \le s\}$$

maka

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

jika limitnya ada

c. Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 1) adalah

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

d. Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 2) adalah

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

e. Integral lipat tiga *f* terhadap *E* (benda padat tipe 3) adalah

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini

Hitunglah integral berulang berikut.

1. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-2} (2x - y)\,dx\,dy\,dz$
2. $\int_0^5 \int_{-2}^4 \int_1^2 (6xy^2z^3)\,dx\,dy\,dz$
3. $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} (2xyz)\,dy\,dx\,dz$

4. $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} (xe^{-y})\, dy\, dx\, dz$

Gunakan integral berulang untuk menghitung

5. $\iiint_E \; y\, dV$, dimana
   $\{(x, y, z) | 0 \le x \le 3,\; 0 \le y \le x,\; x - y \le z \le x + y\}$
6. $\iiint_E \; e^{z/y}\, dV$, dimana
   $\{(x, y, z) | 0 \le y \le 1,\; y \le x \le 1,\; 0 \le z \le xy\}$
7. $\iiint_E \; 6xy\, dV$ dimana E berada di bawah bidang $z = 1 + x + y$ dan berada di atas bidang-*xy* yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x},\; y = 0$ dan $x = 1$
8. $\iiint_E \; xy\, dV$ dimana E dibatasi oleh silinder parabolik $y = x^2$ dan $x = y^2$ serta bidang $z = 0$ dan $z = x + y$

Gunakan integral lipat tiga untuk mencari volume benda padat berikut

9. Tetrahedron yang dibatasi oleh bidang koordinat dan bidang $2x + y + z = 4$
10. Benda padat yang dibatasi oleh paraboloid $y = x^2 + z^2$ dan $y = 8 - x^2 - z^2$

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah jawaban soal bernomor ganjil

1. $\frac{16}{15}$

3. $\frac{2}{3}$

5. $\frac{27}{2}$

7. $\frac{65}{28}$

9. $\frac{16}{3}$

E. KEGIATAN BELAJAR 12

1. URAIAN MATERI

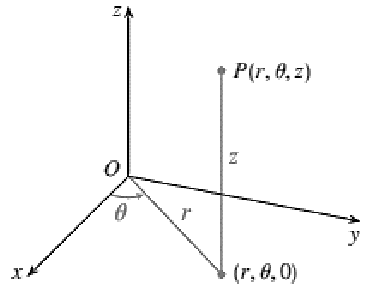
Integral Berulang pada Koordinat Silinder

Sistem koordinat polar digunakan untuk mempermudah deskripsi kurva atau daerah tertentu. Jika titik P memiliki koordinat kartesius (x, y) dan koordinat polar (r, θ), maka

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Pada dimensi tiga terdapat suatu sistem koordinat yang dinamakan sistem koordinat silinder, sama halnya dengan sistem koordinat polar, sistem koordinat ini dapat mempermudah kita dalam mendeskripsikan permukaan atau benda padat tertentu.

Pada **sistem koordinat silinder**, suatu titik P pada ruang berdimensi tiga dinyatakan dalam pasangan berurutan (r, θ, z), dimana r dan θ adalah koordinat polar dari proyeksi P terhadap bidang-*xy* dan *z* adalah jarak bidang-*xy* ke *P* (lihat Gambar 45.36).



Gambar 4.36 Posisi titik pada koordinat silinder

Untuk mengkonversi sistem koordinat silinder ke sistem koordinat kartesius digunakan persamaan

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z}$$

Untuk mengkonversi sistem koordinat kartesius ke sistem koordinat silinder digunakan persamaan

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Contoh 1

Tentukan koordinat silinder dari titik dengan koordinat kartesius $(3, -3, 7)$.

Penyelesaian

Kita dapat langsung menentukan nilai r dan θ yaitu

$$r^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18$$

Maka $\quad r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1$$

Maka $\quad \theta = -\frac{1}{4}\pi$

dan $\quad z = 7$

Jadi koordinat silindernya adalah $(3\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi, 7)$

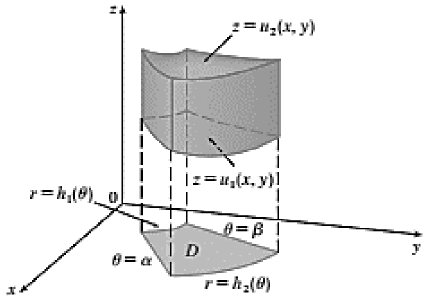
Menentukan Integral Lipat Tiga pada Koordinat Silinder

Andaikan *E* adalah daerah tipe 1 yang memiliki proyeksi *D* terhadap bidang-*xy* yang dapat dideskripsikan secara mudah pada koordinat polar (sebagaimana Gambar 4.34). Secara khusus, andaikan *f* kontinu dan

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

Dimana *D* pada koordinat polar yang dinyatakan sebagai

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$



Gambar 4.34 Benda padat *E* tipe I

Kita ketahui bahwa

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

Maka rumus integral lipat tiga pada koordinat silinder adalah

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dz\, dr\, d\theta}$$

<u>Contoh 2</u>

Hitunglah $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$.

Penyelesaian

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [rz]_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\left(\sqrt{1-r^2} - (-\sqrt{1-r^2})\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}\, dr\, d\theta$$

Untuk mempermudah, maka kita gunakan invers aturan rantai untuk menyelesaikan $\int 2r\sqrt{1-r^2}\, dr$

Misalkan $u = 1 - r^2$
Maka didapatkan $\frac{du}{dr} = -2r$ sehingga $du = -2r\, dr$
Akibatnya

$$\int \sqrt{1-r^2}\; 2r\, dr = \int \sqrt{u}\, (-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du$$
$$= -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}$$

Dengan demikian, perhitungan interal lipat tiga menjadi

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}\; dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}(1-1^2)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{2}{3}(1-0^2)^{3/2}\right)\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\, d\theta = \frac{4}{3}\pi$$

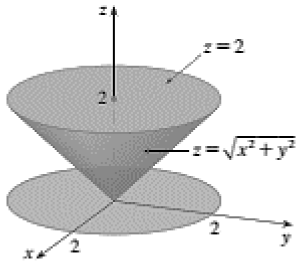
<u>Contoh 3</u>
Hitunglah $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$

Penyelesaian
Integral berulang ini adalah integral lipat tiga pada benda padat

$$E = \left\{(x,y,z)\middle| -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\right\}$$

Proyeksi E pada bidang-*xy* adalah cakram $x^2 + y^2 \le 4$. Batas bawah E adalah kerucut $z = \sqrt{x^2+y^2}$ dan batas atasnya adalah bidang $z = 2$ (sebagaimana Gambar 4.35)
Untuk mempermudah kita, deskripsi E dikonversi ke koordinat silinder sehingga

$$E = \{(r,\theta,z)|0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r \le z \le 2\}$$



Gambar 4.35 Benda padat E yang dibatasi oleh kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan bidang $z = 2$

Oleh karena itu kita dapatkan perhitungan integral berulang sebagai berikut

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^3 dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 [r^3 z]_r^2 dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(2-r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^3 - r^4)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{8}{5}d\theta = \frac{16}{5}\pi$$

2. RANGKUMAN

a. Untuk mengkonversi sistem koordinat silinder ke sistem koordinat kartesius digunakan persamaan

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

b. Untuk mengkonversi sistem koordinat kartesius ke sistem koordinat silinder digunakan persamaan

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

c. Integral lipat tiga pada koordinat silinder dinyatakan sebagai

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini

Ubahlah koordinat kartesius berikut menjadi koordinat silinder

1. $\left(-2, 2\sqrt{3}, 3\right)$
2. $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, -1)$

Konversi persamaan berikut menjadi koordinat silinder

3. $z = x^2 - y^2$
4. $3x + 2y + z = 6$

Hitunglah integral berikut

5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$
6. $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r r\, dz\, d\theta\, dr$

Hitunglah integral berikut dengan mengubahnya menjadi koordinat silinder

7. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz\, dz\, dx\, dy$
8. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{0-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

9. Hitunglah $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, dimana E terletak di dalam silinder $x^2 + y^2 = 16$ dan berada di antara bidang $z = -5$ dan $z = 4$.
10. Hitunglah $\iiint_E z\, dV$, dimana E dibatasi oleh paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan bidang $z = 4$.

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah kunci jawaban soal bernomor ganjil

1. $(4, \frac{2}{3}\pi, 3)$
3. $z = r^2 \cos 2\theta$
5. 4π

7. 0
9. 384π

F. KEGIATAN BELAJAR 13

1. URAIAN MATERI

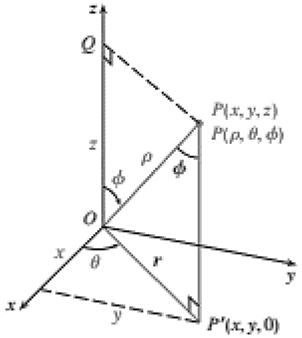
Integral Lipat Tiga Pada Koordinat Bola

Koordinat bola suatu titik P di ruang dinyatakan dalam bentuk pasangan berurutan (ρ, θ, ϕ), dimana $\rho = |OP|$ adalah jarak antara titik asal ke titik P, θ adalah sudut seperti pada koordinat silinder dan ϕ adalah sudut antara sumbu-*z* positif dengan segmen garis *OP*. Perlu menjadi catatan bahwa

$$\rho \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Hubungan antara koordinat kartesius dan koordinat bola ditunjukkan oleh Gambar 4.36. Dari segitiga *OPQ* dan *OPP'* didapatkan

$$z = \rho \cos \phi \qquad\qquad r = \rho \sin \phi$$



Gambar 4.36 Posisi titik pada koordinat bola

Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, maka untuk mengkonversi koordinat bola ke koordinat kartesius digunakan persamaan berikut

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta \quad z = \rho \cos\phi}$$

Rumus jarak titik asal ke titik P dinyatakan oleh

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>Contoh 1</u>

Ubahlah titik $P(2,\ \pi/4,\ \pi/3)$ pada koordinat bola menjadi koordinat kartesius.

Penyelesaian

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z = \rho\cos\phi = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Jadi titik *P* dalam koordinat kartesius adalah $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$.

<u>Contoh 2</u>

Ubahlah titik $Q\left(0,\ 2\sqrt{3}, -2\right)$ pada koordinat kartesius menjadi koordinat bola.

Penyelesaian

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

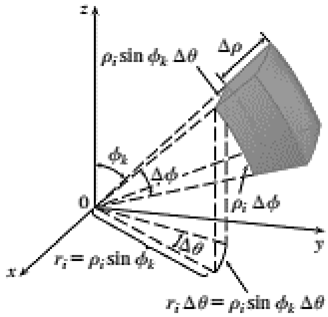
Jadi titik *P* dalam koordinat bola adalah $\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$

Menghitung integral lipat tiga pada koordinat bola

Pada koordinat bola, bentuk yang sepadan dengan kotak persegi panjang adalah baji bola (*spherical wedge*) yaitu

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Dimana $a \geq 0$ dan $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Untuk mendefinisikan integral lipat tiga kita membagi E menjadi beberapa baji bola yang kecil E_{ijk} dengan bola $\rho = \rho_i$, setengah bidang $\theta = \theta_j$ dan setengah kerucut $\phi = \phi_k$ dengan jarak yang sama.



Gambar 4.37 Partisi baji bola pada koordinat bola

Gambar 4.37 menunjukkan bahwa E_{ijk} diperkirakan sebagai sebuah kotak persegi panjang dengan ukuran $\Delta\rho, \rho_i\Delta\phi\ dan\ \rho_i \sin\phi_j \Delta\theta$. Jadi diperkirakan volume E_{ijk} adalah

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\ \rho_i\Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k \Delta\theta) = {\rho_i}^2 \sin\phi_k \Delta\theta\Delta\phi$$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata didapatkan volume E_{ijk} secara tepat diberikan oleh

$$V_{ijk} = \tilde{\rho_i}^2 \sin\tilde{\phi}_k \Delta\theta\Delta\phi$$

Dimana $\left(\tilde{\rho_i}, \tilde{\theta_j}, \tilde{\phi}_k\right)$ adalah salah satu titik di E_{ijk}. Misalkan $\left({x_{ijk}}^*, {j_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*\right)$ adalah koordinat kartesius dari titik tersebut, maka

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f\left({x_{ijk}}^*, {j_{ijk}}^*, {z_{ijk}}^*\right)\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f\left(\rho_i \sin\phi_k \cos\theta_j\, , \rho_i \sin\phi_k \sin\theta_j\, , \rho_i \cos\phi_k\right){\rho_i}^2 \sin\phi_k \Delta\theta\Delta\phi$$

Karena jumlah ini adalah jumlah Riemann untuk fungsi

$$F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\sin\phi\cos\theta\,,\rho\sin\phi\sin\theta\,,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi$$

Maka rumus integral lipat tiga pada koordinat bola adalah

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV$$
$$= \int\limits_c^d \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta\,,\rho\sin\phi\sin\theta\,,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

Dimana

$$E = \{(\rho,\theta,\phi)|a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$

Berdasarkan rumus di atas kita dapat mengkonversi koordinat bola ke koordinat kartesius dengan menggunakan persamaan

$$x = \rho\sin\phi\cos\ \theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

Contoh 3

Hitunglah $\iiint_B \ e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dV$, dimana B adalah unit bola

$$B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$$

Penyelesaian

Karena *B* adalah sebuah bola, kita gunakan koordinat bola

$$B = \{(\rho,\theta,\phi)|0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\}$$

Karena

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

Maka kita dapatkan integral lipat tiga

$$\iiint_B \ e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\left(\rho^2\right)^{3/2}} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\phi \; d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho$$

$$= [\cos\phi]_0^{\pi} \; [\theta]_0^{2\pi} \; \left[\frac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

Contoh 4

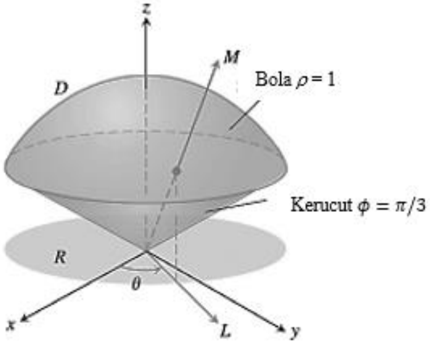
Hitunglah volume "es krim *cone*" D yang diperoleh dari memotong bola $\rho \leq 1$ dengan kerucut $\phi = \pi/3$.

Penyelesaian

Volume yang akan kita cari adalah

$$V = \iiint_D 1 \, dV = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Untuk mendapatkan batas-batas integral, kita perlu membuat sketsa sebagaimana Gambar 4.38 berikut.



Gambar 4.38 Benda padat D yang dibatasi oleh bola bola $\rho \leq 1$ dan kerucut $\phi = \pi/3$

Berdasarkan Gambar 4.38, proyeksi D pada bidang-*xy* adalah R.

- Untuk *menentukan batas* ρ, kita buat sinar M dari titik asal dan melalui D sehingga terbentuk sudut ϕ terhadap sumbu-*z* positif. Selanjutnya kita juga membuat sinar L pada bidang-*xy* sehingga terbentuk sudut θ terhadap sumbu-*x* positif. Sinar M memasuki D pada $\rho = 0$ dan meninggalkan D pada $\rho = 1$. Maka interval nilai ρ adalah [0, 1].

- Untuk *menentukan batas* ϕ, untuk setiap θ nilai ϕ bergerak dari $\phi = 0$ hingga $\phi = \pi/3$. Maka interval nilai ϕ adalah $[0, \pi/3]$.
- Untuk *menentukan batas* θ, sinar L bergerak di sepanjang bidang R dari $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$. Maka interval nilai θ adalah $[0, 2\pi]$.

Dengan demikian, perhitungan volume menjadi

$$V = \iiint_D \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{1}{3}\rho^3 \sin\phi\right]_0^1 d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}$$

2. RANGKUMAN

a. Untuk mengkonversi sistem koordinat bola ke sistem koordinat kartesius digunakan persamaan

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta \quad z = \rho \cos\phi$$

b. Rumus jarak titik asal ke titik P dinyatakan oleh

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

c. Integral lipat tiga pada koordinat bola dinyatakan sebagai

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

dimana

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$

3. LATIHAN

Kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini

Ubahlah titik dalam koordinat bola berikut ke koordinat kartesius

1. $\left(6, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\left(3, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Ubahlah titik dalam koordinat kartesius berikut ke koordinat bola

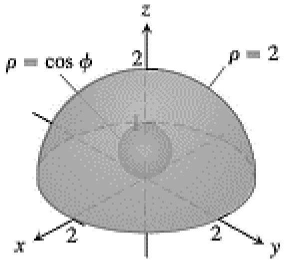
3. $(0, -2, 0)$
4. $\left(-1, 1, \sqrt{2}\right)$

Hitunglah integral lipat tiga berikut

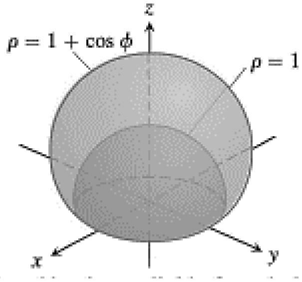
5. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
6. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2} (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

Hitunglah integral lipat tiga dari

7. Benda padat antara bola $\rho = \cos\phi$ dan setengah bola (*hemisphere*) $\rho = 2, z \geq 0$.



8. Benda padat yang dibatasi oleh setengah bola (*hemisphere*) $\rho = 1, z \geq 0$ dan *cardioid of revolution* $\rho = 1 + \cos\phi$.



9. Hitunglah $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\,dV$, dimana B adalah bola dengan pusat pada titik asal dan jari-jari 5.
10. Hitunglah $\iiint_B (9-x^2-y^2)\,dV$, dimana B adalah hemisphere $x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq 0$.

4. KUNCI JAWABAN

Berikut adalah kunci jawaban soal-soal bernomor ganjil

1. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$
3. $\left(2, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
5. π^2
7. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^{2} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{31\pi}{6}$
9. $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} (\rho^2)^2\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \frac{312500\pi}{7}$

G. RUJUKAN

Stewart, J. 2012. Multivariable Calculus. 7th Edition. Cole, Cengage Learning.

Purcell, J. E., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. Kalkulus. Jilid II. Edisi Kedelapan. Penerbit Erlangga

Blank, B. E., Krantzs, S. G. 2011. Calculus Multivariable. 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Thomas, G. B. Jr., Weir, M.D., Hass, J. 2010. Thomas' Calculus Multivariable, 12th Edition. Pearson Education, Inc.

BAB V
PENERAPAN INTEGRAL LIPAT

A. PENDAHULUAN

Penerapan integral pada fungsi peubah banyak hampir sama halnya dengan penerapan pada fungsi satu peubah. Selain digunakan untuk menghitung volume benda padat, secara umum integral juga banyak digunakan dalam perhitungan pada konsep fisika, misalnya pusat massa, momen inersia, *electric charge* dan lain-lain.

Pada bab ini akan dibahas tentang penerapan integral lipat dua dan integral lipat tiga dalam perhitungan: (a) massa total, (b) pusat massa, (c) momen inersia dan (d) luas permukaan.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu:

- Menggunakan integral lipat dua dalam menghitung massa total.
- Menggunakan integral lipat dua dalam menghitung pusat massa.
- Menggunakan integral lipat tiga dalam menghitung momen inersia.
- Menggunakan integral lipat dua dalam menghitung luas permukaan

B. KEGIATAN BELAJAR 14

1. URAIAN MATERI

a. Massa Total

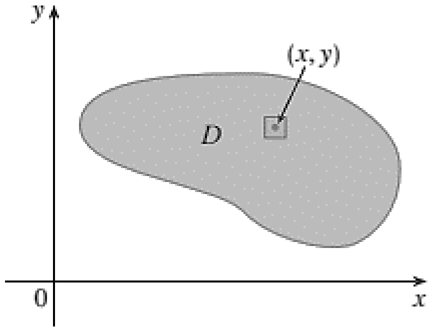
Tinjaulah sebuah lembaran tipis yang sedemikian tipisnya sehingga kita dapat memandangnya sebagai obyek berdimensi dua. Kita menyebut lembaran ini sebagai **lamina**. Pada kalkulus peubah satu kita mempelajari lamina dengan kerapatan yang konstan, tetapi pada kalkulus peubah banyak kita mempelajari lamina dengan berbagai kerapatan (*density*).

Andaikan sebuah lamina menutupi daerah D pada bidang-xy dan memiliki kerapatan (massa per satuan luas) pada suatu titik (x, y)

di D yang dinyatakan $\rho(x,y)$, dimana ρ adalah fungsi yang kontinu di *D*. Dapat dinyatakan bahwa

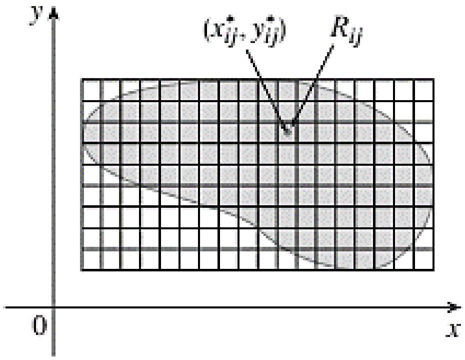
$$\rho(x,y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

dimana Δm dan ΔA adalah massa dan luas persegi panjang kecil yang mengandung (*x*, *y*) dan limitnya adalah ukuran segiempat tersebut mendektai nol (sebagaimana Gambar 5.1)



Gambar 5.1 Lamina *D* pada bidang-*xy*

Untuk mencari masa total *m* dari lamina, kita mempartisi persegi panjang *R* yang memuat *D* menjadi sub-persegi panjang kecil R_{ij} dengan ukuran yang sama (seperti Gambar 5.2) dan pertimbangkan $\rho(x,y)$ di luar *D*.



Gambar 5.2 Partisi lamina *D*

Jika kita memilih titik $\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right)$ pada R_{ij}, maka massa dari bagian lamina yang memuat R_{ij} diperkirakan adalah $\rho\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right)\Delta A$, dimana ΔA adalah luas daerah R_{ij}. Jika kita menambahkan semua massa, maka kita dapatkan aproksimasi massa total adalah

$$m \approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \rho\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right)\Delta A$$

Jika kita meningkatkan banyak sub-persegi panjang, kita akan mendapatkan massa total *m* dari lamina sebagai limit dari nilai aproksimasi di atas

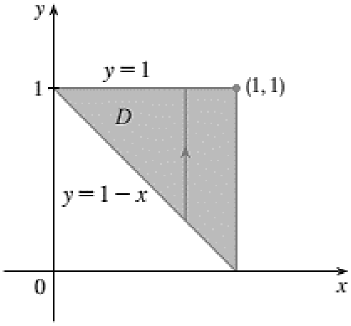
$$\boxed{m = \lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \rho\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right)\Delta A = \iint_D \rho(x,y)\, dA}$$

Fisikawan juga mempertimbangkan tipe lain dari kerapatan (*density*) yang dapat diperlakukan dengan cara yang sama. Misalnya, muatan listrik didistribusikan pada suatu wilayah *D* dan kerapatan muatan listrik (dalam satuan muatan listrik per satuan luas) dinyatakan sebagai $\sigma(x,y)$ pada suatu titik (*x*, *y*) di *D*, maka muatan listrik total *Q* adalah

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)\, dA$$

<u>Contoh 1</u>

Muatan listrik didistribusikan pada daerah segitiga *D* sebagaimana dalam Gambar 5.3 sedemikian sehingga kerapatan muatan listrik pada titik (*x*, *y*) adalah $\sigma(x,y) = xy$, diukur dalam satuan coloumb per meter persegi. Hitunglah muatan listrik total.



Gambar 5.3 Lamina segitiga *D* soal contoh 1

Penyelesaian

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sigma(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{1-x}^1 = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1^2 - (1-x)^2)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Maka muatan totalnya adalah $\frac{5}{24} C/m^2$

b. Momen dan Pusat Massa

Pada kalkulus peubah satu, kita telah mempelajari tentang pusat massa lamina untuk kerapatan konstan. Pada bagian ini kita membahas pusat massa lamina dengan kerapatan yang bervariasi. Misalkan lamina menampati wilayah D dan memiliki fungsi kerapatan $\rho(x,y)$.

Momen suatu partikel di sekitar sumbu adalah perkalian massa dan jarak terarahnya dengan sumbu. Kita membagi D menjadi beberapa sub-persegi panjang kecil seperti Gambar 5.2. Maka massa R_{ij} diperkirakan adalah $\rho\left(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*\right)\Delta A$, dengan demikian kita dapat memperkirakan momen terhadap sumbu-*x* yaitu

$$\left[\rho\left(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*\right)\Delta A\right] y_{ij}{}^*$$

Jika kita menjumlahkan kuantitas-kunatitas ini dan menarik limitnya dengan banyak sub-persegi panjang kecil sebesar mungkin, kita akan mendapatkan momen seluruh lamina terhadap sumbu-*x* yaitu

$$M_x = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} y_{ij}{}^{*} \rho\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right) \Delta A = \iint_D y\rho(x,y)\, dA$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan momen terhadap sumbu-*y* adalah

$$M_y = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} x_{ij}{}^{*} \rho\left(x_{ij}{}^{*}, y_{ij}{}^{*}\right) \Delta A = \iint_D x\rho(x,y)\, dA$$

Kita mendefinisikan pusat massa $(\bar{x}, \bar{y})$ sedemikian sehingga $m\bar{x} = M_y$ dan $m\bar{y} = M_x$. Signifikansi fisiknya adalah bahwa lamina berperilaku seolah-olah seluruh massanya terkonsentrasi pada pusat massanya. Dengan demikian lamina seimbang secara horizontal saat ditopang di pusat massanya.

Koordinat $(\bar{x}, \bar{y})$ dari pusat massa suatu lamina yang menempati daerah D dan memiliki fungsi kerapatan $\rho(x, y)$ adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)\, dA$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)\, dA$$

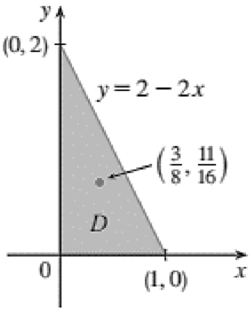
Dimana massa m diberikan oleh

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

<u>Contoh 2</u>

Hitunglah massa dan pusat massa suatu lamina segitiga yang memiliki titik puncak (0, 0), (1, 0) dan (0, 2) jika fungsi kerapatannya adalah $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

Penyelesaian



Gambar 5.4 Sketsa lamina segitiga *D* soal contoh 2

Segitiga ditunjukkan oleh Gambar 5.4, dimana nilai *y* memiliki batas bawah *y* = 0 dan batas atas *y* = 2 – 2*x*. Sedangkan nilai *x*, dari *x* = 0 sampai *x* = 1.

Massa lamina adalah

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+3x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2-2x} \\ &= \int_0^1 (1-x^2)\,dx = 4\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari koordinat pusat nassa

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA \\ &= \frac{1}{8/3}\int_0^1 \int_0^{2-2x} x(1+3x+y)\,dy\,dx \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x+3x^2+xy)\,dy\,dx \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[xy + 3x^2y + \frac{1}{2}xy^2\right]_0^{2-2x} dy\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D \; y\rho(x,y)\,dA$$
$$= \frac{1}{8/3}\int_0^1\int_0^{2-2x} y(\,1+3x+y)\,dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x} (\,y+3xy+y^2)\,dy\,dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}xy^2+\frac{1}{3}xy^3\right]_0^{2-2x} \,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (7-9x-3x^2+5x^3)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[7x-\frac{9}{2}x^2-x^3+\frac{5}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{11}{6}$$

Jadi pusat massa lamina terletak pada titik $\left(\frac{3}{8},\ \frac{11}{6}\right)$.

c. Momen Inersia

Momen inersia suatu partikel bermassa m di sekitar suatu sumbu didefinisikan sebagai mr^2, dimana *r* adalah jarak dari partikel ke sumbu. Kita memperluas konsep ini ke lamina dengan fungsi kerapatan $\rho(x,y)$ dan menempati daerah *D*, cara yang sama kita lakukan seperti pada momen biasa. Kita membagi *D* menjadi beberapa persegi panjang kecil, memperperkirakan momen inersia setiap sub-persegi panjang terhadap sumbu-*x*, dan mengambil limit jumlahnya atas sub-persegi panjang banyaknya besar. Hasilnya adalah momen inersia dari lamina terhadap sumbu-*x* yaitu

$$I_x = \lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left(y_{ij}{}^*\right)^2\rho\left(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*\right)\Delta A = \iint_D \; y^2\rho(x,y)\,dA$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan momen inersia lamina terhadap sumbu-*y* adalah

$$I_y = \lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left(x_{ij}{}^*\right)^2\rho\left(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*\right)\Delta A = \iint_D \; x^2\rho(x,y)\,dA$$

Penting pula mempertimbangkan momen inersia terhadap titik asal yang juga dinamakan momen polar inersia, yaitu

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left[\left(x_{ij}{}^*\right)^2 + \left(y_{ij}{}^*\right)^2\right]\rho\left(x_{ij}{}^*, y_{ij}{}^*\right)\Delta A \\ &= \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA \end{aligned}$$

Perlu menjadi catatan $I_0 = I_x + I_y$.

Contoh 3

Hitunglah momen inersia I_x, I_y dan I_0 dari cakram homogen D dengan kerapatan $\rho(x,y) = \rho$, berpusat di titik asal dan jari-jarinya a.

Penyelesaian

Batas D adalah lingkaran $x^2 + y^2 \le a^2$ sehingga kooradinat polar D dideskripsikan oleh $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le a$. Pertama kita menghitung I_0 yaitu

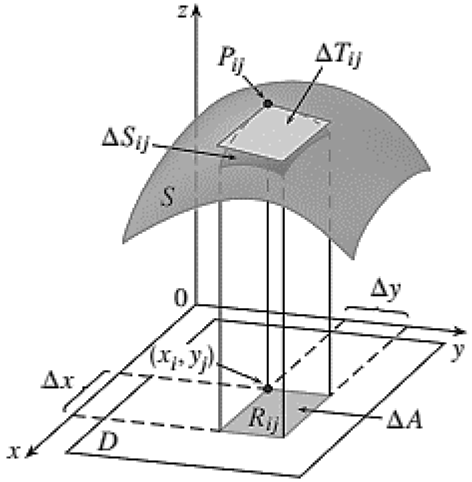
$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\, r\ dr\, d\theta \\ &= \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3\,dr\,d\theta = \rho\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a d\theta \\ &= \rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}a^4\right)d\theta = \frac{1}{4}\rho\, a^4 2\pi = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 \end{aligned}$$

Dengan mengunakan fakta $I_0 = I_x + I_y$ dan $I_x = I_y$ (karena D bentuknya lingkaran yang simetris), maka

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\rho a^2 = \frac{1}{4}\pi\rho a^2$$

d. Luas Permukaan

Andaikan S adalah permukaan dengan persamaan $z = f(x,y)$ dimana f memiliki turunan parsial kontinu. Untuk mempermudah kita mendapatkan rumus luas permukaan, kita asumsikan $f(x,y) \ge 0$ dan domain D dari fungsi f adalah sebuah persegi panjang. Kita bagi D menjadi persegi panjang kecil R_{ij} dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Jika $\left(x_i, y_j, f\left(x_i, y_j\right)\right)$ adalah ujung R_{ij} yang paling dekat dengan titik asal, andaikan P_{ij} adalah titik di S yang tepat di atasnya (sebagaimana Gambar 5.5).

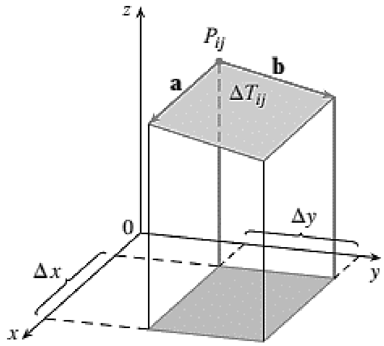


Gambar 5.5 Permukaan S dengan persamaan $z = f(x, y)$

Bidang singgung S pada P_{ij} merupakan sebuah aproksimasi S terhadap P_{ij}. Jadi luas ΔT_{ij} sebagai bagian dari garis singgung ini yang terletak tepat di atasnya adalah aproksimasi dari luas ΔS_{ij} bagian dari S yang terletak tepat di atas R_{ij}. Maka jumlah $\sum\sum \Delta T_{ij}$ adalah aproksimasi luas total S, dan aproksimasi ini meningkat seiring bertambahnya jumlah persegi panjang Oleh karena itu kita mendefinisikan luas permukaan sebagai

$$\boxed{A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij}}$$

Guna mencari rumus yang lebih mudah untuk keperluan komputasi, kita misalkan, **a** dan **b** adalah vektor yang dimulai dari P_{ij} dan terletak sepanjang sisi jajar genjang dengan luas ΔT_{ij} (sebagaimana Gambar 5.6).



Gambar 5.6 Vektor **a** dan **b** yang terletak di sepanjang sisi jajar genjang dengan luas ΔT_{ij}

Maka $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Ingat bahwa $f_x(x_i, y_j)$ dan $f_y(x_i, y_j)$ adalah kemiringan garis singgung garis yang melalui P_{ij} pada arah **a** dan **b**. Maka

$$\mathbf{a} = \Delta x\ \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\Delta x\ \mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = \Delta y\ \mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\Delta y\ \mathbf{k}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_j)\ \Delta x\Delta y\ \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\ \Delta x\Delta y\ \mathbf{j} + \Delta x\Delta y\ \mathbf{k} \\ &= \left[-f_x(x_i, y_j)\ \mathbf{i} - f_x(x_i, y_j)\ \mathbf{j} + \mathbf{k}\right] \Delta A\end{aligned}$$

Sehingga

$$\Delta T_{ij} = \sqrt{\left[f_x(x_i, y_j)\right]^2 + \left[f_y(x_i, y_j)\right]^2 + 1}\ \Delta A$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\begin{aligned}A(S) &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \sqrt{\left[f_x(x_i, y_j)\right]^2 + \left[f_y(x_i, y_j)\right]^2 + 1}\ \Delta A\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi integral lipat dua kita dapatkan rumus sebagai berikut

Luas permukaan dengan persamaan $z = f(x, y)$, dimana f_x dan f_y kontinu, adalah

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[f_x\left(x_i, y_j\right)\right]^2 + \left[f_y\left(x_i, y_j\right)\right]^2 + 1}\ dA$$

Notasi yang lain juga dapat digunakan yaitu

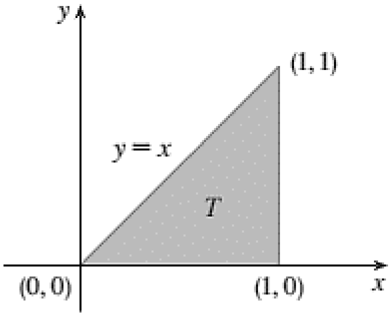
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dA$$

<u>Contoh 4</u>

Tentukan luas permukaan bagian dari permukaan $z = x^2 + y$ yang terletak di atas daerah segitiga *T* pada biadng-*xy* dengan titik ujung (0,0), (1,0) dan (1,1).

Penyelesaian

Pertama kita buat grafik daerah *T*



Gambar 5.7 Grafik daerah *T* soal contoh 4

Berdasarkan Gambar 5.7, daerah T dapat dideskrispsikan sebagai

$$T = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

Dengan menyatakan $f(x, y) = x^2 + y$, kita dapatkan

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\, dy\, dx = \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5}\, dx$$

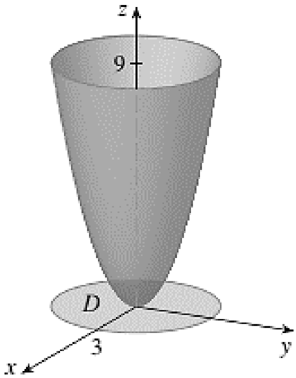
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\left[(4x^2 + 5)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$$

Contoh 5

Tentukan luas permukaan paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 9$,

Penyelesaian

Bidang $z = 9$ memotong paraboloid di daerah bidang lingkaran yaitu $x^2 + y^2 = 9$. Proyeksi bidang ini ke bidang-*xy* adalah cakram *D* yang berpusat di titik asal dengan jari-jari 3 (sebagaimana Gambar 5.8).



Gambar 5.8 Paraboloid $z = x^2 + y^2$, bidang $z = 9$ dan cakram *D*

Misalkan $f(x,y) = x^2 + y^2$ maka $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$
Dengan demikian kita dapatkan perhitungan

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA \end{aligned}$$

Untuk mempermudah perhitungan, kita konversi ke koordinat polar menjadi

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{1}{8}\sqrt{1 + 4r^2}\, (8r)\, dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 d\theta \\ &= \frac{1}{12}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{6}\pi\left(37\sqrt{37} - 1\right) \end{aligned}$$

2. RANGKUMAN

a. Rumus massa total *m* pada lamina

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

b. Momen seluruh lamina terhadap sumbu-*x* yaitu

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\, dA$$

c. Momen seluruh lamina terhadap sumbu-*y* adalah

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)\, dA$$

d. Koordinat $(\bar{x}, \bar{y})$ dari pusat massa suatu lamina yang menempati daerah D dan memiliki fungsi kerapatan $\rho(x,y)$ adalah

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA$$

dimana massa m diberikan oleh

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$$

e. Momen inersia dari lamina terhadap sumbu-*x*

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dA$$

f. Momen inersia lamina terhadap sumbu-*y* adalah

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dA$$

g. Momen inersia terhadap titik asal

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA$$

h. Luas permukaan dengan persamaan $z = f(x,y)$, dimana $f_x\ dan\ f_y$ kontinu, adalah

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[f_x(x_i,y_j)\right]^2 + \left[f_y(x_i,y_j)\right]^2 + 1}\ dA$$

3. LATIHAN

Kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

Tentukan massa m dan pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$ dari lamina yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut dengan kerapatan yang diberikan

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3;\ \rho(x,y) = y + 1$
2. $y = 0, y = \sqrt{4 - x^2};\ \rho(x,y) = y$

Tentukan massa m dan pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$ dari lamina terhadap daerah *D* dan fungsi kerapatan yang diberikan

3. *D* adalah daerah segitiga yang memiliki titik-titik ujung (0,0), (2,1) dan (0,3); $\rho(x,y) = x + y$.
4. *D* adalah daerah segitiga yang dibatasi oleh garis $x = 0,\ y = x$ dan $2x + y = 6$; $\rho(x,y) = x^2$.

5. Sebuah lamina menempati bagian cakram $x^2 + y^2 \leq 1$ pada kuadran pertama. Hitunglah pusat massanya jika kerapatan di semua titik sebanding dengan jaraknya ke sumbu-*x*.
6. Tentukan massa lamina pada soal no. 5, jika kerapatannya sebanding dengan kuadrat dari jaraknya ke titik asal.
7. Hitunglah momen inersia I_x, I_y dan I_0 pada lamina terhadap daerah *D* yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$ dan $y = 0$ dengan fungsi kerapatan $\rho(x, y) = ky$.
8. Hitunglah momen inersia I_x, I_y dan I_0 pada lamina di soal no. 6.
9. Tentukan luas permukaan bagian bidang $\mathrm{z = 2 + 3x + 4y}$ yang terletak di atas persegi panjang $[0,5] \times [1,4]$.
10. Tentukan luas permukaan bagian dari permukaan $z = \sqrt{4 - y^2}$ yag tepat berada di atas bujur sangkar pada bidang-*xy* dengan titik-titik ujung (1,0), (2,0), (2,1) dan (1,1).
11. Tentukan luas permukaan bagian dari paraboloid $z = y^2 - x^2$ yang terletak di antara silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 4$.
12. Tentukan luas permukaan bagian dari permukaan $z = xy$ yang terletak di dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.

4. KUNCI JAWABAN

Berikut ini adalah jawaban soal-soal bernomor ganjil.

1. $m = 30; \bar{x} = 2; \bar{y} = 1.8$
3. $m = 6; \bar{x} = \frac{3}{4}; \bar{y} = \frac{3}{2}$
5. $\bar{x} = \frac{3}{8}; \bar{y} = \frac{3}{16}\pi$
7. $I_x = \frac{64}{315}k;\ I_y = \frac{8}{105}k;\ I_0 = \frac{88}{315}k$
9. $A(S) = 15\sqrt{26}$
11. $A(S) = \frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}$

C. RUJUKAN

Stewart, J. 2012. Multivariable Calculus. 7th Edition. Cole, Cengage Learning.

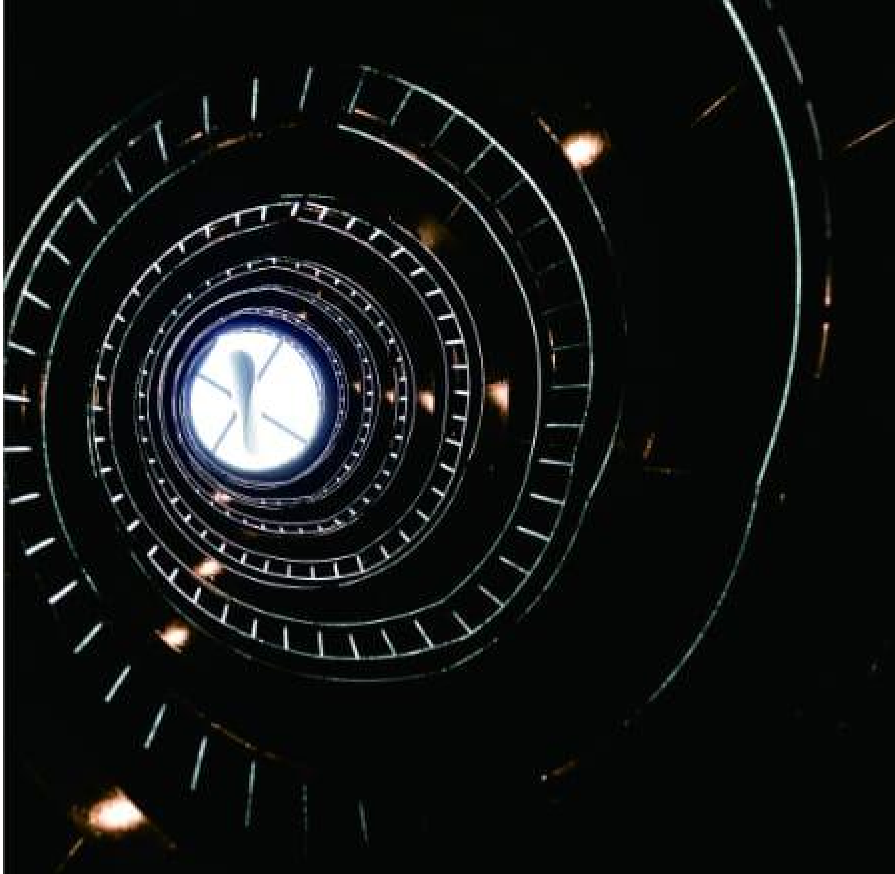
Purcell, J. E., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. Kalkulus. Jilid II. Edisi Kedelapan. Penerbit Erlangga

Blank, B. E., Krantzs, S. G. 2011. Calculus Multivariable. 2nd Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc.

Thomas, G. B. Jr., Weir, M.D., Hass, J. 2010. Thomas' Calculus Multivariable, 12th Edition. Pearson Education, Inc.

BIODATA PENULIS

Dr. Parhaini Andriani, M.Pd.Si. adalah dosen tetap Jurusan Tadris Matematika UIN Mataram, kelahiran Wanasaba Lombok Timur, 18 September 1981. Penulis menyelesaikan studi Sarjana (S1) Pendidikan Matematika IKIP Mataram pada tahun 2005, Magister (S2) Pendidikan Matematika Univeristas Negeri Yogyakarta (UNY) pada tahun 2009 dan Doktoral (S3) Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang (UM) pada tahun 2019. Penulis pernah menjabat sebagai Sekretaris Jurusan Pendidikan Matematika IAIN Mataram periode 2011–2014 dan saat ini menjadi pengurus pusat Perhimpunan Doktor Indonesia Maju (PDIM) periode 2020-2023. Penulis aktif mengikuti kegiatan Workshop/ Seminar/ *Shortcourse* baik tingkat naional dan internasional seperti *Short Course* Metodologi Penelitian Kuantitatif (Diktis Kemenang, 2011), *Short Course Curriculum Development Program* (IIUM Malaysia, 2013), *Short Course Active Learning on Islamic Higher Education* (University of Merbourne, 2014), *International Conference on Mathematics and Science Education* (UPI, 2018). Beberapa penelitian yang dilakukan penulis di antaranya: Pengembangan akhlak mulia dalam pembelajaran matematika (2009), Eksistensi *Kampung Limit* dalam Membangun Kultur Akademik pada Mahasiswa (2011), Penalaran Aljabar dalam Pembelajaran Matematika (2015), *Exploring informal inferential reasoning: the case of comparing two data sets problem* (2019).



Sanabil
Puri Bunga Amanah
Jl. Kerajinan 1 Blok C/13 Mataram
Telp. (0370) 7505946/ +6281805311362
E-mail: sanabilpublishing@gmail.com
www. sanabil.web.id

ISBN 978-623-317-032-1
9 786233 170321